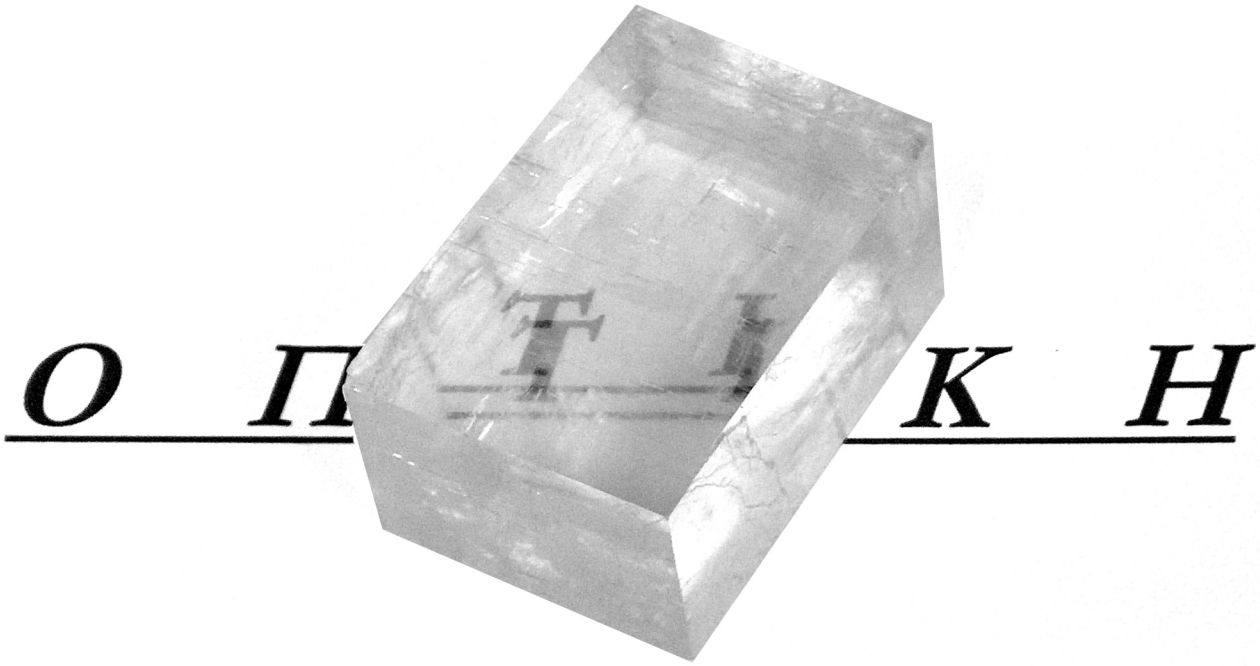
ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΑΚΗ ΟΠΤΙΚΗ

4 ΠΟΛΩΣΗ ΤΟΥ ΦΩΤΟΣ
ΣΤΟ ΚΕΝΟ ΚΑΙ ΤΗΝ ΥΛΗ



Ε.Δ. ΒΑΝΙΔΗΣ

ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗ ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΣ 2023

ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΑΚΗ ΟΠΤΙΚΗ

ΠΟΛΩΣΗ ΤΟΥ ΦΩΤΟΣ
ΣΤΟ ΚΕΝΟ ΚΑΙ ΤΗΝ ΥΛΗ

Ε.Δ. ΒΑΝΙΔΗΣ

ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗ ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΣ 2023

Επιτρέπεται η αναπαραγωγή της παρούσας εργασίας σαν σύνολο ή τμηματικά από: Φοιτητές, διδάσκοντες ή άλλους ενδιαφερόμενους. Η αναπαραγωγή θα γίνεται μόνο από τα ηλεκτρονικά αρχεία που είναι σε μορφή PDF και που θα βρίσκονται στις κατά τόπους βιβλιοθήκες ή στον διαδικτυακό χώρο:

http://users.auth.gr/~vanidhis

Δεν επιτρέπεται η μετατροπή των αρχείων PDF της εργασίας σε άλλου είδους αρχεία. Δεν επιτρέπεται με κανέναν τρόπο η μαζική αναπαραγωγή της εργασίας με σκοπό την εμπορική εκμετάλλευση της από οποιονδήποτε.

1^{H} ΕΚΔΟΣΗ ΙΟΥΝΙΟΣ 2008
2^{H} ΕΚΔΟΣΗ ΦΕΒΡΟΥΑΡΙΟΣ 2017
3^{H} ΕΚΔΟΣΗ (Διορθωμένη) ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΣ 2023 (Διατίθεται ελεύθερα στο διαδίκτυο σε PDF)

ISBN (Της πρώτης εκδ.) 978-960-631-028-7
978-960-930679-9

© COPYRIGHT: Ευάγγ.Δ.Βανίδης
Φιλίπου 41
54631 Θεσ/νίκη

Ευάγγελος. Δ. Βανίδης
Σε συνεργασία με:
ΑΠΘ / ΣΘΕ / Τμήμα Φυσικής
Τομέας Φυσικής Στερεάς Κατάστασης
Εργαστήριο Οπτικής και Φασματοσκοπίας
54124 Θεσ/νίκη
e-mail: vanidhis@auth.gr
Τηλέφωνο: 2310-235074 (οικίας) , 2310-998219 (εργαστηρίου)

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

1) Σύντομη επισκόπηση της εξέλιξης των θεωριών για το φως

Είναι γνωστή σήμερα – και σχεδόν γενικά αποδεκτή – η άποψη για τη δυαδική φύση του φωτός, με την κυματική και σωματιδιακή (φωτονική) της έκφραση. Επίσης έχει απαντηθεί σαφώς το δίλημμα, το οποίο προέκυπτε από το ότι για την περιγραφή και την ερμηνεία μιας σειράς πειραμάτων, ήταν επαρκής η κυματική θεωρία ενώ για τα υπόλοιπα η κβαντομηχανική. Πράγματι κατά τον De Broglie: 'Το καθένα από αυτά τα πειράματα δεν μας αναδεικνύει μια από τις δύο 'φύσεις' του φωτός καθ' εαυτή (per se), αλλά με ποιόν τρόπο το φως αλληλεπιδρά με τις πειραματικές διατάξεις'. Δηλ. το φως αναδεικνύει τις κυματικές ή σωματιδιακές (φωτονικές) του ιδιότητες, ανάλογα με το τι αλληλεπιδρά μαζί του. Η απάντηση αυτή βέβαια φέρει το βάρος και συνιστά το αποτέλεσμα της μακραίωνης διαπάλης όλων των θεωριών για το φως από την αρχαιότητα μέχρι σήμερα και πιο συγκεκριμένα από τη στιγμή που αποτέλεσε 'εξωτερική' οντότητα της οποίας αναζητούνταν η φύση. Δηλ. ήταν ανεξάρτητη του εκάστοτε παρατηρητή.

Η καθοριστική εποχή της μεταστροφής των μελετών που αφορούσαν το φως, από τους μηχανισμούς της όρασης, σε ερωτήσεις σε σχέση με τα φύση του, ήταν ο 17^{ος} αιώνας. Εντούτοις πριν, κατά τη διάρκεια και μετά τη χρονική αυτή περίοδο, μπορούμε να ξεχωρίσουμε την ουσιαστική συμβολή τεσσάρων τον αριθμό θεωριών οι οποίες διαπραγματευόταν τη ουσία του. Η κάθε μια από αυτές ή ταυτόχρονά με άλλες, αποκτούσε κύρος ή απορριπτόταν ανάλογα με την ικανότητά τους να ερμηνεύσουν τα αποτελέσματα των πειραμάτων που διεξαγόταν από τους διάφορους κατά εποχή ερευνητές και επιστήμονες. Ας υπενθυμίσουμε εδώ ότι η απόρριψη της ιδέας του 'αιθέρα' έγινε σχετικά πρόσφατα από τον Jules Henry Poincarè (1854-1912) το 1899, βασισμένη σε πειράματα των Michelson – Morley κατά τη δεκαετία 1880 – 1890.

Από το δεδομένο ότι στον ελεύθερο τουλάχιστον χώρο, το φως ήταν διαπιστωμένο ότι διαδιδόταν ευθύγραμμα, κρίθηκε ότι η φύση του αφορούσε κάτι το οποίο κινείται. Το γεγονός αυτό – και όχι μόνο – οδήγησε στο ν' αναπτυχθούν οι προαναφερόμενες τέσσερις κατά γενική αποδοχή θεωρίες ότι το φως ήταν: α) Ένα 'ρευστό' σε κίνηση. β) Κινούμενα σωματίδια (η σωματιδιακή θεωρία). γ) Διάδοση με τη βοήθεια δονήσεων (ταλαντώσεων) ενός αιθέριου ρευστού που ήταν πανταχού παρόν (θεωρία του 'αιθέρα'). δ) Οδεύοντα κύματα. Η ιδέα του φωτός σαν κινούμενο ρευστό προήλθε κυρίως από την ανακάλυψη (περί το 1650) των φαινομένων περίθλασης του φωτός (εμφάνιση φωτός μέσα στα όρια μιας γεωμετρικής σκιάς), από

τον Francesco Maria Grimaldi (1618 – 1663). Τα φαινόμενα αυτά δεν μπορούσαν να εξηγηθούν από τη σωματιδιακή θεωρία των ευθύγραμμα κινούμενων σωματιδίων, που συνυπήρχε εκείνη την εποχή. Η υιοθέτηση της θεωρίας του 'ρευστού' προήλθε από την εμπειρία της περίθλασης ('περί-θλάσης' - παράκαμψης) των διαφόρων αντικειμένων από τα υδάτινα κύματα. Η θεωρία αυτή εμφάνιζε εξ' αρχής πολλές αντινομίες και αδυναμία εξήγησης πλείστων όσων φαινομένων της οπτικής, όπως π.χ. πως ήταν δυνατόν το φως να διαπεράσει σαν ρευστό στερεά αντικείμενα όπως το γυαλί. Παρά το ότι πολύ σύντομα απορρίφθηκε προς χάριν άλλων θεωριών, εντούτοις οδήγησε προς την κατεύθυνση της υιοθέτησης της κυματικής θεωρίας για το φως, γεγονός που έγινε πλήρως αποδεκτό μετά από δύο τουλάχιστον αιώνες.

Το 1621 – μια σημαντική στιγμή για την οπτική – ο Willebrord Snell (1591 – 1626) περιγράφει ακριβώς την πορεία των ακτίνων του φωτός μέσα από μια διαθλαστική επιφάνεια. Την ίδια εποχή ο Renè Descarts (1596 – 1650) δημοσιεύει το νόμο των ημίτονων, που αφορά τη διάθλαση του φωτός. Εκτός τούτου όμως στο σύγγραμμά του 'La Dioptrique' το 1637 εισηγείται την ιδέα ότι το φως διαδίδεται σαν τρόπος πίεσης (διαμήκεις διαταραχές) σ' ένα πανταχού παρόν ελαστικό μέσο τον 'αιθέρα'. Την ίδια περίπου εποχή ο Grimaldi (για τον οποίο ήδη αναφέραμε) και ο R. Hooke (1635 – 1703) παρατηρούν φαινόμενα περίθλασης. Ο τελευταίος στο βιβλίο του 'Micrographia' το 1665 αναφέρει ότι το φως είναι μια πολύ γρήγορη διαταραχή που κινείται μέσα σ' ένα μέσο με πολύ μεγάλη ταχύτητα. Η άποψη αυτή αποτελεί και την απαρχή υιοθέτησης της κυματικής θεωρίας.

Κατά τα γνωστά, αυτός που εισήγαγε την σωματιδιακή θεωρία ήταν ο I. Newton (1642 – 1727). Αποδέχτηκε ότι το φως ήταν ένα ρεύμα από γρήγορα κινούμενα σωματίδια. Με τις απόψεις αυτές ήταν δυνατόν να εξηγηθούν τα εξής φαινόμενα: Της ευθύγραμμης διάδοσης του φωτός, της ανάκλασης και της διάθλασης. Η θεωρία αυτή έγινε ευρέως αποδεκτή μετά το 1687, το χρόνο δηλ. που ο Newton εξέδωσε τι 'Αρχές' του (Principia). Την ίδια εποχή ο Christian Huygens (1629 – 1695) προτείνει την κυματική του θεωρία. Υπέθεσε ότι από κάθε σημείο μιας ανακλώσας ή διαθλώσας επιφάνειας, εκπέμπονται σφαιρικά κυματίδια (wavelets). Σαν αποτέλεσμα, σε μια επόμενη χρονική στιγμή, το ανακλώμενο ή διαθλώμενο μέτωπο κύματος είναι η περιβάλλουσα αυτών των κυματιδίων. Με τη θεωρία του αυτή μπορούσαν να εξηγηθούν: Η ευθύγραμμη διάδοση του φωτός , η ανάκλαση, η διάθλαση καθώς και το φαινόμενο (με μια επιπλέον πρόταση όπως θα δούμε στα επόμενα) της διπλής διάθλασης του φωτός. Επίσης ασχολούμενος με τους κρυστάλλους του Ασβεστίτη (Ισλανδική κρύσταλλος), στους οποίους για πρώτη φορά είχε παρατηρηθεί η διπλή διάθλαση, ανακαλύπτει το φαινόμενο της πόλωσης του φωτός. Η εναντίωση του Newton προς την κυματική θεωρία, οφειλόταν στα αποτελέσματα του τρόπου με τον οποίο σχηματίζεται η σκιά, όταν το φως προσπίπτει σε

αδιαφανή αντικείμενα. Ενώ τα υδάτινα και τα ακουστικά (διαμήκη) κύματα κατακλύζουν εν πολύς το χώρο της 'γεωμετρικής σκιάς' των αντικειμένων μετά την πρόσπτωσή τους σ' αυτά, δεν συμβαίνει το ίδιο (τουλάχιστον κατά τις παρατηρήσεις του) και για το φως. Ο ίδιος ο Newton βέβαια παρατηρούσε ασυνέπειες μεταξύ των δύο θεωριών και για το λόγο αυτό αναφερόταν σε ακτίνες φωτός (ρεύματα σωματιδίων) παρά σε σωματίδια. Οι διάδοχοί του όμως υιοθέτησαν πλήρως τη σωματιδιακή θεωρία, δίνοντας στα σωματίδια διάφορες ιδιότητες (μικρά – μεγάλα σε μέγεθος για την ερμηνεία του διασκεδασμού μέσω των πρισμάτων) καθώς και ότι πάνω τους δρούσαν δυνάμεις σύμφωνα με τον 2° νόμο του Newton. Επίσης προκειμένου να εξηγήσουν το φαινόμενο της πόλωσης, απέδωσαν και ασυμμετρίες στο σχήμα τους όπως θα δούμε στα επόμενα.

Πάντως ανεξαρτήτως της αποδοχής της σωματιδιακής θεωρίας (κινούμενα σωματίδια) ή της κυματικής (επιμήκους φύσης διαταραχές του 'αιθέρα'), ήταν σαφές ότι το φως κινούνταν με μεγάλη ταχύτητα. Το τελευταίο επιβεβαιώθηκε πειραματικά το 1676 από τον Olaf Römer (1644 – 1710). Ο Römer με τη βοήθεια αστρονομικών παρατηρήσεων της κίνησης ενός των δορυφόρων του πλανήτη Δία, υπολόγισε ότι η ταχύτητα του φωτός ήταν πεπερασμένη και ίση με $2410.00\,\mathrm{km/s}$.

Στις αρχές του $19^{ου}$ αιώνα ο Thomas Young (1773 – 1829) παρουσιάζει σε τρεις διαλέξεις του (12 Νοεμ. 1801, 1 Ιουλ. 1802 και 24 Νοεμ. 1803) στη Βασιλική Ακαδημία του Λονδίνου την κυματική θεωρία για το φως, συμπληρώνοντάς την με την αρχή της επαλληλίας. Εξηγούσε μ' αυτόν τον τρόπο τα φαινόμενα συμβολής από λεπτά υμένια, χρησιμοποιώντας πειραματικά δεδομένα του Newton. Οι απόψεις του όμως δεν γίνονται αποδεκτές. Στην Γαλλία την ίδια περίπου εποχή, ο Jean Fresnel (1788 – 1827) δουλεύει ανεξάρτητα την κυματική θεωρία για το φως, υιοθετώντας την αρχή του Huygens συνδυασμένη με την αρχή της επαλληλίας. Είναι η γνωστή μέχρι τις μέρες μας 'αρχή των Huygens – Fresnel'. Με την βοήθεια των: Francois Jean Arago (1786 – 1853), Pierre Simon de Laplace (1749 – 1827) και του Jean-Batiste Biot (1774 – 1862) η θεωρία του Fresnel αποκτά μαθηματική υπόσταση. Σαν αποτέλεσμα, έχουμε τον υπολογισμό προτύπων περίθλασης. Fresnel και Arago αναδεικνύουν πειραματικά την ύπαρξη μιας μικρής φωτεινής κηλίδας, στη σκιά ενός μικρού αδιαφανούς κυκλικού δίσκου (μετά την περίθλαση του φωτός από αυτόν). Το αποτέλεσμα αυτό, ήταν προβλέψιμο από την κυματική θεωρία. Το 1808 οι Ėtienne Luis Malus (1775 – 1812) και ο Fresnel προσπαθούν να εξηγήσουν με πειράματα τη διπλή διάθλαση του φωτός στους κρυστάλλους του Ασβεστίτη. Την ίδια περίπου εποχή – όπως θα δούμε λεπτομερώς στα επόμενα – οι: Arago, Young και Fresnel συγκλίνουν στο ν' αποδώσουν εγκάρσιο χαρακτήρα στα κύματα που διαδίδονται μέσω του 'αιθέρα'. Ο ίδιος ο Fresnel με βάση την υπόθεση για τις εγκάρσιες πλέον μηχανικές διαταραχές του 'αιθέρα', αναδεικνύει τους τύπους που αφορούν τις τιμές των πλατών, για τις ανακλώμενες και διαθλώμενες σε οπτικά μέ-

σα δέσμες φωτός. Είναι οι γνωστές στις μέρες μας 'εξισώσεις Fresnel'. Με το πλάτος βέβαια ν' αφορά πλέον το πλάτος της έντασης του ηλεκτρικού πεδίου.

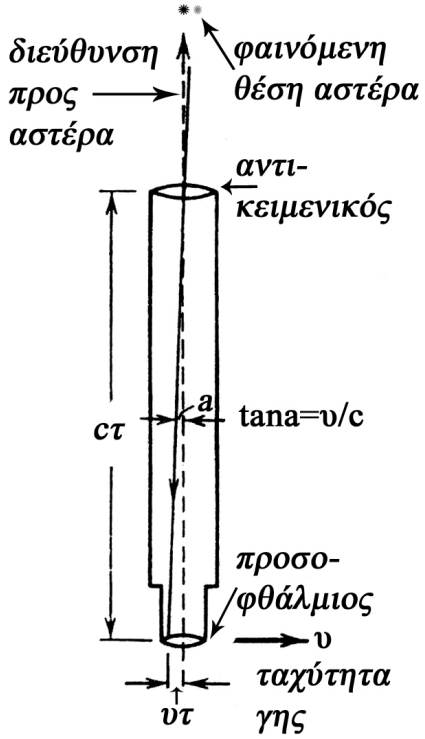
Από το 1825 η σωματιδιακή θεωρία για το φως παύει πλέον να έχει οπαδούς. Στα 1849 ο Armant Louis Fizeau (1819 – 1896) με πειράματά του στη γη, αποδεικνύει ότι η ταχύτητα του φωτός είναι $315.300\,\mathrm{km/s}$. Επίσης στις 6 Μαΐου του 1850 ο Foucault με αναφορά του στην Ακαδημία Επιστημών, παρουσιάζει αποτελέσματα που αποδεικνύουν ότι η ταχύτητα του φωτός στο κενό είναι μεγαλύτερη από ότι στο νερό, αποτέλεσμα, που ήταν εντελώς αντίθετο από αυτό που προέκυπτε με βάση τις υποθέσεις της σωματιδιακής θεωρίας.

Την εποχή αυτή αναπτύσσεται πειραματικά σε μεγάλο βαθμό και ο ηλεκτρισμός με πρωτοπόρους τους: Michael Faraday (1791 – 1867) , Karl Friedrich Gauss (1777 – 1855) και André Marie Ampère (1775 – 1836). Ο Faraday για πρώτη φορά συνδέει το φως με τα ηλεκτρομαγνητικά φαινόμενα. Ο James Clark Maxwell (1831 - 1879) περί τη δεκαετία 1860-1870 συνθέτει τα υπάρχοντα μέχρι τότε πειραματικά δεδομένα του ηλεκτρομαγνητισμού και παράγει τις περίφημες εξισώσεις του. Το συμπέρασμα στο οποίο καταλήγει είναι το εξής: Το φως είναι μια εγκάρσια ηλεκτρομαγνητική διαταραχή, η οποία με μορφή κύματος διαδίδεται μέσω του 'αιθέρα'. Η ταχύτητα του φωτός όπως προέκυπτε από την εξίσωση κύματος για το κενό, είχε τη μορφή: $\upsilon = 1/\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}$, όπου ε_0, μ_0 οι αντίστοιχες ηλεκτρικές και μαγνητικές του σταθερές του. Δεδομένου ότι οι τελευταίες ήταν πειραματικά προσδιορισμένες, από την αντικατάστασή τους στην τελευταία σχέση, προέκυψε το εκπληκτικό αποτέλεσμα ότι: $\upsilon \equiv c \simeq 300.000\,\mathrm{km/s}$. Δηλ. ότι επρόκειτο για την ταχύτητα του φωτός στο κενό. Το 1888 ο Heinrich Rudolf Hertz (1857 – 1894), δημοσιεύει πειραματικά αποτελέσματα που επιβεβαιώνουν τη θεωρία του Maxwell.

Η αποδοχή του αιθέρα σαν μέσου διάδοσης των κυμάτων του φωτός, είχε σαν αποτέλεσμα – όπως ήδη αναφέραμε – το να του αποδοθούν από τους ερευνητές διάφορες φυσικές ιδιότητες. Εφόσον π.χ. κατά προσέγγιση ήταν γνωστά το μέσο μήκος κύματος και η ταχύτητα του φωτός, μπορούσαν να υπολογίσουν την συχνότητα διαταραχής, που ήταν της τάξης του 10^{15} Hz. Για να μπορεί όμως ο αιθέρας να υποστηρίξει τη διάδοση διαταραχών με τέτοιες συχνότητες, θα έπρεπε οι δυνάμεις επαναφοράς κατά την ταλάντωσή του να ήταν πολύ μεγάλης κλίμακας. Βασικές απόψεις για τη φύση του προτάθηκαν κατά τη διάρκεια της μελέτης των φαινομένων της λεγόμενης Οπτικής των κινουμένων σωμάτων. Τα πειράματά της συνέβαλλαν ουσιαστικά στη διευκρίνιση των 'ιδιοτήτων' του και τελικά – όπως θα δούμε στα επόμενα – στην απόρριψή του.

Ένα από αυτά ήταν που αφορούσε το λεγόμενο 'αστρικό σφάλμα' (stellar aberration) ή 'σφάλμα του φωτός' (aberration of light). Το 1725 ο James Bradley (1693 – 1762), προσπαθούσε να υπολογίσει την απόσταση των αστέρων με τη μέ-

θοδο του τριγωνισμού. Δηλ. στηριζόμενος στον εντοπισμό τους σε διαφορετικές χρονικές στιγμές, δεδομένης της κίνησης της γης στην τροχιά της γύρω από τον ήλιο. Στην διάρκεια των μετρήσεών του έκανε την εξής σημαντική παρατήρηση: Ότι οι υποτιθέμενοι ακίνητοι αστέρες στον ουράνιο θόλο δεν βρίσκονται στην πραγματική τους θέση αλλά προκειμένου να ειδωθούν, θα πρέπει οι άξονες των τηλεσκοπίων να στραφούν κατά μία γωνία σε σχέση με τη διεύθυνση του διανύσματος υ της ταχύτητας περιστροφής της γης περί τον ήλιο. Υπολόγισε μάλιστα αυτή τη γωνία. Το φαινόμενο αυτό εκδηλώνεται ως εξής: Οι ακτίνες του φωτός από ένα συγκεκριμένο αστέρα διαδιδόμενες μέσω του 'αιθέρα', 'κάμπτονται' κατά την πορεία τους μέχρι να φθάσουν στο μάτι του παρατηρητή. Η κάμψη αυτή σήμερα μπορεί να δικαιολογηθεί ως εξής (Σχ. 1.1): Υποθέτουμε π.χ. ότι η πραγματική διεύθυνση ενός



(Σχ. 1.1)

αστέρα (τον οποίο παρατηρούμε μέσω ενός τηλεσκοπίου) είναι κάθετη στο επίπεδο που σχηματίζει η γη κατά την περιστροφή της περί τον ήλιο. Δηλ. η γωνία μεταξύ της διεύθυνσης που σκοπεύει τον αστέρα και του διανύσματος υ της ταχύτητας περιστροφής της γης περί τον ήλιο είναι $\pi/2$ καθ' όλη τη διάρκεια του έτους. Με τη βοήθεια μόνο του αντικειμενικού φακού, εστιάζουμε τον αστέρα στο κέντρο του εστιακού του επιπέδου, προσανατολίζοντας απλά τον άξονά του τηλεσκοπίου. Τότε οι ακτίνες θα πέφτουν κάθετα στον αντικειμενικό φακό δηλ. παράλληλα με τον άξονά του. Κατόπιν τοποθετούμε τον προσοφθάλμιο. Όπως βλέπουμε από το σχήμα,

κατά τη διάρκεια του χρόνου τ που χρειάζεται το φως για να καλύψει την απόσταση $c\tau$ (αντικειμενικού – προσοφθαλμίου) το τηλεσκόπιο (μαζί με τη γη) θα κινηθεί κατά την απόσταση $\upsilon\tau$ στη διεύθυνση του $\boldsymbol{\upsilon}$. Το αποτέλεσμα θα είναι το εξής: Το είδωλο του αστέρα δεν θα βρίσκεται στο κέντρο του προσοφθαλμίου αλλά θα είναι μετατοπισμένο. Προκειμένου το είδωλο να βρεθεί στο κέντρο του, ο άξονα του τηλεσκοπίου θα πρέπει να στραφεί (περί άξονα κάθετο στο σχήμα μας και δεξιόστροφα) κατά μια γωνία a η οποία θα υπακούει στη σχέση $\tan \mathrm{a} = \upsilon/c$. Στο γεγονός αυτό οφείλεται το ότι μέσω του τηλεσκοπίου δεν βλέπουμε την πραγματική αλλά τη φαινόμενη θέση ενός αστέρα. Είναι εύκολα κατανοητό ότι οι φαινόμενες θέσεις (σε σχέση με την πραγματική) για ένα αστέρα (που φαίνεται σε διεύθυνση κάθετη στο επίπεδο περιστροφής της γης) και για παρατηρήσεις από διάφορες θέσεις της γης κατά την κίνησή της γύρω από τον ήλιο, θα βρίσκονται πάνω σ' ένα κύκλο. Ο Bradley από αστρονομικές παρατηρήσεις, υπολόγισε ότι: $\mathrm{a} \simeq 20,45''$. Τότε με τη βοήθεια της σχέσης $\tan \mathrm{a} = \upsilon/c$ γνωρίζοντας τη υ, βρήκε ότι: $c \simeq 303.000\,\mathrm{km/s}$.

Το 'αστρικό σφάλμα' ήταν επόμενο ν' αποτελέσει αντικείμενο προσπάθειας ερμηνείας του, με βάση τις επικρατούσες σωματιδιακή και κυματική θεωρία. Και οι δύο πέτυχαν του σκοπού τους, αλλά η δεύτερη έθετε σαν προϋπόθεση ότι η γη κινείται σε σχέση με τον ακίνητο 'αιθέρα', ή ισοδύναμα ότι ο 'αιθέρας' κινείται σε σχέση με την ακίνητη γη. Το αν η κίνηση της γης μέσω του 'αιθέρα' επηρεάζει με παρατηρήσιμο τρόπο το φως που προέρχεται από πηγές πάνω στη γη ή βρίσκονται στον εξωδιαστημικό χώρο, ασχολήθηκε πειραματικά ο Arago. Επιβεβαίωσε ότι δεν υφίστανται διαφορές, με την προϋπόθεση ότι η γη θα πρέπει να θεωρηθεί ακίνητη σε σχέση με το κινούμενο 'αιθέρα'. Στην προσπάθειά του ο Fresnel να ερμηνεύσει το 'αστρικό σφάλμα' με βάση την κυματική θεωρία, υπέθεσε ότι οι ακτίνες του φωτός κάμπτονται μερικώς (παρασύρονται) όταν διέρχονται από ένα διαφανές μέσο (όπως ήταν ο 'αιθέρας') που βρίσκεται σε κίνηση. Η θεωρία αυτή επιβεβαιώθηκε από τα πειράματα του Fizeau (φως που περνάει από κινούμενα δοχεία με νερό) και του George Biddell Airy (1801 – 1892) (παρατήρηση αστέρων μέσω τηλεσκοπίου το οποίο ήταν γεμάτο με νερό). Ο Hendrik Anton Lorentz (1853 – 1928), υποθέτοντας ότι ο 'αιθέρας' βρίσκεται σε απόλυτη ακινησία παρουσιάζει μια θεωρία που καλύπτει τις ιδέες του Fresnel. Το 1879 ο Maxwell εισηγείται μια διαδικασία με την οποία θα μπορούσε να μετρηθεί η ταχύτητα με την οποία το ηλιακό σύστημα κινείται σε σχέση με τον 'αιθέρα'. Στηριζόμενος σ' αυτές τις απόψεις ο Albert Abraham Michelson (1852 – 1931) λίγα χρόνια αργότερα, πειραματίζεται με σκοπό να υπολογίσει κατά πόσο το φως επηρεάζεται από την κίνηση της γης μέσα στον 'αιθέρα'. Συγκεκριμένα επειδή η ταχύτητα του φωτός κατά τη διάδοσή του στον 'αιθέρα' είναι σταθερή και η γη κινείται σε σχέση μ' αυτόν, η ταχύτητα του φωτός μετρούμενη σε σχέση με τη γη, θα επηρεαζόταν από την κίνησή της. Τα αποτελέσματά του τα

οποία δημοσιεύτηκαν το 1881 έδειξαν ότι δεν υφίσταται μετρήσιμη κίνηση της γης σε σχέση με τον 'αιθέρα'. Το εκπληκτικό όμως αυτό αποτέλεσμα δεν προβλήθηκε ικανοποιητικά συνεπικουρώντας του γεγονότος ότι ο Lorentz ανακάλυψε στους υπολογισμούς του ορισμένα σφάλματα. Ο Michelson επανέλαβε τα πειράματά του με τη βοήθεια του Edward Williams Morley (1838 – 1923) και με όργανα πολύ μεγαλύτερης ακρίβειας (πρόκειται για το περίφημο συμβολόμετρο του Michelson). Τα αποτελέσματά τους – τα οποία δεν μπορούσαν ν' αμφισβητηθούν από απόψεως ακρίβειας – δημοσιευμένα το 1887 οδηγούσαν στα ίδια συμπεράσματα: Ουδεμία σχετική κίνηση υφίσταται μεταξύ γης και 'αιθέρα'. Το γεγονός αυτό βέβαια απέκλειε τη δυνατότητα να ερμηνευθεί το 'αστρικό σφάλμα' με τις απόψεις του Fresnel. Αυτός ήταν ο λόγος που το 1899 ο Poincaré απορρίπτει για πρώτη φορά την έννοια του 'αιθέρα'.

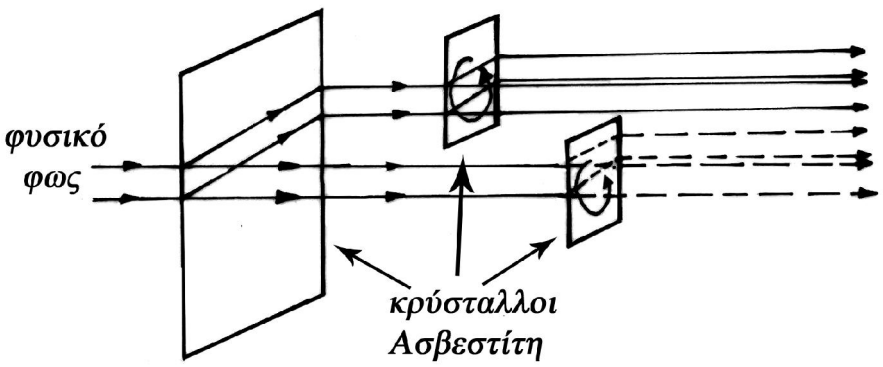
Το 1905 ο Albert Einstein (1879 – 1955) εισάγει την 'Ειδική Θεωρία της Σχετικότητας' όπου δεν υφίσταται η έννοια του 'αιθέρα'. Κατά τον ίδιο: 'Το φως διαδίδεται στον κενό χώρο με μια πεπερασμένη ταχύτητα ίση με c η οποία είναι ανεξάρτητη από την κατάσταση κίνησης της εκπέμπουσας πηγής'. Έκτοτε την έννοια του αιθέρα (απόλυτο σύστημα συντεταγμένων), την αντικαθιστά η έννοια του πεδίου. Το ηλεκτρομαγνητικό πεδίο αποκτά δική του οντότητα και τα πειράματα των Michelson- Morley, Fizeau και Airy ερμηνεύονται με την σχετικιστική κινηματική. Την 19 Οκτωβρίου του 1900 ο Max Karl Ernst Ludwig Planck (1858 – 1947) θέτει τις βάσεις αυτού που αργότερα θα ονομαστεί Κβαντομηχανική. Πρόκειται για τη θεωρία που θ' ασχοληθεί κυρίως με τα υποατομικά φαινόμενα. Το 1905 ο Einstein δέχεται τη κβαντική φύση του φωτός. Πρόκειται για μια καινούργια άποψη της σωματιδιακής θεωρίας για το φως βασισμένης στη κβάντωση του Η/Μ πεδίου. Το φως αποτελείται από 'σωματίδια' ενέργειας (quanta ενέργειας) τα γνωστά φωτόνια, με ενέργεια το καθένα $\mathcal{E} = h\nu$ όπου h η λεγόμενη σταθερή του Planck. Με βάση αυτές τις απόψεις ήταν δυνατόν να περιγραφούν πολλά φαινόμενα όπως π.χ. του φθορισμού, το φωτοηλεκτρικό φαινόμενο κ.λ.π., τα οποία αδυνατούσε να ερμηνεύσει η κυματική θεωρία.

Σε γενικές γραμμές η σχετικιστική περιγραφή, απάλλαξε το φως από τον 'αιθέρα' και απέδειξε τη συγγένεια μεταξύ της μάζας και της ενέργειας μέσω της σχέσης $\mathcal{E} = mc^2$ της ειδικής θεωρίας της σχετικότητας. Δηλ. τον 'σωματιδιακό' του χαρακτήρα. Με την πρόοδο του χρόνου επίσης έγινε προφανές ότι οι απόψεις περί σωματιδίων και κυμάτων οι οποίες μακροσκοπικά ήταν αμοιβαία αποκλειόμενες, στον μικρόκοσμο θα μπορούσαν να 'συγχωνευτούν'. Πράγματι πειράματα έδειξαν ότι 'σωματίδια' εκτός των φωτονίων, όπως ηλεκτρόνια, νετρόνια κ.λ.π. έδιναν φαινόμενα συμβολής και περίθλασης, γεγονός που δεν απέκλειε και τον κυματικό τους χαρακτήρα. Πράγματι η κβαντομηχανική απέδειξε ότι σωματίδια (ανεξάρτητα αν

διαθέτουν μάζα ηρεμίας ή όχι) που η ορμή τους είναι p, συνδέονται με ένα κύμα του οποίου το μ.κ. λ δίνεται μέσω της σχέσης: $p = h/\lambda$.

2) Ιστορικά στοιχεία που αφορούν την ανακάλυψη και την προσπάθεια ερμηνείας του φαινομένου της πόλωσης του φωτός, με βάση τις επικρατούσες θεωρίες

Το θεμελιώδες φαινόμενο – αν όχι το καθοριστικότερο – που συνεισέφερε στην κατανόηση της φύσης του φωτός, είναι αυτό της ***πόλωσης***. Η ανακάλυψή του βασίζεται στο φαινόμενο της διπλής διάθλασης του φωτός μέσω της Ισλανδικής κρυστάλλου (Ασβεστίτη), και διαπιστώθηκε πειραματικά για πρώτη φορά από τον Erasmus Bartholinus (1625 – 1698) το 1669. Δέσμη φωτός που προσπίπτει στον κρύσταλλο, διαχωρίζεται στο εσωτερικό του σε δύο και κατά την έξοδό τους από αυτόν διαδίδονται παράλληλα. Ο Huygens το 1690, εξέτασε πειραματικά (Σχ. 2.1)



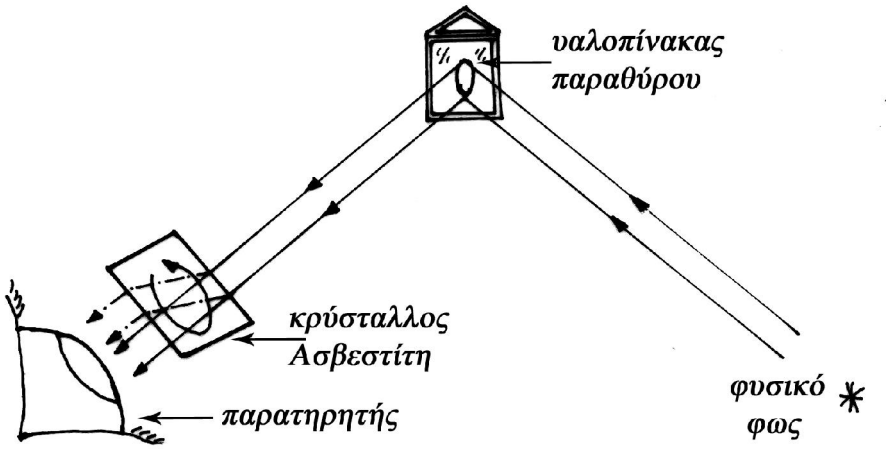
(Σχ. 2.1)

την καθεμιά από τις δύο δέσμες που προέκυπταν από έναν πρώτο κρύσταλλο Ασβεστίτη (όταν σ' αυτόν έπεφτε μια δέσμη φωτός), μ' έναν δεύτερο κρύσταλλο πανομοιότυπο με τον πρώτο. Διαπίστωσε ότι όταν ο δεύτερος κρύσταλλος περιστρεφόταν γύρω από τον άξονα που ταυτιζόταν με οποιαδήποτε από τις δύο δέσμες που προερχόταν από τον πρώτο κρύσταλλο, παρατηρούνταν κατάσβεση διαδοχικά εκάστης των δύο αναδυόμενων από τον δεύτερο κρύσταλλο. Μάλιστα οι κατασβέσεις απαντούνταν σε ορθογώνιες μεταξύ τους θέσεις του δευτέρου κρυστάλλου, εξ' ου και ένα είδος 'ορθογωνιότητας' μεταξύ των δύο αυτών δεσμών.

Η πρότασή του – που αφορούσε την προσπάθεια ερμηνείας του φαινομένου της διπλής διάθλασης του φωτός – ήταν ότι μετά την πρόσπτωσή του στην επιφάνεια του κρυστάλλου, από κάθε σημείο της, δεν αναπτυσσόταν πλέον στο εσωτερι-

κό του μόνο σφαιρικά κυματίδια, αλλά ταυτόχρονα και άλλα ελλειψοειδούς μορφής. Ο Newton προκειμένου να ερμηνεύσει το ίδιο φαινόμενο με βάση την σωματιδιακή θεωρία, αντέταξε την ιδέα ότι οι ακτίνες του φωτός αποκτούν 'πλευρές' (sides) (δηλ. 'πλατύνονται'), δεδομένου ότι απέδωσε στα σωματίδια που τις συγκροτούν ασυμμετρία ως προς τις διαστάσεις τους. Η εμφανιζόμενη 'ορθογωνιότητα' που αναδύθηκε από το πείραμα του Huygens αποτέλεσε γι' αυτόν μια σοβαρή αντίρρηση όσον αφορά την αποδοχή της κυματικής θεωρίας για το φως. Πράγματι την εποχή εκείνη σαν κύματα εννοούσαν μόνο τα ηχητικά και τα υδάτινα τα οποία βέβαια ήταν επιμήκη (δηλ. οι διαταραχές του μέσου, γινόταν κατά τη διεύθυνση διάδοσης του κύματος). Τέτοιου είδους κύματα, δεν θα μπορούσαν με κανένα τρόπο να ερμηνεύσουν την 'ορθογωνιότητα' των κυμάτων του φωτός. Πιστευόταν δηλ. ότι τα κύματα του φωτός – αν υπήρχαν – θα ήταν παρόμοια με τα ηχητικά.

Όπως όμως ήδη αναφέραμε, στις αρχές του 19^{ου} αιώνα, ο Young μεταξύ των ετών 1801 – 1803, με τις τρεις διαλέξεις του στη Βασιλική Ακαδημία του Λονδίνου, τόνωσε το ενδιαφέρον γύρω από την κυματική θεωρία. Μάλιστα εκτέλεσε ένα από τα σημαντικότερα πειράματα της Οπτικής, που αφορούσε στη συμβολή δύο δεσμών φωτός . Το πείραμα ήταν πολύ απλό και συνίστατο στην επαλληλία δύο δεσμών φωτός σ' ένα πέτασμα, που προερχόταν από ένα διάφραγμα

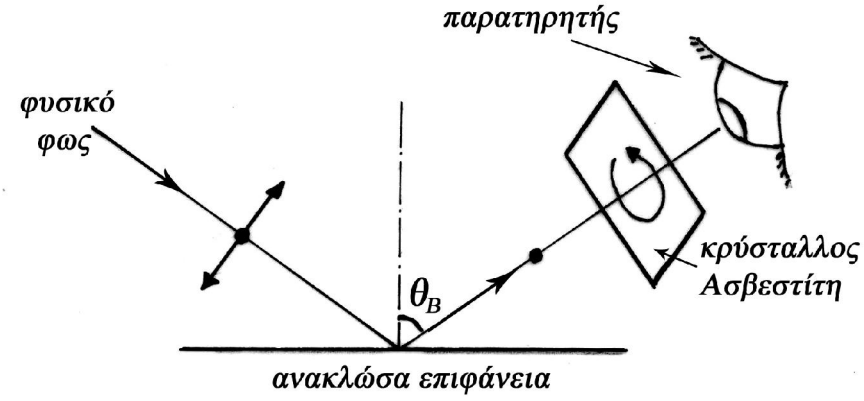


(Σχ. 2.2)

με δύο κυκλικά ανοίγματα, το οποίο φωτιζόταν με τη σειρά του από μία μοναδική πηγή. Αποτέλεσμα ήταν η εμφάνιση στο πέτασμα κροσσών συμβολής. Η εν πολλοίς όμως – με κυματικούς όρους – ποιοτική ερμηνεία του πειράματος, δεν έγινε αποδεκτή. Το 1809 ο Malus (αξιωματικός του Γαλλικού στρατού) έκανε μια σημαντική ανακάλυψη, παρατηρώντας δια μέσου ενός κρυστάλλου Ασβεστίτη τα είδωλα που προερχόταν μέσω της ανάκλασης του φωτός στα τζάμια των παραθύ-

ρων του Palais de Luxembourg στο Παρίσι (Σχ. 2.2). Περιστρέφοντας τον κρύσταλλο, είδε ότι τα δύο είδωλα (λόγω του φαινομένου της διπλής διάθλασης του φωτός) σχεδόν κατασβηνόταν διαδοχικά και μάλιστα σε ορθογώνιες θέσεις. Η ερμηνεία που έδωσε στηριζόταν στη σωματιδιακή θεωρία του Newton με το δεδομένο της δομής που εμφάνιζαν τα τελευταία σε μια διεύθυνση. Υπέθεσε ότι η προσπίπτουσα στον κρύσταλλο δέσμη φωτός περιλαμβάνει τυχαία προσανατολισμένα σωματίδια. Καθώς όμως αυτά περνούν δια μέσου του, προσανατολίζονται σε δύο κυρίαρχες διευθύνσεις. Σε αναλογία με τα μαγνητικά δίπολα, ο Malus πρότεινε ότι τα σωματίδια από τα οποία αποτελούνταν οι ακτίνες του φωτός, έχουν 'πόλους'. Για το λόγο αυτό αποκάλεσε το 'προσανατολισμένο αυτό φως', ***πολωμένο φως***.

Ένα άλλο πολύ ενδιαφέρον πείραμα που εκτελέστηκε από τον Sir David Brewster (1781 – 1868) το 1812, αφορούσε την μελέτη της συμπεριφοράς του φωτός που ανακλάται από τις γυάλινες επιφάνειες. Ανακάλυψε ότι όταν το φως ανακλάται από μια επίπεδη επιφάνεια (Σχ. 2.3), σε συγκεκριμένη γωνία (η γωνία



(Σχ. 2.3)

αυτή ονομάζεται τις μέρες μας γωνία Brewster θ_B), τότε η ανακλώμενη παρουσιάζει ιδιομορφία, σε σχέση με το αν η γωνία πρόσπτωσης ήταν μια οποιαδήποτε άλλη. Πράγματι για τυχαία γωνία πρόσπτωσης, ο έλεγχος της ανακλώμενης κατά τη δίοδό της μέσω ενός κρυστάλλου Ασβεστίτη, έδινε δύο δέσμες φωτός (λόγω της διπλής διάθλασης). Κατά την περιστροφή όμως του κρυστάλλου, οι εντάσεις των δεσμών αυξομειωνόταν χωρίς όμως οποιαδήποτε από αυτές να κατασβησθεί. Για μια όμως συγκεκριμένη γωνία πρόσπτωσης θ_B, η ανακλώμενη (που κατά τα γνωστά ανακλάται με την ίδια γωνία ως προς την κάθετη στο σημείο πρόπτωσης), έδινε μέσω του κρυστάλλου δύο δέσμες οι οποίες όμως κατά την περιστροφή του, εκάστη διαδοχικά κατασβήνονταν πλήρως. Για την συγκεκριμένη αυτή περίπτω-

ση, ο Brewster διαπίστωσε ένα σημαντικό γεγονός: Ότι υφίσταται απλή σχέση μεταξύ της θ_B και του δείκτη διάθλασης της γυάλινης επιφάνειας. Ήταν η πρώτη φορά που μπόρεσε να γίνει προσδιορισμός του δ.δ. ενός υλικού μέσω του φαινομένου της ανάκλασης και όχι της διάθλασης.

3) Περιγραφή των καταστάσεων πόλωσης, μέσω του πλάτους ή της έντασης του φωτός

Όπως είχαμε αναφέρει, περί το 1825 η σωματιδιακή θεωρία για το φως είχε πάψει πλέον να έχει οπαδούς. Η κυματική θεωρία του Fresnel και αυτών που την υποστήριζαν, έχαιρε πλήρους αποδοχής δεδομένου ότι με τη βοήθειά της μπορούσαν να εξηγηθούν πλείστα όσα φαινόμενα από τις περιοχές της Οπτικής όπως: Της συμβολής, της περίθλασης και της πόλωσης του φωτός. Ο ίδιος ο Fresnel εφάρμοσε με επιτυχία την κυματική θεωρία για να ερμηνεύσει τη διάδοση του φωτός στα ανισότροπα υλικά δηλ. τους κρυστάλλους, καθώς και στα οπτικά ενεργά υλικά. Επίσης το 1851 έγινε από τον Fizeau ένα σημαντικό πείραμα που αποδείκνυε ότι η ταχύτητα του φωτός σε οπτικά πυκνότερο μέσο ήταν μικρότερη από ότι στο κενό γεγονός που αποτελούσε συμπέρασμα της κυματικής θεωρίας και ερχόταν σε αντίθεση με την σωματιδιακή η οποία προέβλεπε το αντίθετο. Εντούτοις μέχρι το 1852 στην κυματική θεωρία υπέβοσκε μια κρίση, της οποίας οι ρίζες αναγόταν αρκετά χρόνια πριν – περί το 1817 – και αφορούσε μάλιστα τον ίδιο τον Fresnel που την είχε θεμελιώσει.

Πράγματι εκείνη την εποχή ο Fresnel και ο συνάδελφός του Arago είχαν εκτελέσει μια σειρά πειραμάτων που αφορούσαν την επίδραση της πόλωσης στο πείραμα συμβολής του Young. Τι δεδομένη όμως χρονική περίοδο για την κυματική θεωρία, η διάδοση του φωτός θεωρούνταν ότι γινόταν με την βοήθεια των επιμηκών διαταραχών του 'αιθέρα', γεγονός το οποίο ήταν αδύνατο να ερμηνεύσει τα πειραματικά τους αποτελέσματα. Η συζήτηση των αποτελεσμάτων τους με τον Young, είχε σαν αποτέλεσμα ο τελευταίος ν' απορρίψει την άποψη περί επιμηκών διαταραχών του 'αιθέρα' και να υιοθετήσει αντί αυτών τις εγκάρσιες. Πρότεινε δηλ. ότι τα κύματα του φωτός διαδίδονται μέσω εγκαρσίων διαταραχών του 'αιθέρα' και συνίστανται από δύο ορθογώνιες συνιστώσες με την τρίτη (κατά τη διεύθυνση της διάδοσης) να είναι μηδενική. Η πρόταση αυτή αποτέλεσε σημαντική ερμηνευτική διέξοδο, όχι όμως – όπως θα δούμε στα επόμενα – και καταλυτική. Και ο λόγος ήταν ο εξής:

Τα προαναφερόμενα πειραματικά αποτελέσματα κατέληξαν σ' αυτό που σήμερα είναι γνωστό σαν οι τέσσερις νόμοι των Fresnel – Arago. Προκειμένου ο Fresnel να τους περιγράψει μαθηματικά, χρησιμοποίησε την προτεινόμενη από τον Young κυματική θεωρία για τις εγκάρσιες διαταραχές του ***πλάτους*** των κυμά-

των. Με βάση τη θεωρία αυτή, οι τέσσερις νόμοι μπορούσαν να εκφραστούν αλλά με την προϋπόθεση ότι το χρησιμοποιούμενο φως ήταν πλήρως πολωμένο. Δηλ. συνιστούσαν μια από τις καταστάσεις όπως: Το γραμμικά, το κυκλικά ή το εν γένει ελλειπτικά πολωμένο φως. Όμως τα πειράματά τους είχαν διεξαχθεί ως επί το πλείστον με φυσικό φως (μη πολωμένο) ή με μερικά πολωμένο (δηλ. μίγμα φυσικού και μιας εκάστης των προαναφερόμενων καταστάσεων πόλωσης). Επομένως ο Fresnel ήταν υποχρεωμένος να περιγράψει με μαθηματικό τρόπο το μη πολωμένο φως. Παρά τις μεγάλες του όμως προσπάθειες το τελευταίο ήταν αδύνατον να επιτευχθεί με βάση την κατά πλάτος περιγραφή των κυμάτων. Ο πρόωρος θάνατός του το 1827, έδωσε τη σκυτάλη της επίλυσης του προβλήματος στους διαδόχους του, με τα ίδια όμως αποτελέσματα. Ούτε βέβαια μέχρι τις μέρες μας μπόρεσε να επιτευχθεί. Στο γεγονός αυτό συνίστατο η κρίση που αφορούσε την κυματική θεωρία, η οποία δεν ήταν δυνατόν να εκφράσει – με βάση την περιγραφή των κυμάτων κατά πλάτος – το φυσικό και το μερικά πολωμένο φως και κατά προέκταση τους νόμους των Fresnel – Arago.

Την 'χαμένη τιμή' της κυματικής θεωρίας για το φως, έσωσε ο Sir George Gabriel Stokes (1819 – 1903) με τη δημοσίευση το 1852 της περίφημης για την κλασσική οπτική εργασίας του με τίτλο: 'On the Composition and Resolution of Streams of Polarized Light from Different Sources'. Στο άρθρο αυτό ο Stokes εγκαταλείπει την άκαρπη προσπάθεια περιγραφής των κυμάτων με βάση το πλάτος τους και προσφεύγει σ΄ ένα πειραματικό ορισμό των διαφόρων καταστάσεων πόλωσης, συμπεριλαμβανομένων όμως του φυσικού και των μερικά πολωμένων φώτων. Δηλ. οδηγείται σε μια διατύπωση των πολωμένων φώτων με βάση μια μετρίσιμη ποσότητα που δεν είναι άλλη παρά η ***ένταση του φωτός***. Παρεμπιπτόντως αναφέρουμε ότι μετρήσεις του πλάτους των διαταραχών στην περιοχή του ορατού φωτός με κοινούς ανιχνευτές είναι αδύνατη, δεδομένης της υψηλής τους συχνότητας ($\simeq 10^{15}$ Hz). Στην εργασία του ο Stokes, σαφώς πλέον αποδεικνύει ότι όλες οι καταστάσεις πόλωσης του φωτός συμπεριλαμβανομένων και του φυσικού και μερικά πολωμένου φωτός, μπορούν να περιγραφούν μαθηματικά (στα πλαίσια της κυματικής θεωρίας) με τη βοήθεια μετρήσεων έντασης. Οι μετρήσεις αυτές οδηγούν στον προσδιορισμό τεσσάρων μεγεθών που ονομάζονται παράμετρες Stokes. Με τη βοήθειά τους, χαρακτηρίζονται όλα τα στοιχεία οποιασδήποτε κατάστασης πόλωσης (δηλ. η ελλειπτικότητα, το αζιμούθιο και η στροφικότητά της). Επίσης με βάση αυτές τις παραμέτρους, είναι δυνατή η μαθηματική έκφραση των νόμων της συμβολής των Fresnel – Arago.

Παρά το ότι η προαναφερόμενη εργασία του Stokes κατέληγε σε σαφώς σημαντικά συμπεράσματα όσον αφορά την περιγραφή και την ερμηνεία της πόλωσης του φωτός, εντούτοις δεν έτυχε ιδιαίτερης προβολής από τον ίδιο τον συγγραφέα. Παρατηρείται δηλ. μια επιφύλαξη, όσον αφορά τις εφαρμογές τις οποίες

θα μπορούσε να έχει. Ο λόγος για τον ίδιο ήταν πραγματικός και εξηγείται από τα πειραματικά αποτελέσματα που περιλαμβάνονται σε μια δεύτερη εργασία του, που δημοσιεύτηκε δύο μήνες αργότερα (δηλ. το Μάιο του 1852). Ο τίτλος της ήταν: 'On the Change of the Refrangibility of Light'. Το ερευνητικό της αντικείμενο ήταν ο φθορισμός των διαλυμάτων. Μετά από μια τεράστια ερευνητική προσπάθεια ο Stokes κατέληξε στο γνωστό νόμο που φέρει και το όνομά του. Ότι δηλ. 'το μήκος κύματος της φθορίζουσας ακτινοβολίας, είναι μεγαλύτερο από εκείνης που προκάλεσε το φθορισμό'. Ήταν η πρώτη από μια σειρά εργασίες, που 75 χρόνια αργότερα, θα οδηγούσε – όπως ήδη αναφέραμε – στην Κβαντομηχανική άποψη για το φως. Αυτός ήταν ο λόγος που για 50 περίπου χρόνια – μέχρι το θάνατό του το 1903 – δεν μπόρεσε να ερμηνεύσει το ιδιάζον αυτό φαινόμενο με βάση την κλασσική Οπτική και μάλιστα την κυματική θεωρία του φωτός. Η ερμηνεία του φθορισμού, προτάθηκε δύο χρόνια αργότερα – το 1905 – από τον Einstein στην εργασία του 'On the Heuristic Point of View Concerning the Generation and Conversion of Light'. Βάση της θεωρίας αποτέλεσε η κβαντική υπόθεση για το φως του Planck, δηλ. η φωτονική του φύση. Μετά από αυτά, μπορούμε να κατανοήσουμε το λόγο για τον οποίο ο Stokes στα συμπεράσματα της πρώτης του εργασίας – του Μαρτίου του 1852 – παρά την καταλυτική επιβεβαίωση της κυματικής θεωρίας του φωτός, δεν εξέφρασε ένα δικαιολογημένο ενθουσιασμό.

Αν και οι πολωτικές παράμετρες του Stokes αποτελούν ένα δυναμικό εργαλείο έρευνας και κατανόησης του πολωμένου φωτός, καθώς και της αλληλεπίδρασής του με την ύλη, πρακτικά η εργασία του αγνοήθηκε για το πολύ μεγάλο χρονικό διάστημα του ενός περίπου αιώνα. Η σπουδαιότητά του για πρώτη φορά αναγνωρίστηκε από τον S. Chandrasekhar (1920 –1995) όταν ο τελευταίος χρησιμοποίησε τις παραμέτρους του Stokes το 1940, για να συμπεριλάβει φαινόμενα πόλωσης του φωτός στις εξισώσεις διάδοσης της ακτινοβολίας. Έκτοτε και μέχρι τις μέρες μας, η θεωρία του Stokes χρησιμεύει σαν αρωγός, σε αναρίθμητες εργασίες θεωρητικής και τεχνικής φύσης.

4) Περιοχές εφαρμογών της πόλωσης του φωτός

Πολωσιμετρία (Polarimetry) μπορούμε να ονομάσουμε τον κλάδο της φασματοσκοπίας, στον οποίο διαμεσολαβείτε το φαινόμενο της πόλωσης των Η/Μ ακτινοβολιών, όλων των φασματικών περιοχών. Στην περιοχή αυτή, από την ανακάλυψη της πόλωσης του φωτός μέχρι και σήμερα – που περιλαμβάνει τη χρονική περίοδο τριών περίπου αιώνων – έχουν δημοσιευθεί δεκάδες χιλιάδες εργασίες που αφορούν θεωρητικές μελέτες και εφαρμογές. Κάτω από αυτές τις συνθήκες είναι αδύνατον να δοθεί μια πλήρης και λεπτομερής εικόνα των πεπραγμένων,

αλλά μόνον μια σύνοψη των θεμελιωδών κλάδων. Επιλέξαμε ν' αναφέρουμε τους εξής, οι οποίοι αφορούν στην ορατή περιοχή του Η/Μ φάσματος :

Ελλειψομετρία (Ellipsometry):

Αφορά τη μελέτη των οπτικών ιδιοτήτων των επιφανειών και των ενδοεπιφανειών, για διηλεκτρικά μέταλλα και ημιαγωγούς. Με τη βοήθειά της μπορεί να γίνει ο προσδιορισμός του πάχους λεπτών υμενίων (ισοτρόπων και ανισοτρόπων υλικών), καθώς και των οπτικών τους σταθερών, όπως το πραγματικό και το φανταστικό μέρος του μιγαδικού δ.δ. Επίσης είναι δυνατός ο έλεγχος της μόλυνσης ή της διάβρωσης επιφανειών. Ελλειψομετρικές μέθοδες εφαρμόζονται εκτός του ανακλωμένου και για το διερχόμενο φως.

Φασματική πολωσιμετρία (Spectropolarimetry):

Τα φασματοπολωσίμετρα είναι φασματόμετρα τα οποία κατά περίπτωση χρησιμοποιούνται σε συνδυασμό με πολωτικά στοιχεία. Σκοπός τους είναι η μέτρηση των πολωτικών ιδιοτήτων διαφόρων υλικών σαν συνάρτηση του μ.κ. Είναι γνωστό ότι τα φασματόμετρα μπορούν να μετρήσουν την ανακλαστικότητα ή τη διαπερατότητα των υλικών. Τα φασματοπολωσίμετρα αντίστοιχα είναι σε θέση να μετρήσουν: Το διχρωισμό (dichroism – diattenuation), τη γραμμική διπλοθλαστικότητα (linear retardance), την οπτική ενεργότητα (circular retardance), την αποπόλωση (depolarization) κ.τ.λ., όλα τα παραπάνω σαν συνάρτηση του μ.κ. Πράγματι π.χ. για τον κλάδο της φυσικοχημείας, τα φάσματα του γραμμικού διχρωισμού και της γραμμικής διπλοθλαστικότητας μπορούν να δώσουν πληροφορίες που αφορούν τον προσανατολισμό των ηλεκτρικών διπολικών ροπών των μορίων. Με τον ίδιο τρόπο, τα φάσματα του κυκλικού διχρωισμού και της οπτικής ενεργότητας, αφορούν τη μαγνητική διπολική ροπή των μορίων.

Κατόπτευση από απόσταση (Remote sensing):

Είναι αποδεδειγμένο ότι η φασματική πολωσιμετρία, αυξάνει κατά πολύ το πληροφοριακό περιεχόμενο το οποίο μπορεί να ληφθεί μέσω της κλασσικής φασματοσκοπίας. Το αποτέλεσμα αυτό χρησιμοποιείται τα μέγιστα για παρατηρήσεις από απόσταση, φαινομένων στα οποία διαμεσολαβείτε η πόλωση του φωτός. Από τα βασικότερα είναι η σκέδαση του ηλιακού φωτός από τα μόρια της ατμόσφαιρας, τα αερολύματα και άλλα μικροσωματίδια. Αυξημένος βαθμός πόλωσης, εμφανίζεται και από τη σκέδαση του προσπίπτοντος φωτός στις 'οροφές' των δα-

σών και των λιβαδιών. Επίσης ισχυρή πόλωση του φωτός προκύπτει και από την ανάκλασή του από τις υδάτινες επιφάνειες. Τα φαινόμενα αυτά έχουν σχέση με τις γωνίες πρόσπτωσης του φωτός, τις γωνίες σκέδασης, το μ.κ., τον καιρό, την εποχή, την υγρασία, τη βροχή κ.τ.λ. Εργαλείο μελέτης των προαναφερόμενων, αποτελεί η φασματική πολωσιμετρία. Θα πρέπει ν' αναφερθεί βέβαια ότι το φαινόμενο της σκέδασης του φωτός – αυτό καθ' εαυτό – αποτελεί εκτεταμένο κεφαλαίο της θεωρητικής Οπτικής, δεδομένου ότι αφορά τον προσδιορισμό των κατανομών στο χώρο, των πλατών και των καταστάσεων πόλωσης, των σκεδαζόμενων Η/Μ ακτινοβολιών από διάφορα αντικείμενα.

Αστρονομική πολωσιμετρία:

Τα τελευταία χρόνια η πολωσιμετρία χρησιμοποιήθηκε τα μέγιστα για τον προσδιορισμό των μαγνητικών πεδίων του ηλίου. Οι ηλιακοί μαγνητογράφοι είναι απεικονιστικά πολωσίμετρα που συνδυαζόμενα με φίλτρα πολύ στενής φασματικής περιοχής, μπορούν να μετρήσουν τη λεπτή υφή των φασματικών γραμμών (φαινόμενο Zeeman). Η λεπτή υφή των φασματικών γραμμών, καθώς και οι καταστάσεις πόλωσής τους, προέρχονται από τη δράση του μαγνητικού πεδίου στα ιονισμένα άτομα π.χ. της χρωμόσφαιρας του ηλίου. Πλείστες όσες άλλες παρατηρήσεις (μέσω του φαινομένου της πόλωσης) μπορούν να γίνουν σε πλανήτες, αστέρες και άλλα αντικείμενα του διαστήματος, που αποφέρουν πλούσιες πληροφορίες όσον αφορά την φυσική τους κατάσταση.

Οπτική - πολωτική μετρολογία (Optical polarization metrology)

Είναι γνωστό ότι τα οπτικά όργανα (από τα πλέον κοινά μέχρις τα περίπλοκα), τροποποιούν περισσότερο ή λιγότερο την κατάσταση πόλωσης του φωτός που διέρχεται από αυτά και που οφείλεται σε ανακλάσεις διαθλάσεις και εν γένει την αλληλεπίδρασή του με τα οπτικά υλικά. Κάτω από αυτές τις συνθήκες, κάθε 'ακτίνα φωτός' μπορεί να χαρακτηριστεί από ένα πίνακα πόλωσης. Για το σκοπό αυτό αναπτύχθηκαν τεχνικές προσδιορισμού αυτών των πινάκων, που αφορούν την κάθε οπτική διαδρομή του φωτός από άποψη πόλωσης (polarization ray tracing) για οποιοδήποτε οπτικό σύστημα. Δηλ. σε σύγκριση με τη θεωρία των σφαλμάτων των οπτικών συστημάτων και τη βαθμωτή θεωρία της περίθλασης του φωτός – που αφορούν την διαδικασία της απεικόνισης δια μέσου τους – , έγινε επέκταση προς τη διανυσματική πλέον θεωρία της περίθλασης, που λαμβάνει υπόψη της τα 'πολωτικά σφάλματα' των διαδιδόμενων δεσμών φωτός. Τα πολωτικά πολωσίμετρα (και ειδικότερα τα απεικονιστικά), χρησιμοποιούνται προκειμένου να

μετρήσουν τους πίνακες Muller (οι οποίοι προκύπτουν με τη βοήθεια των παραμέτρων Stokes) για τις διαδρομές των ακτίνων μέσω των οπτικών συστημάτων, καθορίζοντας τις καταστάσεις πόλωσης του φωτός (σφάλματα πόλωσης) από σημείο σε σημείο.

Από τις περιοχές της Οπτικής με θεωρητικό και τεχνολογικό ενδιαφέρον, στις οποίες διαμεσολαβείτε το φαινόμενο της πόλωσης του φωτός αναφέρουμε επιπλέον τις εξής:

Οπτική των κρυστάλλων (γραμμική και μη γραμμική)(Crystal Optics -linear and nonlinear)

Είναι γνωστό – από την προαναφερόμενη ιστορική αναδρομή – ότι το φαινόμενο της διπλής διάθλασης του φωτός ανακαλύφθηκε από τον Bartholinus το 1669 και αυτό της πόλωσης από τον Huygens το 1690, με τη βοήθεια της Ισλανδικής κρυστάλλου (κρύσταλλος Ασβεστίτη). Έκτοτε, είναι μόνο οι κρύσταλλοι αυτοί καθ' εαυτοί (δηλ. τα' ανισότροπα υλικά) και ελάχιστα από τα παραχθέντα μέχρι σήμερα συνθετικά υλικά (όπως π.χ. οι πολωτές Polaroid), που μπορούν να παράγουν, να μεταβάλλουν και ν' ανιχνεύσουν με αξιοσημείωτο τρόπο τις καταστάσεις πόλωσης του φωτός. Κρυσταλλικά υλικά όπως ο Ασβεστίτης, ο Χαλαζίας, η Μίκα και ο Τουρμαλίνης είναι από τα γνωστότερα, που χρησιμοποιήθηκαν (και χρησιμοποιούνται ακόμα και τις μέρες μας) σε πάμπολλες εφαρμογές.

Η σχέση μεταξύ: Μηχανικών (μηχανική τάση, σχετική παραμόρφωση), Ηλεκτρικών (ένταση ηλεκτρικού πεδίου, ηλεκτρική μετατόπιση, ηλεκτρική πόλωση) και Θερμικών (θερμοκρασία, εντροπία) μεγεθών (αγνοώντας εδώ τα Μαγνητικά), αναδεικνύει στους κρυστάλλους πλείστα όσα πρωτεύοντα και δευτερεύοντα, γραμμικά και μη γραμμικά φαινόμενα. Σαν τέτοια μπορούμε ν' αναφέρουμε: Το ευθύ και το αντίστροφο πιεζοηλεκτρικό φαινόμενο, το πιεζοθερμικό, τη θερμική διαστολή, το πυροηλεκτρικό, το ηλεκτροθερμικό, το ελαστικό, την ηλεκτρική διαπερατότητα και πολλά άλλα. Το σύνολο σχεδόν αυτών των φαινομένων επηρεάζουν με τον τρόπο τους πρωτογενώς ή δευτερογενώς, με γραμμικό ή μη γραμμικό τρόπο το μέγεθος της ηλεκ. αδιαπερατότητας των κρυστάλλων. Η τελευταία σχετίζεται άμεσα με τους δείκτες διάθλασης και κατά προέκταση με τις ταχύτητες διάδοσης των δυνάμενων να διαδοθούν στο εσωτερικό τους μετώπων κύματος του φωτός. Το βασικότερο όμως είναι ότι επηρεάζουν και τις καταστάσεις πόλωσής τους. Το γεγονός αυτό αποτελεί και τη βάση ενός πολύ μεγάλου πλήθους εφαρμογών στη σύγχρονη τεχνολογία.

Η δράση π.χ. ενός εξωτερικού ηλ. πεδίου πάνω σ' ένα κρύσταλλο, οδηγεί στην ανάδειξη του λεγόμενου ηλεκτροοπτικού φαινομένου. Του γραμμικού

(Pockels effect) και του τετραγωνικού (Kerr effect). Στα φαινόμενα αυτά στηρίζεται η λειτουργία πλείστων όσων οπτικών εξαρτημάτων που αφορούν τους τομείς: α) Της Ολοκληρωμένης Οπτικής όπως: Ζεύκτες (directional couplers), οπτικοί διακόπτες (optical switches), δισταθή στοιχεία (bistable devices) κ.τ.λ. β) Της διαμόρφωσης των ακτινοβολιών όπως: Διαμορφωτές πλάτους (amplitude modulators), φάσης(phase modulators), συχνότητας(frequency modulators) κ.τ.λ. γ) Των Lasers όπως: Συστήματα για τις λειτουργίες παλμικού τρόπου ταλάντωσης (Q-switching), εγκλείδωσης ρυθμού (mode locking) κ.τ.λ. δ) Της κατασκευής φίλτρων πολύ στενής φασματικής περιοχής (band pass filters) κ.ο.κ.

Φωτοελαστικότητα

Αποτελεί μια από τις παλαιότερες μεθόδους οπτικής μετρολογίας, η οποία σχετίζεται με την πόλωση του φωτός. Ας υποθέσουμε ότι ασκούμε μηχανική τάση σ' ένα ομογενές και ισότροπο υλικό (π.χ. μια πλάκα με παράλληλες έδρες). Τότε το υλικό από ισότροπο καθίσταται ανισότροπο. Το τελευταίο επιτυγχάνεται μέσω του λεγόμενου φωτοελαστικού φαινομένου (photoelastic effect). Το αποτέλεσμα το οποίο προκύπτει είναι ότι: Αν φως προσπέσει σε οποιαδήποτε περιοχή του πλακιδίου, τότε κατά την διέλευσή του από αυτό θα αλλάξει η κατάσταση πόλωσής του. Έστω ότι το σύστημα τοποθετείτε μεταξύ δύο διασταυρωμένων πολωτών και το όλο σύστημα φωτίζεται με φυσικό φως. Τότε παρατηρώντας από την έξοδό του, θα δούμε την πλάκα να διαμορφώνεται από αμαυρώσεις με τη μορφή κροσσών. Ειδικές μετρήσεις επί των κροσσών, είναι δυνατόν ν' αναδείξουν την κατανομή των ασκουμένων στο εσωτερικό του μηχανικών τάσεων από σημείο σε σημείο. Δηλ. το μέγεθός τους καθώς και τον προσανατολισμό τους. Η μηχανική, χρησιμοποιεί ακόμα και στις μέρες μας τη μέθοδο αυτή (με τη βοήθεια μοντέλων), για τον έλεγχο των παραμορφώσεων και της αντοχής των υλικών.

5) Τα περιεχόμενα του βιβλίου

Μπορούμε να πούμε ότι χωρίζονται σε πέντε βασικά μέρη:

α) Στο πρώτο μέρος – σε προπτυχιακό κυρίως επίπεδο – αναλύεται πλήρως η θεωρία της πόλωσης του φωτός, μέχρις και το κεφάλαιο που αφορά την οπτική ενεργότητα. Η περιγραφή της πόλωσης του φωτός είναι ευθέως συνδεδεμένη με τη διανυσματική φύση του ηλεκτρικού πεδίου. Για το λόγο αυτό κατ' αρχή γίνεται μνεία της διαφορικής κυματικής εξίσωσης του Maxwell (και των λύσεών της). Βέβαια μια πλήρης περιγραφή της για το πώς φθάνουμε σ' αυτήν ο αναγνώστης μπο-

ρεί να συμβουλευτεί το (ΠΑΡ/ΜΑ 1). Κατόπιν αναφερόμαστε στα μοντέλα εκπομπής και διάδοσης των Η/Μ κυμάτων στην ύλη για ισότροπα και ανισότροπα υλικά, προκειμένου να γίνει μια στοιχειώδης εισαγωγή του τρόπου διάδοσης του φωτός στους κρυστάλλους. Αυτό, θ' αποτελέσει τη βάση για την ερμηνεία του φαινομένου της διπλής διάθλασης του φωτός. Έπεται η πλήρης περιγραφή των διαφόρων καταστάσεων πόλωσης, με τη βοήθεια των συνιστωσών E_x, E_y του ηλ. πεδίου (Δηλ. των πλατών A_x, A_y και των φάσεών τους ϕ_x, ϕ_y). Επίσης γίνεται μνεία του φυσικού και του μερικά πολωμένου φωτός. Επειδή οι πολωτές Polaroid αποτελούν ένα από τα εξέχοντα (όσον αφορά τις εφαρμογές του) συνθετικό πολωτικό υλικό, η ανάπτυξή του γίνεται κάπως πιο εκτεταμένα. Ακολουθεί κατόπιν μια πλήρης ανάλυση που αφορά το φαινόμενο της διπλής διάθλασης του φωτός από κρυστάλλους όπως ο Ασβεστίτης και ο Χαλαζίας. Επίσης περιγράφεται ο τρόπος λειτουργίας των καθυστερητών φάσης. Λόγω της μεγάλης σημασίας των κρυσταλλικών πολωτών και καθυστερητών, οι τελευταίοι αναλύονται ενδελεχώς. Κατόπιν περιγράφονται οι τρεις εναλλακτικοί τρόποι (εκτός του φαινομένου της διπλής διάθλασης του φωτός), με τους οποίους είναι δυνατόν ν' αναδειχθούν φαινόμενα πόλωσης: Δηλ. η Ανάκλαση – Διάθλαση, ο Διχρωϊσμός και η Σκέδαση (στοιχειωδώς) του φωτός. Τέλος ακολουθεί η περιγραφή του φαινομένου της οπτικής ενεργότητας.

β) Το δεύτερο μέρος της εργασίας μας αφιερώνεται σ' εφαρμογές που αφορούν τη διάδοση του φωτός μέσω κυρίως των κρυσταλλικών υλικών. Η κατανόησή τους βέβαια γίνεται με τη βοήθεια των γνώσεων που μπορεί ν' αποκομίσει ο αναγνώστης με τη μελέτη των παραρτημάτων. Οι γνώσεις αυτές είναι μεταπτυχιακού επιπέδου και αφορούν περιεχόμενα της Οπτικής των Κρυστάλων. Η πρώτη εφαρμογή αφορά την μελέτη και την κατασκευή ενός φίλτρου Lyot πολύ στενής φασματικής περιοχής. Η δεύτερη ασχολείται λεπτομερειακά με το σημαντικό για τις τηλεπικοινωνίες κεφάλαιο των ηλεκτροοπτικών (εδώ κατ' όγκο) διαμορφωτών. Και το τρίτο παράδειγμα αφορά την ανάδειξη των αρχών της φωτοελαστικότητας.

γ) Το τρίτο μέρος, αναφέρεται αποκλειστικά στα παραρτήματα που συνοδεύουν την εργασία. Τα πρώτα τρία αποτελούν ένα σύντομο οδηγό για την ανάδειξη των Η/Μ εξισώσεων του Maxwell στο κενό και την ύλη. Το τέταρτο, αποτελεί μια εκτεταμένη εισαγωγή στην Οπτική των Κρυστάλλων. Εκεί κατ' αρχή επιλύονται οι εξισώσεις του Maxwell παρουσία ανισοτρόπου υλικού και αναδεικνύονται οι έννοιες των ιδιοτιμών και των ιδιοκαταστάσεων. Δηλ. των χαρακτηριστικών μετώπων κύματος που έχουν τη δυνατότητα να διαδοθούν στο εσωτερικό των κρυστάλλων. Ειδικά κεφάλαια επίσης αφιερώνονται στη μελέτη της επαγόμενης διπλής διάθλασης του φωτός στα ισότροπα και ανισότροπα υλικά, καθώς και στη φυσική και επαγόμενη στροφικότητα (οπτική ενεργότητα).

Σ' όλο το εύρος της εργασίας μας, η μελέτη των καταστάσεων πόλωσης κατά τη διάδοση του φωτός στο κενό, καθώς και σε ισότροπα και ανισότροπα υλικά, γίνεται με βάση το ***πλάτος*** των Η/Μ διαταραχών και όχι της ***έντασης***. Για το λόγο αυτό το μαθηματικό εργαλείο που χρησιμοποιούμε είναι ο ***λογισμός Jones***. Δηλ. η περιγραφή των καταστάσεων πόλωσης (εκτός βέβαια του φυσικού και των μερικά πολωμένων φώτων) γίνεται με τα διανύσματα – πίνακες (2×1) και των πολωτικών στοιχείων με πίνακες (2×2). Η θεωρία αυτή αναπτύσσεται λεπτομερώς στο (ΠΑΡ/ΜΑ 5).

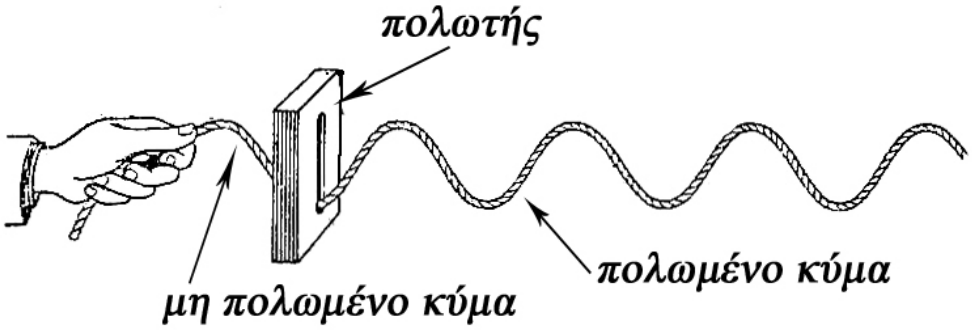
δ) Οι ασκήσεις που παραθέτουμε, αποσκοπούν βασικά στη συμπλήρωση της θεωρίας. Για το λόγο αυτό συνιστούν κυρίως αποδεικτικές διαδικασίες.

ε) Στο τελευταίο τμήμα της εργασίας δίνονται οι οδηγίες, που αφορούν τις πειραματικές ασκήσεις οι οποίες πρόκειται να εκτελεστούν από τους φοιτητές. Είναι τα πειράματα που διεξάγονται στο πλαίσιο του υποχρεωτικού μαθήματος 'Εργαστήρια Οπτικής', του Εργαστηρίου Οπτικής και Φασματοσκοπίας του Τομέα Φυσικής Στερεάς Κατάστασης, του Τμήματος Φυσικής, της Σχολής Θετικών Επιστημών του Α.Π.Θ.

Ανάδειξη φαινομένων, που σχετίζονται με την πόλωση του φωτός

Ένα μηχανικό ανάλογο της πόλωσης[*]

Η πόλωση του φωτός συνδέεται άμεσα με τον εγκάρσιο και διανυσματικό χαρακτήρα των διαταραχών του Η/Μ πεδίου. Θα μπορούσε κατ' αρχή ν' αναδειχθεί μέσω ενός μηχανικού ανάλογου που περιγράφεται συχνά στα κλασσικά εγχειρίδια της Γενικής Φυσικής στο κεφάλαιο της κυματικής. Το πείραμα αυτό φαίνεται στο (Σχ. 1), όπου με το χέρι μας κρατάμε ένα σχοινί που περνάει μέσα από μια σχισ-



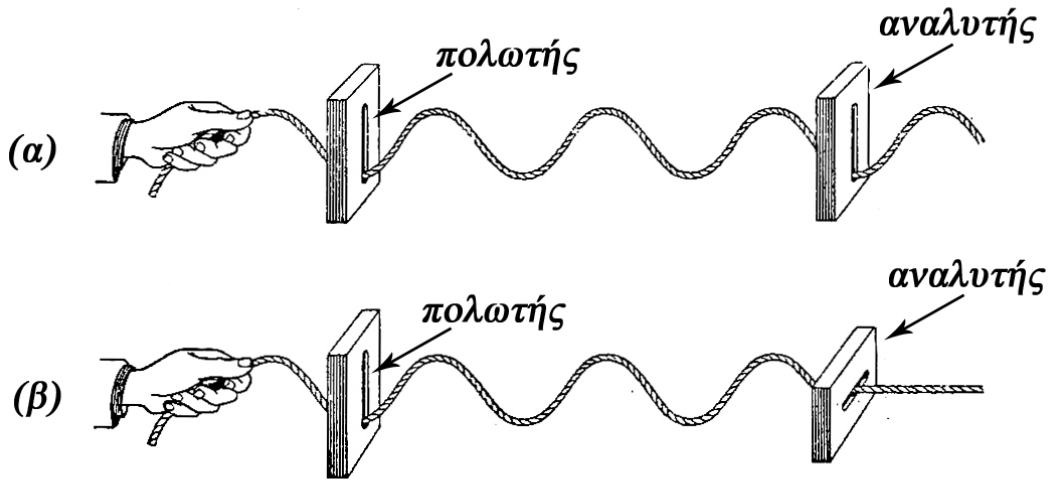
(Σχ. 1)

μή ορισμένου μήκους και πλάτους, περίπου ίσου με τη διάμετρο του σχοινιού. Κουνάμε το σχοινί τυχαία προς οποιαδήποτε κατεύθυνση πάνω σ' ένα επίπεδο που είναι παράλληλο με αυτό του επιπέδου της σχισμής αλλά πάντα με την ίδια συχνότητα. Θα παρατηρήσουμε ότι ενώ πριν τη σχισμή δεν μπορούμε να προσδιορίσουμε συγκεκριμένο επίπεδο πάνω στο οποίο διαταράσσεται το σχοινί, μετά από αυτήν, βλέπουμε καθαρά την αρμονική κίνησή του χωρικά και χρονικά. Επίσης ότι η κίνηση αυτή πλέον γίνεται πάνω σ' ένα συγκεκριμένο επίπεδο. Το επίπεδο αυτό προσδιορίζεται από τη διεύθυνση διάδοσης και τη διεύθυνση της εγκάρσιας ταλάντωσης του σχοινιού, δηλ. περιλαμβάνει τη σχισμή και είναι κάθετο στο επίπεδό της. Η κυματική διαταραχή του σχοινιού που έχει τα παραπάνω χαρακτηριστικά ονομάζεται ***γραμμικά πολωμένη (linear polarized***) και το σύστημα της σχισμής ***πολωτής (polarizer).*** Οι ιδιότητες αυτού του διαδιδόμενου κύματος είναι δυνατόν ν' αναδειχθούν με τη βοήθεια του πειράματος που φαίνεται στο (Σχ. 2).

---

[*] Θ. Γ. Κουγιουμζέλη Σ. Γ. Περιστεράκη: 'Στοιχεία Φυσικής' Τόμ. ΙΙ Κυματική. Βιβλιοπωλείο Αθαν. Καραβία. Αθήνα 1965 Έκδ. 5η.

Εκεί, αν μετά τον πολωτή και σε μια ορισμένη απόσταση από αυτόν τοποθετήσουμε μια πανομοιότυπη σχισμή που να είναι παράλληλη με την πρώτη (Σχ. 2α), παρατηρούμε ότι η αρμονική διαταραχή του σχοινιού θα διαδίδεται ανεμπόδιστα και μετά από αυτήν. Δεν συμβαίνει όμως το ίδιο όταν ο προσανατολισμός της δεύτερης σχισμής είναι ορθογώνιος σε σχέση με αυτόν της πρώτης (Σχ. 2β). Τώρα βλέπουμε ότι η διαταραχή απορροφάτε τελείως, με συνέπεια πίσω από την δεύτερη σχισμή να μην διαδίδεται κύμα. Η δεύτερη σχισμή συνηθίζεται να ονομάζεται ***αναλυτής (analyzer)***.



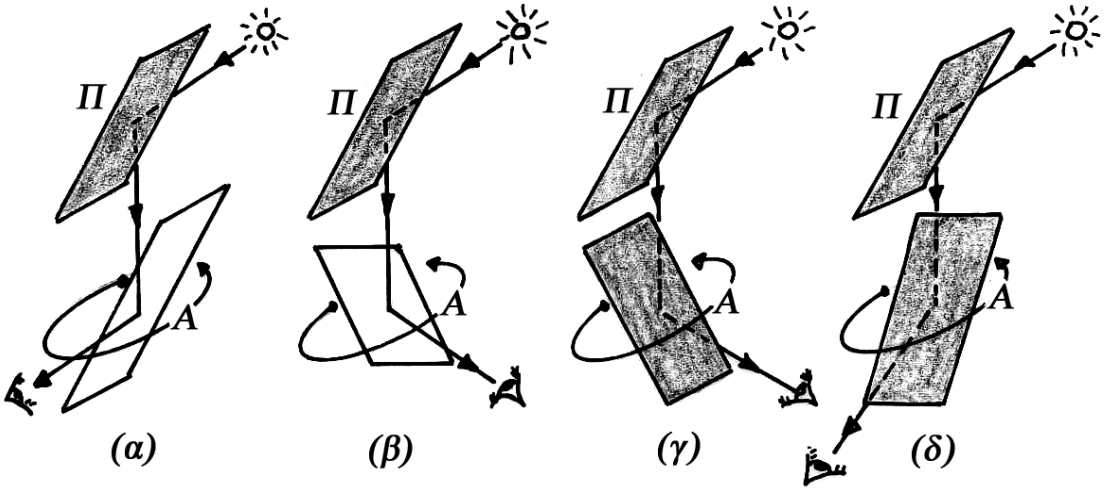
(Σχ. 2)

Την ιδιότητα αυτή της πόλωσης την έχουν και οι εγκάρσιες Η/Μ διαταραχές σε όλο το εύρος του φάσματός τους. (Ομιλούμε εδώ για τις διαταραχές της έντασης **Ε** του ηλεκτρικού πεδίου των διαδιδόμενων Η/Μ κυμάτων). Για την ορατή περιοχή του φάσματος με την οποία ασχολούμαστε, υπάρχουν φαινόμενα που αναδεικνύουν άμεσα την πόλωση του φωτός όπως το επόμενο.

Ανάδειξη της πόλωσης του φωτός με δύο επίπεδα γυαλιά

Περιγράφεται με τη βοήθεια του (Σχ. 3) και αφορά την πόλωση του φωτός από ανάκλαση πάνω σε επίπεδα κομμάτια τζαμιού. Στο (Σχ. 3α) ηλιακό φως πέφτει στην επιφάνεια του πρώτου τζαμιού (πολωτής Π) και ανακλάται. Η ανακλώμενη δέσμη φωτός θα διαπιστώσουμε ότι είναι διαφορετική από την άποψη της πόλωσης σε σχέση με την προσπίπτουσα. Πράγματι αυτό γίνεται με τη βοήθεια ενός δευτέρου κομματιού τζαμιού (αναλυτής Α), το οποίο κατ' αρχή (Σχ. 3α) το κρα-

τάμε παράλληλο με το πρώτο. Στην περίπτωση αυτή τα επίπεδα πρόσπτωσης των δύο επιφανειών συμπίπτουν δηλ. σχηματίζουν μεταξύ τους γωνία 0^0. Παρατηρούμε ότι η ανακλώμενη από την επιφάνεια (Α) έχει μια ορισμένη ένταση. Σε δεύτερη φάση περιστρέφουμε την επιφάνεια (Α) δεξιόστροφα κατά 90° έτσι ώστε τα επίπεδα πρόσπτωσης των (Π) και (Α) να είναι κάθετα μεταξύ τους. Αυτό γίνετε παρατηρώντας συνεχώς την ένταση της ανακλώμενης από τον (Α) (Σχ. 3β). Θα δούμε ότι κατά τη διάρκεια αυτής της διαδικασίας η ένταση της δέσμης συνεχώς μειώνεται μέχρις μια ελάχιστη τιμή. Αν συνεχίσουμε την περιστροφή του (Α) από $90^0 \rightarrow 180^0$ (Σχ. 3γ) μέχρις ότου τα επίπεδα πρόσπτωσης ξανατουτιστούν, παρατηρούμε ότι η ένταση της δέσμης επανέρχεται στην αρχική της τιμή. Η τελευταία θα τείνει πάλι στην ελάχιστη, όταν συνεχίσουμε την περιστροφή του (Α) από $180^0 \rightarrow 270^0$ (Σχ. 3δ).

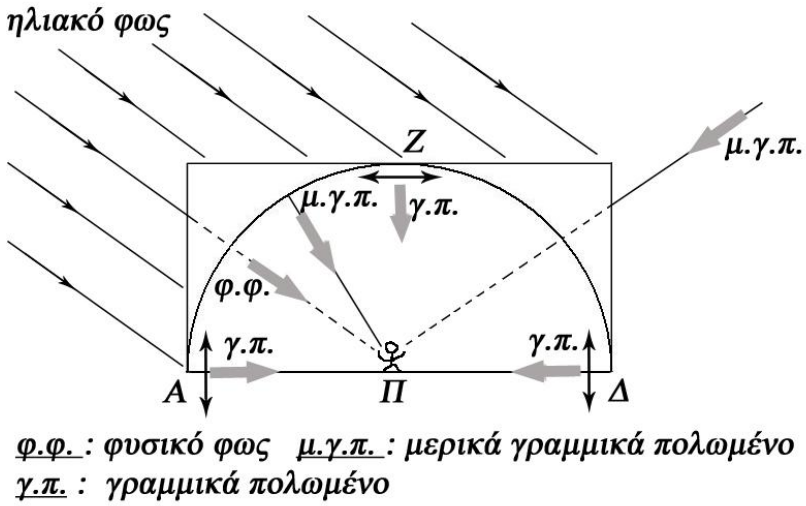


(Σχ. 3)

Αν η γωνία με την οποία πέφτει το ηλιακό φως στον (Π) είναι μία συγκεκριμένη (είναι η γνωστή γωνία Brewster), τότε τα ελάχιστα που παίρνουμε στις θέσεις (β) και (δ) είναι μηδενικά. Το πείραμα αυτό μπορεί να ερμηνευθεί στοιχειωδώς με τη βοήθεια του μηχανικού ανάλογου του (Σχ. 2) αν στο κομμάτι του τζαμιού (Π) αποδοθεί ρόλος πολωτή. Τότε μπορούμε να πούμε ότι για τυχαία προσπίπτοντα (και σε τυχαία επίπεδα ταλαντούμενα) εγκάρσια αρμονικά Η/Μ κύματα του ηλιακού φωτός, το (Π) 'επιλέγει' εκείνα που ταλαντεύονται (δηλ. είναι πολωμένα) πάνω σ' ένα συγκεκριμένο επίπεδο. Η δεύτερη επιφάνεια του τζαμιού (Α) ενεργεί σαν αναλυτής όπου στις θέσεις (α) και (γ) επιτρέπει στο γραμμικά πολωμένο φως ν' ανακλαστεί ενώ στις θέσεις (β) και (δ) το αποκόπτει.

Πόλωση από σκέδαση του φωτός στην ατμόσφαιρα

Ένα άλλο κλασσικό παράδειγμα πόλωσης της Η/Μ ακτινοβολίας είναι αυτό που προέρχεται από την ελαστική σκέδαση του ηλιακού φωτός στα μόρια της ατμόσφαιρας (βλ. § 6.3). Αν διαθέτουμε έναν ***γραμμικό πολωτή (Polaroid)*** (βλ.§ 5.5), ή μια συστάδα γυαλιών σε επαφή (σαν πολωτή) (βλ. § 4.1), που ούτως ή άλ-



(Σχ. 4)

λως είναι εύκολα διαθέσιμα, μπορούμε να παρατηρήσουμε διά μέσου του τα εξής (Σχ. 6784): Κατά τη διεύθυνση που βλέπουμε τον ήλιο (περιστρέφοντας τον πολωτή) η ένταση του φωτός δεν μεταβάλετε. Το φως αυτό είναι φυσικό. Όμως αν επαναλάβουμε την ίδια διαδικασία σε διευθύνσεις αριστερά ή δεξιά ή προς τα πάνω, πάνω σε ένα επίπεδο που είναι κάθετο σε σχέση με την αρχική διεύθυνση (προς τον ήλιο), υπάρχουν θέσεις του πολωτή για τις οποίες η ένταση του διερχομένου φωτός είναι μηδενική. Δηλ. το φως που μας έρχεται από τις διευθύνσεις αυτές είναι γραμμικά πολωμένο. Σε οποιαδήποτε άλλη διεύθυνση και να δούμε, η ένταση του φωτός (κατά την περιστροφή του πολωτή) θ' αυξομειώνεται χωρίς μηδενικό ελάχιστο. Το φως αυτό είναι ***μερικά γραμμικά πολωμένο (partial linear polarized)*** (βλ. § 3.4), δηλ. ένα μίγμα γραμμικά πολωμένου και φυσικού φωτός.

Το φυσικό αυτό φαινόμενο χρησιμοποιήθηκε πολύ πρώιμα από τους Βίκινκς για την εξυπηρέτηση της ναυσιπλοΐας τους. Πράγματι ο ουρανός του βορείου Ατλαντικού (όπου οι τελευταίοι διακινούνταν) τη νύχτα συνήθως είναι καθαρός οπότε ο προσανατολισμός των πλοίων τους ήταν εύκολος με τη βοήθεια των αστερισμών. Την ημέρα όμως ο ουρανός είναι νεφοσκεπής οπότε χρειαζόταν οπωσδήποτε να εντοπίζουν τη θέση του ήλιου. Αυτό γινόταν με τη βοήθεια ενός ορυκτού που ονο-

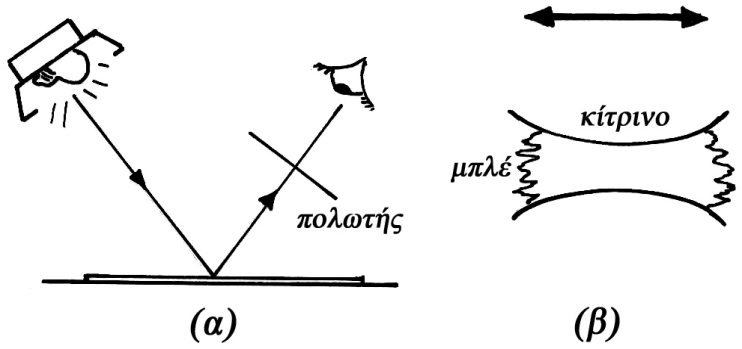
μάζεται ***Κορδιερίτης (Cordierite)***.Πρόκειται για τον κρύσταλλο με χημικό τύπο $(Mg, Fe)_2 Al_3[Si_5AlO_{18}]$ του ορθορομβικού συστήματος. Η ομάδα συμμετρίας σημείου του είναι η (mmm) και οι φυσικές του ιδιότητες τον κατατάσσουν στους πλεοχρωικούς κρυστάλλους (βλ.§ 6.2), εφόσον από οπτική άποψη είναι διάξονας. Βρίσκεται στη Δανία (όπως και αλλού) και εξορύσσεται με τη μορφή αρκετά χονδρών σχισμογενών κομματιών. Έχει την ιδιότητα να συμπεριφέρεται σαν γραμμικός πολωτής για το φως που πέφτει πάνω του. Πράγματι αν το φως αυτό είναι πολωμένο κατά μήκος ενός από τους οπτικούς του άξονές απορροφάτε τελείως και ο κρύσταλλος φαίνεται καστανός. Το αντίθετο ακριβώς γίνετε όταν το φως είναι πολωμένο παράλληλα εκάστοτε προς τους δύο άλλους άξονες του κρυστάλλου. Τότε το φως διαδίδεται ελεύθερα και αυτός φαίνεται σχεδόν διαφανής. Βλέποντας λοιπόν κάποιος μέσα από τον κρύσταλλο σε διάφορα σημεία του ουρανού και περιστρέφοντάς τον μπορούσε να εντοπίσει τα σημεία από τα οποία προερχόταν γραμμικά πολωμένο φως. Και κατά προέκταση να εντοπίσει τη θέση που βρισκόταν ο ήλιος.

Ένας άλλος διχρωικός κρύσταλλος που εμφανίζει παρόμοια συμπεριφορά είναι ο Βιβιανίτης τις ιδιότητες του οποίου περιγράφουμε στην (§ 6.2). Το πείραμα αυτό σήμερα μπορεί να επαναληφθεί εύκολα με τη βοήθεια ενός φύλλου γραμμικού πολωτή Polaroid που βρίσκεται στην αγορά σχετικά εύκολα. Είναι σύνηθες παρελκόμενο των φακών των φωτογραφικών μηχανών και χρησιμοποιείται προκειμένου ν' αποφεύγονται τα είδωλα από ανάκλαση (§ 6.1.1) πάνω σε ανακλώσες επιφάνειες όπως είναι τα τζάμια. Επίσης πολλά γυαλιά ηλίου που αναγράφουν τη λέξη Polaroid είναι πράγματι γραμμικοί πολωτές.

Ανίχνευση του γραμμικά πολωμένου φωτός από το ανθρώπινο μάτι

Το γραμμικά πολωμένο φως είναι δυνατόν ν' ανιχνευθεί με το μάτι μας και αυτό οφείλεται βασικά στην συγκεκριμένη φυσιολογική δομή του. Για το σκοπό αυτό θα χρησιμοποιήσουμε τη διάταξη του (Σχ. 5α) όπου μια λυχνία πυράκτωσης λευκού φωτός φωτίζει ένα λευκό χαρτί τοποθετημένο σε μια τράπεζα. Παρατηρούμε με μεγάλη προσήλωση στην περιοχή πρόσπτωσης του φωτός μέσω ενός πολωτή Polaroid για τριάντα περίπου δευτερόλεπτα. Αυτό το οποίο θα δούμε να εμφανίζεται σε λίγο, είναι της μορφής του (Σχ. 5β)(Εικ. 6). Δηλ. μια σχετικά λεπτή κυλινδρικής μορφής δέσμη ακτίνων μπλε χρώματος σε οριζόντια θέση. Στις περιοχές πάνω και κάτω από αυτήν θα επικρατεί το κίτρινο χρώμα. Η εικόνα ονομάζεται ***βούρτσα του Haidinger***. Στην περίπτωσή μας ο άξονας διέλευσης του πολωτή (δηλ. η διεύθυνση στην οποία ταλαντεύεται το εξερχόμενο από αυτόν γραμμικά πολωμένο φως), είναι παράλληλος με τις δέσμες των μπλε περιοχών. Περιστρέφο-

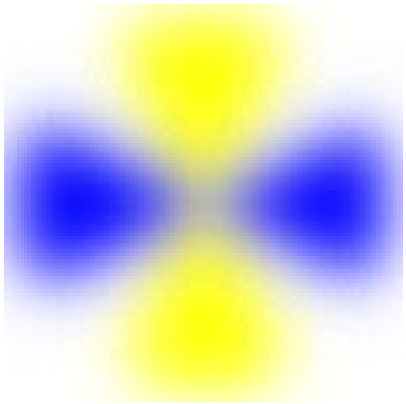
ντας τον πολωτή, θα περιστρέφεται ταυτόχρονα και η εικόνα που περιγράψαμε προηγουμένως. Η εξήγηση αυτού του φαινομένου οφείλεται στον Helmholtz και έχει σχέση με τον τρόπο διάταξης των φωτοευαίσθητων κυττάρων της ωχράς κηλίδας του αμφιβληστροειδή χιτώνα του ματιού μας. Τα φωτοευαίσθητα κύττα-



(Σχ. 5)

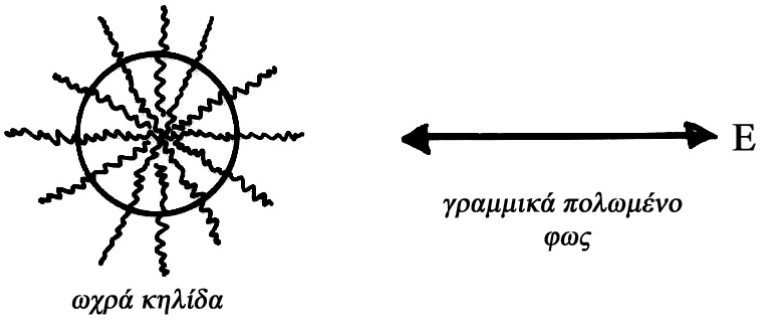
Σημείωση

Η ωχρά κηλίδα είναι ένα μικρό βαθούλωμα που καταλαμβάνει το κεντρικό τμήμα του αμφιβληστροειδή χιτώνα και είναι πλούσια σε κωνία. Δηλ. φωτοευαίσθητα κύτταρα υπεύθυνα για την (έγχρωμη) όραση την περίοδο της ημέρας (φωτοπτική όραση)(βλ. ΕΡΓΑΣ/ΚΗ. ΟΠΤΙΚΗ [1]: Γεωμετρική Οπτική (§ 11.1)).



(Εικ. 6)

ρα προσανατολίζονται με τη μορφή μακρών πυκνών νηματίων στην ωχρά κηλίδα (Σχ. 7). Το φως το οποίο είναι γραμμικά πολωμένο κατά μήκος των νηματίων, φέρνει σε κόρο τελείως τα κύτταρα με συνέπεια να έχουμε την αίσθηση του μπλε



(Σχ. 7)

χρώματος. Κάθετα όμως προς αυτήν την κατεύθυνση τα κύτταρα ελάχιστα αντιδρούν οπότε και έχουμε την αίσθηση του κίτρινου χρώματος.

Ανάδειξη του φαινομένου της φωτοελαστικότητας, μετά από ανάκλαση μερικά πολωμένου φωτός σε διαφανή πλαστική επιφάνεια

Βρισκόμαστε στο εσωτερικό ενός δωματίου σχετικά σκοτεινού, του οποίου ο φωτισμός προέρχεται από παράθυρα τα οποία έχουν νότιο προσανατολισμό (Εικ. 8). Ο ήλιος σχεδόν μεσουρανεί και βρίσκεται σε διεύθυνση αριστερά των παραθύρων. Οπότε στο πάνω μέρος τους (από όπου προέρχεται και ο φωτισμός του δωματίου) προβάλλεται γαλανός ο ουρανός, με την προϋπόθεση ότι η ημέρα είναι τελείως καθαρή. Όμως – όπως ήδη έχουμε περιγράψει – λόγω του φαινομένου της σκέδασης του φωτός από τα μόρια της ατμόσφαιρας (βλ. § 6.3), το φως που μπαίνει στο δωμάτιο είναι σε αρκετά μεγάλο βαθμό μερικά γραμμικά πολωμένο.

Σε μια τράπεζα στο εσωτερικό του δωματίου μπροστά σχεδόν στο παράθυρο, τοποθετούμε μια μαύρη γλασέ επιφάνεια. Και πάνω στην επιφάνεια αυτή ένα κομμάτι ορθογώνιου πλαστικού π.χ. $(10\times 20)\,\mathrm{cm}^2$ και πάχους $5\mathrm{mm}$. Το πλαστικό (όπως φαίνεται και στην εικόνα) διαθέτει μέχρι τη μέση του μια σχισμή. Θα μπορούσαμε βέβαια στην ίδια θέση να τοποθετήσουμε ένα τρίγωνο σχεδίασης ένα καμπυλόγραμμο ή άλλα πλαστικά διαφανή αντικείμενα.

Είμαστε τώρα πίσω από την τράπεζα και απέναντι από τα παράθυρα, έτσι ώστε το σύστημα που περιγράψαμε να βρίσκεται ανάμεσά μας. Παρατηρώντας κατόπιν το ανακλώμενο φως από την επιφάνεια του πλαστικού με μια γωνία ίση περίπου με αυτή της πρόσπτωσης (40^0-50^0 από την κατακόρυφη), βλέπουμε τα εξής: Η επιφάνεια του πλαστικού να διατρέχεται από έγχρωμους κροσσούς. Πρόκει-

γαλανός ουρανός
διεύθυνση
θέσης ηλίου
διεύθυνση πρόσπτωσης
μερικά γραμμικά πολωμένου
φωτός (από σκέδαση)
γλασέ μαύρη
ανακλαστική επιφάνεια
πλαστική διαφανής
επιφάνεια
εικόνα ανάδειξης
φωτοελαστικού
φαινομένου

(Εικ. 8)

ται για την ανάδειξη του φαινομένου της φωτοελαστικότητας, το οποίο έχει άμεση σχέση με το φαινόμενο της πόλωσης του φωτός.

Το προερχόμενο μερικά πολωμένο λευκό φως από το παράθυρο προσπίπτει στο πλαστικό, το διαπερνά και ανακλώμενο στην κάτω γλασέ επιφάνεια ξαναδιέρχεται από το εσωτερικό του πλαστικού. Το ανακλώμενο βέβαια από τη γλασέ επιφάνεια λευκό φως είναι και αυτό μερικά πολωμένο. Το πλακίδιο όμως του πλαστικού παρά το ότι συντίθεται από ισότροπο διαφανές υλικό, κατά την κατασκευή του (καλούπιασμα) δεν είναι ομογενές, με συνέπεια στο εσωτερικό του να υφίστανται παραμένουσες μηχανικές τάσεις. Η ύπαρξη αυτών των τάσεων καθιστά το υλικό από σημείο σε σημείο ανισότροπο και κατά μια απλή εκδοχή πλακίδιο καθυστέρησης (λ/x) (§ 5.6) ανά περιοχές. Οι περιοχές αυτές αποκόπτουν λόγω κατασβέσεων τμήμα από το φάσμα του μερικά πολωμένου λευκού φωτός, με συνέπεια στην περιοχή εκείνη να εμφανίζεται το συμπληρωματικό χρώμα του αποκοπτόμενου. Αυτός άλλωστε είναι και ο λόγος της ανάδειξης των εγχρώμων κροσσών και κατά προέκταση του φωτοελαστικού φαινομένου. Μια σύντομη περιγραφή του φαινομένου, γίνεται στην (§ 8.2).

1. *Ηλεκτρομαγνητικό (Η/Μ) πεδίο και ηλεκτρομαγνητικά κύματα*

1.1 *Περιγραφή του Η/Μ πεδίου με τη βοήθεια των εξισώσεων Maxwell. Ο διανυσματικός χαρακτήρας και η κυματική φύση της χωροχρονικά μεταβαλλόμενης έντασης* **E** *του ηλεκτρικού πεδίου και της μαγνητικής επαγωγής* **B**

Είναι γνωστό από την Η/Μ θεωρία ότι ένα δυναμικό γενικά πεδίο (δηλ. χρονικά μεταβαλλόμενο), χαρακτηρίζεται από δύο βασικά μεγέθη τα οποία συσχετίζονται μεταξύ τους. Αυτά είναι η ένταση $\mathbf{E}$ του ηλεκτρικού πεδίου και η επαγωγή $\mathbf{B}$ του μαγνητικού πεδίου. Για να προσδιοριστούν τα προαναφερόμενα μεγέθη απαιτούνται το μέτρο η διεύθυνση και η φορά τους. Δηλ. ο χαρακτήρας τους είναι διανυσματικός. Γενεσιουργός αιτία γενικά των ηλεκτρικών πεδίων είναι τα στατικά φορτία πυκνότητας χώρου ρ (ή τα φορτία πόλωσης πυκνότητας ρ') και τα μεταβαλλόμενα μαγνητικά πεδία. Τα μαγνητικά πεδία οφείλουν την ύπαρξή τους σε κινούμενα ηλεκτρικά φορτία (ρεύματα σε υλικά αγωγιμότητας σ) ή σε μεταβαλλόμενα ηλεκτρικά πεδία.

Η ηλεκτρική και μαγνητική συμπεριφορά ενός δυναμικού πεδίου στην ύλη ή στο κενό χαρακτηρίζεται από τους συντελεστές ε και μ δηλ. την ***ηλεκτρική*** και ***μαγνητική διαπερατότητα (electric and magnetic permittivity)*** του μέσου. Οι συντελεστές αυτοί των οποίων η τιμή εξαρτάται από την κυκλική συχνότητα $\omega = 2\pi\nu$ για πεδία αρμονικά μεταβαλλόμενα, σχετίζονται με τον δείκτη διάθλασης (δ.δ) του μέσου και κατά προέκταση με την ταχύτητα διάδοσης της Η/Μ διαταραχής (βλ. ΕΡΓΑΣ/ΚΗ ΟΠΤΙΚΗ [5]: Π.Α.Α.Φ. Κεφ.4 : Το φαινόμενο του διασκεδασμού). Για την περίπτωση ομογενούς και ισοτρόπου μέσου (δηλ. μέσου που οι ιδιότητές του είναι οι ίδιες προς οποιαδήποτε κατεύθυνση στο εσωτερικό του) τα πεδιακά μεγέθη $\mathbf{E}$ και $\mathbf{B}$ σχετίζονται με τέσσερεις τον αριθμό διαφορικές εξισώσεις. Γνωστές σαν διαφορικές εξισώσεις του Maxwell (βλ. ΠΑΡ/ΜΑ 1), είναι αποτέλεσμα θεωρητικής γενίκευσης πειραματικών δεδομένων. Για $\rho \neq 0$ και $\sigma \neq 0$ γράφονται :

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (1.1.1) \qquad \nabla \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon} \quad (1.1.2)$$

$$\nabla \mathbf{B} = 0 \quad (1.1.3) \qquad \nabla \times \mathbf{B} = \mu\sigma\mathbf{E} + \mu\varepsilon\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (1.1.4)$$

όπου σ η ***αγωγιμότητα (conductivity)*** του μέσου.

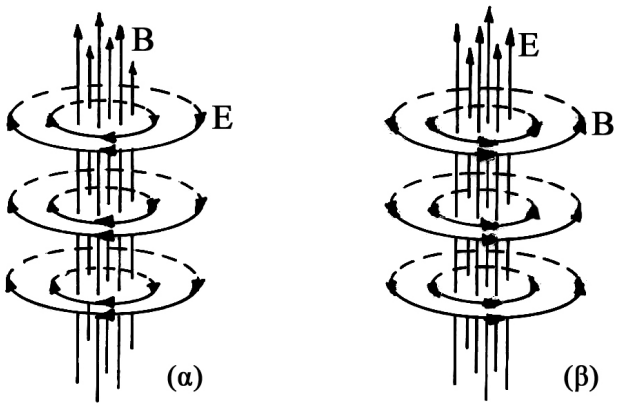
Με πολύ σύντομο τρόπο, η ποιοτική ερμηνεία αυτών των σχέσεων είναι η εξής: (σχ. 1.1.1): Η χρονική μεταβολή της μαγνητικής επαγωγής $\mathbf{B}$ σχετίζεται άμεσα με τη δημιουργία ηλεκτρικού πεδίου $\mathbf{E}$. (σχ. 1.1.2): Μια κατανομή στατικών φορτίων ρ στο χώρο (ή και φορτίων πόλωσης ρ') αναπτύσσει ηλεκτρικό πεδίο $\mathbf{E}$. (σχ. 1.1.3): Δεν υπάρχουν στη φύση μαγνητικά μονόπολα, με συνέπεια η ροή του πεδίου $\mathbf{B}$ διά μιας κλειστής επιφάνειας να είναι μηδέν. (σχ. 1.1.4): Το μαγνητικό πεδίο επαγωγής $\mathbf{B}$ δημιουργείται α) είτε από ροή ηλεκτρικών φορτίων (ρεύματος) ηλεκτρικής πυκνότητας $\mathbf{J} = \sigma\mathbf{E}$, β) είτε από μεταβαλλόμενο χρονικά ηλεκτρικό πεδίο ή και από τα δύο.

Για την περίπτωση πού θέλουμε να δούμε το αποτέλεσμα της εφαρμογής των παραπάνω εξισώσεων στον κενό χώρο: $\varepsilon = \varepsilon_0, \mu = \mu_0, \rho = 0$ και $\mathbf{j} = \sigma\mathbf{E} = 0$. Τότε:

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (1.1.5) \qquad \nabla \mathbf{E} = 0 \quad (1.1.6)$$

$$\nabla \mathbf{B} = 0 \quad (1.1.7) \qquad \nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (1.1.8)$$

Στις παραπάνω εξισώσεις παρατηρούμε τα εξής: α) Εκτός από έναν βαθμωτό πολλαπλασιαστικό παράγοντα, το ηλεκτρικό πεδίο $\mathbf{E}$ και η επαγωγή $\mathbf{B}$ εμφανίζονται με μια αξιοσημείωτη μαθηματική συμμετρία. Το γεγονός οδηγεί στην ανάδειξη της ύπαρξης μιάς φυσικής συμμετρίας μεταξύ των πεδίων. β) Η χρονική μεταβολή της μαγνητικής επαγωγής $\mathbf{B}$ (σχ. 1.1.5) έχει σαν αποτέλεσμα την εμφάνιση ηλεκτρι-



(Σχ. 1.1.1)

κού πεδίου $\mathbf{E}$ καθέτου προς αυτή, έτσι που οι δυναμικές του γραμμές να είναι κλειστοί βρόγχοι (Σχ. 1.1.1α). Επίσης από τη (σχ. 1.1.8) βλέπουμε ότι η χρονική με-

ταβολή του ηλεκτρικού πεδίου $\mathbf{E}$, έχει σαν αποτέλεσμα την εμφάνιση μαγνητικού πεδίου επαγωγής $\mathbf{B}$ καθέτου προς αυτό και του οποίου οι δυναμικές γραμμές είναι επίσης κλειστοί βρόγχοι (Σχ. 1.1.1β). Άρα υπάρχει μια γενική καθετότητα μεταξύ του ηλεκτρικού και του μαγνητικού πεδίου. γ) Διαπιστώνουμε τέλος ότι υφίσταται μια αλληλουχία στον τρόπο που το ηλεκτρικό πεδίο δημιουργείται από το μαγνητικό, το μαγνητικό από το ηλεκτρικό κ.ο.κ.

Για να εκφράσουμε τις χωροχρονικές μεταβολές των $\mathbf{E}$ και $\mathbf{B}$ ξεχωριστά, εφαρμόζουμε για τις (σχ. 1.1.5 – 8) τον διανυσματικό διαφορικό λογισμό (βλ. ΠΑΡ/ΜΑ 1), με συνέπεια να καταλήξουμε σε δύο πανομοιότυπες διαφορικές εξισώσεις:

$$\nabla^2\mathbf{E} - \varepsilon_0\mu_0 \frac{\partial^2\mathbf{E}}{\partial t^2} = 0 \qquad (1.1.9) \qquad\qquad \nabla^2\mathbf{B} - \varepsilon_0\mu_0 \frac{\partial^2\mathbf{B}}{\partial t^2} = 0 \qquad (1.1.10)$$

όπου σε καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων:

$$\mathbf{E} = E_x\mathbf{i} + E_y\mathbf{j} + E_z\mathbf{k} \qquad \text{και} \qquad \mathbf{B} = B_x\mathbf{i} + B_y\mathbf{j} + B_z\mathbf{k}$$

με : E_x, E_y, E_z τις συνιστώσες του $\mathbf{E}$ και B_x, B_y, B_z τις συνιστώσες του $\mathbf{B}$.

Επειδή:
$$\begin{aligned} \nabla^2\mathbf{E} &= (\nabla^2 E_x)\mathbf{i} + (\nabla^2 E_y)\mathbf{j} + (\nabla^2 E_z)\mathbf{k} \\ \nabla^2\mathbf{B} &= (\nabla^2 B_x)\mathbf{i} + (\nabla^2 B_y)\mathbf{j} + (\nabla^2 B_z)\mathbf{k} \end{aligned} \qquad (1.1.11)$$

από τις (σχ. 1.1.9 – 11) θα προκύψουν έξη τον αριθμό διαφορικές εξισώσεις της μορφής:

$$\nabla^2\psi - \frac{1}{\upsilon^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = 0 \quad \text{ή} \quad \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} - \frac{1}{\upsilon^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = 0 \qquad (1.1.12)$$

με $\psi \equiv E_x, E_y, E_z, B_x, B_y, B_z$ και $\upsilon^2 = 1/\varepsilon_0\,\mu_0$.

Ήταν όμως από πολύ παλιά γνωστό ότι διαφορικές εξισώσεις της μορφής (1.1.12), έχουν σαν λύσεις συναρτήσεις χωρικά και χρονικά εξαρτημένες, οι οποίες περιγράφουν κυματικά φαινόμενα. Το γεγονός σημαίνει ότι οποιαδήποτε από τις συνιστώσες του ηλεκτρικού ή του μαγνητικού πεδίου θα έχουν κυματικό χαρακτήρα. Με τη βοήθεια των πειραματικά προσδιορισμένων τιμών $\varepsilon_0 = 8.85\times10^{-12}$ F/m και $\mu_0 = 4\pi\times10^{-7}$ H/m ο Maxwell βρήκε ότι :

$$\upsilon = c \cong 3\times10^8 \text{ m/s},$$

που δεν είναι παρά η ταχύτητα με την οποία διαδίδονται οι Η/Μ διαταραχές στο κενό.

1.2 *Λύσεις της διαφορικής εξίσωσης κύματος . Εγκάρσια φύση των Η/Μ κυμάτων*

Αν μία διανυσματική εν γένει συνάρτηση του χώρου και του χρόνου επαληθεύει τη διαφορική εξίσωση της (σχ. 1.1.9) όπως π.χ. η:

$$\mathbf{E}(x,y,z,t)=\mathbf{f}\left[\alpha t \pm b\phi(x,y,z)\right] \tag{1.2.1}$$

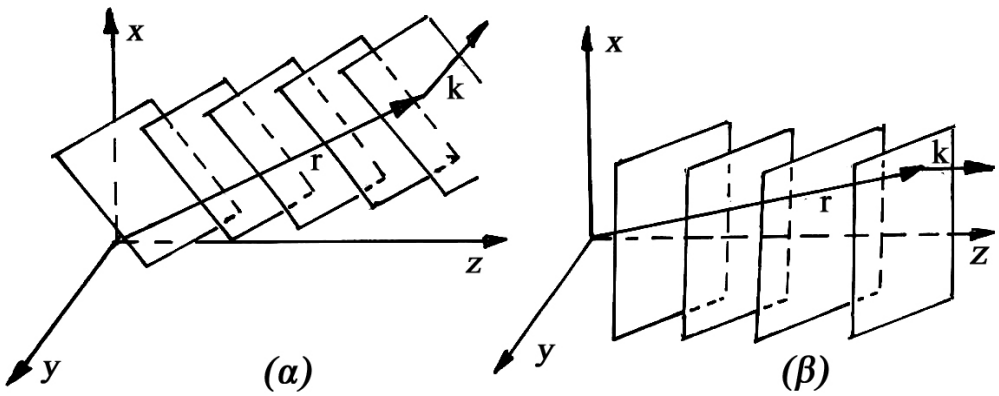
τότε συνιστά ένα διαδιδόμενο κύμα. Η (σχ. 1.2.1) μπορεί να γραφεί:

$$\mathbf{E}(x,y,z,t)=\mathbf{E}_0(x,y,z)\,g\left[\alpha t \pm b\phi(x,y,z)\right] \tag{1.2.2}$$

όπου ο παράγοντας $\mathbf{E}_0(x,y,z)$ ονομάζεται ***πλάτος*** του κύματος και ο $\alpha t \pm b\phi(x,y,z)$ ***φάση***. Η φάση όπως βλέπουμε είναι χρονικά και χωρικά εξαρτώμενη. Οι α και b είναι σταθερές. Από τις πιο απλές μορφές κυμάτων είναι τα ονομαζόμενα ***επίπεδα κύματα(plane waves)*** όπου τώρα:

$$\mathbf{E}(x,y,z,t)=\mathbf{E}_0 g\left[\alpha t \pm \mathbf{k}\cdot\mathbf{r}\right] \tag{1.2.3}$$

Το πλάτος $\mathbf{E}_0$ εδώ θα είναι σταθερό, πάνω στο καθένα από ένα άπειρο σύνολο επιπέδων (Σχ. 1.2.1 α,β). g είναι μια συνάρτηση του ορίσματος $\alpha t \pm \mathbf{k}\cdot\mathbf{r}$. Όπου $\mathbf{k}$ το



(Σχ. 1.2.1)

διάνυσμα της κυματοκάθετης – που είναι κάθετο όπως θα δούμε αμέσως μετά – σε κάθε σημείο του μετώπου κύματος. Ο χαρακτηρισμός 'επίπεδο κύμα' καθορίζεται από τη μορφή του χωρικά εξαρτώμενου όρου της φάσης $\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}$. Πράγματι αν για $t=0$ θέσουμε $\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}=$ σταθ. τότε η σχέση αυτή μας δίνει τη μορφή των επιφανειών που θα έχουν την ίδια φάση. Επειδή σε καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων:

$$\mathbf{k}=k\cos\alpha\mathbf{i}+k\cos\beta\mathbf{j}+k\cos\gamma\mathbf{k}$$
$$\mathbf{r}=x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k} \qquad k=|\mathbf{k}|$$

τότε: $\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}=kx\cos\alpha+ky\cos\beta+kz\cos\gamma=$ σταθ. η οποία παριστά εξίσωση επιπέδου. $\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$ είναι τα ***συνημίτονα κατεύθυνσης*** δηλ. τα συνημίτονα των γωνιών μεταξύ της διεύθυνσης διάδοσης και των αξόνων x,y,z αντίστοιχα. Οι επιφάνειες αυτές ονομάζονται ***μέτωπα κύματος(wavefronts)***. Το μέτωπο που περιγράψαμε προηγουμένως ήταν ένα επίπεδο μέτωπο κύματος. Για επίπεδο μέτωπο κύματος διαδιδόμενο κατά μήκος του άξονα $+z$ επειδή : $\cos\alpha=\cos\beta=0$ και $\cos\gamma=1$ θα είναι:

$$\mathbf{E}=\mathbf{E}_0 g(at-kz) \qquad \mathbf{E}_0=\text{σταθ.} \tag{1.2.4}$$

$$\left.\begin{array}{l}\mathbf{E}=\mathbf{E}(z,t)=E_{ox}g(at-kz)\mathbf{i}+E_{oy}g(at-kz)\mathbf{j}+E_{oz}g(at-kz)\mathbf{k}\\ E_{ox},\,E_{oy},\,E_{oz}:\text{σταθερές}\end{array}\right\} \tag{1.2.5}$$

Από τη (σχ. 1.1.6) της οποίας η αναλυτική μορφή είναι η:

$$\frac{\partial E_x}{\partial x}+\frac{\partial E_y}{\partial y}+\frac{\partial E_z}{\partial z}=0 \tag{1.2.6}$$

επειδή (σχ. 1.2.5) το ηλεκτρικό πεδίο είναι συνάρτηση μόνο του z θα έχουμε τελικά:

$$\frac{\partial E_z}{\partial z}=0 \tag{1.2.7}$$

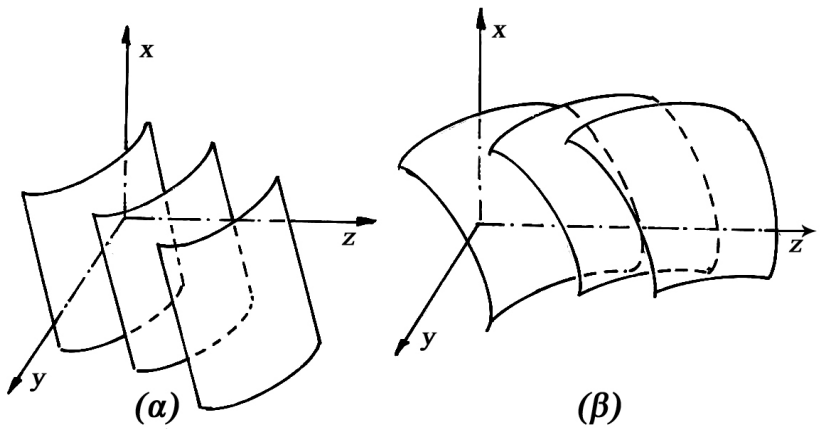
Οπότε: α) Αν $E_z=$ σταθ. τότε υπάρχει μια συνιστώσα του πεδίου σταθερή κατά τη διεύθυνση της διάδοσης χωρίς δηλ. να μεταβάλλεται με το z, γεγονός που δεν συνιστά κύμα. β) Αν $E_z=0$ τότε το Η/Μ κύμα δεν έχει καμιά συνιστώσα του ηλε-

κτρικού πεδίου προς τη διεύθυνση της διάδοσης. Άρα λοιπόν το επίπεδο κύμα που περιγράφεται από τη (σχ. 1.2.4) είναι αποκλειστικά ***εγκάρσιο(transverse)*** δηλ. οι διαταραχές του πεδίου συμβαίνουν κάθετα προς τη διεύθυνση διάδοσης. Τότε η (σχ. 1.2.5) μπορεί να γραφεί:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_o g(at - kz) = \left(E_{ox}\mathbf{i} + E_{oy}\mathbf{j}\right) g(at - kz) \qquad (1.2.8)$$

Σημείωση

Την εγκάρσια φύση των διαδιδόμενων Η/Μ κυμάτων την αποδείξανε με τη βοήθεια των επιπέδων μετώπων κύματος. Η διαφορική εξίσωση όμως της (σχ. 1.1.9) δέχεται και άλλες λύσεις, πιο γνωστές από τις οποίες είναι το ***κυλινδρικό***



(Σχ. 1.2.2)

(Σχ. 1.2.2α) και το ***σφαιρικό*** (Σχ. 1.2.2β) μέτωπο κύματος. Π.χ. για το σφαιρικό κύμα η λύση της (σχ. 1.1.9) θα είναι:

$$\mathbf{E}(x, y, z) = \frac{\mathbf{A}}{r} g(\alpha t \pm kr) \qquad r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \qquad (1.2.9)$$

δηλ. το πλάτος του κύματος δεν είναι σταθερό αλλά εξαρτάται από το r σε σχέση με την αρχή του συστήματος συντεταγμένων. Για $t = 0$ και $kr = \text{σταθ.}$ επειδή $k = \text{σταθ.}$ $\Rightarrow$ $r = \text{σταθ.}$ Η τελευταία σχέση σε σφαιρικό σύστημα συντεταγμένων παριστάνει μια ισοφασική επιφάνεια με μορφή σφαίρας. Σφαιρικά μέτωπα κύματος κατά τα γνωστά εκπέμπονται από ***σημειακές πηγές***.

1.3 *Ανάδειξη του φαινομένου της πόλωσης των Η/Μ κυμάτων. Επίπεδα αρμονικά Η/Μ κύματα. Γραμμικά πολωμένα κύματα*

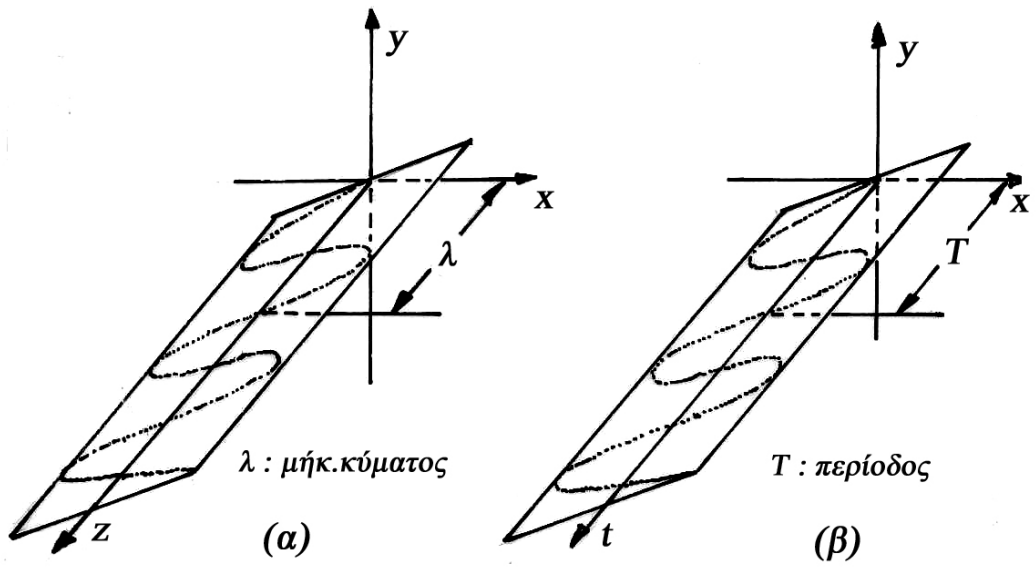
Προκειμένου το επίπεδο μέτωπο κύματος $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 g(\alpha t - kz)$ να προσδιοριστεί πλήρως, θα πρέπει να μπορούμε να καθορίσουμε επακριβώς στιγμή προς στιγμή και σημείο προς σημείο τη διεύθυνση του $\mathbf{E}$ παρά το ότι αυτό συνεχώς παραμένει πάνω στο επίπεδο x, y που είναι κάθετο στη διεύθυνση διάδοσης z. Η ανάγκη αυτή προκύπτει από το γεγονός ότι το πλάτος $\mathbf{E}_0$ της έντασης του ηλεκτρικού πεδίου είναι διανυσματικό μέγεθος που κατά τα γνωστά (σχ. 1.2.8) γράφεται:

$$\mathbf{E}_0 = E_{0x}\mathbf{i} + E_{0y}\mathbf{j} \qquad \left(E_{0x}, E_{0y} : \text{σταθερές}\right) \tag{1.3.1}$$

όπου $\mathbf{i}, \mathbf{j}$ τα μοναδιαία διανύσματα κατά τις διευθύνσεις x, y οπότε για το $\mathbf{E}$ θα έχουμε:

$$\mathbf{E} = (E_{0x}\mathbf{i} + E_{0y}\mathbf{j}) g(\alpha t - kz) \tag{1.3.2}$$

Η περιγραφή αυτή του $\mathbf{E}$ αναδεικνύει το φαινόμενο που είναι γνωστό σαν ***πόλωση του φωτός (polarization of light)*** και αποτελεί αντικείμενο της μελέτης μας.

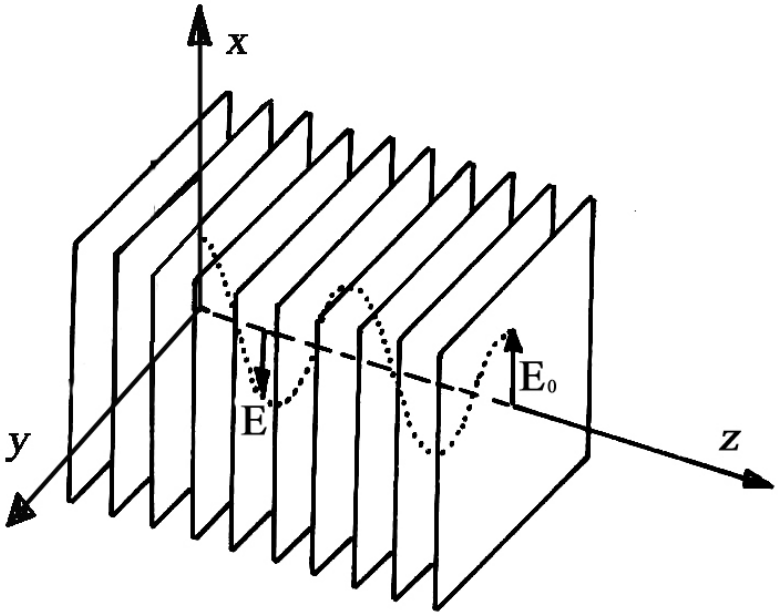


(Σχ. 1.3.1)

Στο μεγαλύτερό τους μέρος οι Η/Μ διαταραχές με τις οποίες ασχολούμαστε είναι αρμονικής φύσης δηλ. συνημιτονοειδούς μορφής $(g \equiv \cos)$, οπότε η (σχ. 1.3.2) παίρνει τη μορφή:

$$\mathbf{E} = (E_{0x}\mathbf{i} + E_{0y}\mathbf{j})\cos(\alpha t - kz) = (E_{0x}\mathbf{i} + E_{0y}\mathbf{j})\cos(\omega t - kz) \qquad (1.3.3)$$

όπου $\omega = 2\pi\nu$ και ν η συχνότητα ταλάντωσης του κύματος ($\nu = 1/T$ και T η περίοδός του). $k = 2\pi/\lambda$ όπου λ το μήκος κύματος. Η ταχύτητα διάδοσής του (π.χ. στο κενό), συνδέεται με τη συχνότητα και το μήκος κύματος με τη θεμελιώδη εξίσωση της κυματικής $c = \lambda\nu$. Θεωρούμε την ειδική περίπτωση όπου το διάνυσμα του πλάτους του αρμονικού κύματος έχει σταθερή διεύθυνση δηλ. το $\mathbf{E}$ μεταβάλλεται πάνω στο ίδιο πάντα επίπεδο το οποίο περιλαμβάνει τον άξονα z και είναι κάθετο στο επίπεδο x, y (***γραμμικά πολωμένο φως - linear polarized light***). Τότε για $t = 0$ (Σχ. 1.3.1α) βλέπουμε τη χωρική μεταβολή του, ενώ για $z = 0$ (Σχ. 1.3.1β) τη χρονική. Επίσης στο (Σχ. 1.3.2) μπορούμε να δούμε τη χωρική μεταβολή ενός επιπέδου αρμονικού μετώπου κύματος με τη διεύθυνση του $\mathbf{E}_0$ σταθερή (γραμμικά πολωμένο).



(Σχ. 1.3.2)

Συνήθως τα αρμονικά κύματα, λόγω της γραμμικότητας της διαφορικής εξίσωσης κύματος και της γραμμικότητας των πράξεων: πρόσθεσης, αφαίρεσης, διαφόρισης και ολοκλήρωσης, μπορούν να γραφούν με μιγαδική μορφή (βλ. ΕΡΓΑΣ/ΚΗ ΟΠΤΙΚΗ [3]: Ε.Σ.Σ.Φ ΠΑΡ/ΜΑ 1). Το γεγονός αυτό διευκολύνει τα μέγιστα την εκτέλεση πράξεων μεταξύ τους. Η (σχ. 1.3.3) λοιπόν που συνιστά και το φυσικό πεδιακό μέγεθος της έντασης $\mathbf{E}$ μπορεί να γραφεί σε μιγαδική μορφή:

$$\mathbf{E} = (E_{0x}\mathbf{i} + E_{0y}\mathbf{j})e^{i(\omega t - kz)} \qquad (1.3.4)$$

Αυτό το οποίο βλέπουμε τελικά από τις (σχ. 1.3.3,4) είναι ότι οι δύο συνιστώσες του πλάτους είναι αρμονικής μορφής:

$$E_x = E_{0x} e^{i(\omega t - kz)} \quad , \quad E_y = E_{0y} e^{i(\omega t - kz)} \tag{1.3.5}$$

οι οποίες όμως θα μπορούσαν να έχουν μεταξύ τους μια διαφορά φάσης (δηλ. να μην εμφανίζουν ταυτόχρονα μέγιστα και ελάχιστα). Για να το λάβουμε αυτό υπόψη μας μπορούμε να γράψουμε:

$$E_{0x} = A_x e^{i\phi_x} \quad , \quad E_{0y} = A_y e^{i\phi_y} \tag{1.3.6}$$

όπου τώρα τα A_x, A_y είναι πραγματικοί αριθμοί και ϕ_x, ϕ_y οι φάσεις των συνιστωσων αρμονικών διαταραχών στην αρχή του συστήματος συντεταγμένων. Ο παράγοντας $\phi = \phi_y - \phi_x$ ονομάζεται ***διαφορά φάσης(phase difference)***. Άρα:

$$\mathbf{E} = A_x e^{i(\omega t - kz + \phi_x)} \mathbf{i} + A_y e^{i(\omega t - kz + \phi_y)} \mathbf{j} \tag{1.3.7}$$

και αν θέσουμε όπου:

$$\mathbf{E} = E_x \mathbf{i} + E_y \mathbf{j} \tag{1.3.8}$$

τότε οι δύο κάθετες μεταξύ τους συνιστώσες που περιγράφουν το επίπεδο μέτωπο κύματος $\mathbf{E}$ θα είναι:

$$E_x = A_x e^{i(\omega t - kz + \phi_x)} \qquad E_y = A_y e^{i(\omega t - kz + \phi_y)} \tag{1.3.9}$$

και τα πραγματικά τους μέρη:

$$E_x = A_x \cos(\omega t - kz + \phi_x) \qquad E_y = A_y \cos(\omega t - kz + \phi_y) \tag{1.3.10}$$

Τελικά ένα επίπεδο αρμονικό Η/Μ κύμα, είναι η συνισταμένη δύο ορθογωνίων γραμμικά πολωμένων αρμονικών κυμάτων E_x, E_y της ίδια συχνότητας ω, καθέτων μεταξύ τους και διαδιδόμενων κατά τη διεύθυνση z, που έχουν μια διαφορά φάσης $\phi = \phi_y - \phi_x$. Μπορούμε τις συνιστώσες αυτές εφόσον συσχετίζονται μεταξύ τους

(δηλ. εφόσον διατηρούν σταθερή διαφορά φάσης μέσα στα όρια του μήκους συμφωνίας τους να τις ονομάσουμε '***σύμφωνες***' ή πιο αυστηρά '***συζευγμένες***'.

Σημείωση

Η ορολογία αυτή, παρά το ότι χρησιμοποιείται στη διεθνή βιβλιογραφία δεν είναι ακριβής. Οι δύο ορθογώνιες συνιστώσες, δεν έρχονται σε επαλληλία σαν ανεξάρτητες συσχετιζόμενες (correlated) διαταραχές προκειμένου να δώσουν φαινόμενα συμβολής (βλ. ΕΡΓΑΣ/ΚΗ ΟΠΤΙΚΗ [3]: Ε.Σ.Σ.Φ. Κεφ. 6), επειδή – όπως αποδεικνύεται για τις παραπάνω – η επαλληλία τους σχετίζεται με το εσωτερικό γινόμενο των πλατών τους, που η τιμή του όμως είναι μηδέν. Στην πραγματικότητα οι δύο ορθογώνιες συνιστώσες, από τον κάθε φορά τρόπο που παράγεται το φως που περιγράφουν, είναι ***συζευγμένες (coupled)*** (μέσα στα όρια συμφωνίας του εκάστοτε κυματοσυρμού (βλ. και (§ 4.2)), με αποτέλεσμα να μας δίνουν πάντα μια ορισμένη κατάσταση πόλωσης. Αν όμως π.χ. φέρουμε σε επαλληλία (διαδιδόμενες στην ίδια διεύθυνση) δύο ανεξάρτητες ορθογώνιες διαταραχές, το αποτέλεσμα τις επαλληλίας τους δεν θα σχετίζεται με μια συγκεκριμένη κατάσταση πόλωσης.

Τα φαινόμενα πόλωσης μας είναι αρκετό να τα περιγράψουμε, εφόσον γνωρίζουμε τα πλάτη A_x, A_y (ή το λόγο τους A_y / A_x) και τη διαφορά φάσης τους $\phi = \phi_y - \phi_x$. Στο (Κεφ. 3) από τη συσχέτιση των (σχ. 1.3.9) θα προκύψουν οι λεγόμενες ***καταστάσεις πόλωσης(polarization states)*** του φωτός μια από τις οποίες είναι και το γραμμικά πολωμένο φως.

Για την περιγραφή των φαινομένων της πόλωσης μας αρκεί το διάνυσμα $\mathbf{E}$ της έντασης του ηλεκτρικού πεδίου. Ισοδύναμα θα μπορούσαμε να τα περιγράψουμε και με τη βοήθεια του διανύσματος $\mathbf{B}$ της μαγνητικής επαγωγής. Αυτό οφείλεται στο ότι κατά τα γνωστά (βλ. ΠΑΡ/ΜΑ 2) οι συνιστώσες τους: α) είναι κάθετες μεταξύ τους β) συνδέονται με σταθερή σχέση αναλογίας (π.χ. $E_x = cB_y$) και γ) έχουν μεταξύ τους διαφορά φάσης ίση με το μηδέν.

2. *Μοντέλα εκπομπής και διάδοσης των Η/Μ κυμάτων, στο κενό και την ύλη*

Για την περιγραφή των φαινομένων της πόλωσης από ανάκλαση ή διάθλαση σε ισότροπα υλικά και κυρίως της διπλής διάθλασης από (ανισότροπους) κρυστάλλους με τη βοήθεια της Η/Μ θεωρίας, απαιτείται μια σχετικά περίπλοκη μαθηματική θεωρία την οποία περιγράφουμε στο (ΠΑΡ/ΜΑ 4). Για το λόγο αυτό και χάριν επαρκούς κατανόησης των φαινομένων με την βοήθεια απλούστερων διαδικασιών, θα περιγράψουμε ορισμένα γενικά μοντέλα για το πώς εκπέμπεται και διαδίδεται η Η/Μ ακτινοβολία μέσα στα προαναφερόμενα υλικά, τα οποία θ' αποτελέσουν και τη βάση ερμηνείας.

2.1 *Εκπομπή ακτινοβολίας από ηλεκτρικό δίπολο*

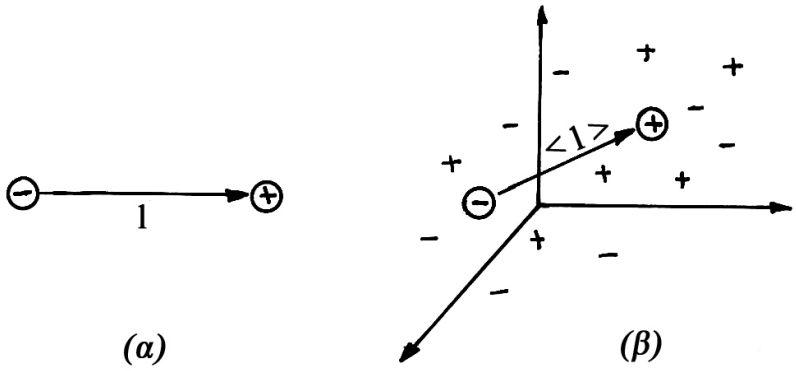
Σαν ηλεκτρικό δίπολο στην Η/Μ θεωρία, ονομάζουμε δύο ίσα κατά μέτρο αλλά αντιθέτου προσήμου ηλεκτρικά φορτία που βρίσκονται σε μια απόσταση l μεταξύ τους (Σχ. 2.1.1α). Ένα βασικό μέγεθος που περιγράφει το δίπολο είναι η ***ηλεκτρική διπολική ροπή(electric dipole moment)*** που εκφράζεται σαν το γινόμενο του ενός από τα φορτία επί την απόσταση μεταξύ τους:

$$\mathbf{p} = q\mathbf{l} \qquad (2.1.1)$$

Η ηλεκτρική διπολική ροπή είναι διανυσματικό μέγεθος με φορά από το αρνητικό προς το θετικό φορτίο. Η σπουδαιότητα αυτού του σχηματισμού οφείλεται στο ότι η ταλάντωση του ενός φορτίου π.χ. του αρνητικού σε σχέση με το θετικό, έχει σαν αποτέλεσμα τη γέννηση ενός διαδιδόμενου Η/Μ κύματος. Αν η ταλάντωση του διπόλου είναι αρμονική, τότε σε αρκετά μακρινή απόσταση – σε σχέση με την απόσταση μεταξύ των φορτίων – η Η/Μ διαταραχή θα είναι ένα αρμονικό κύμα της μορφής που περιγράψαμε στα προηγούμενα κεφάλαια.

Το ηλεκτρικό δίπολο δεν είναι μια τυπική σύνθεση δύο φορτίων και ο λόγος είναι ο εξής: Οποιοδήποτε μόριο ή άτομο με τη γνωστή κίνηση των ηλεκτρονίων σε σχέση με τον θετικά φορτισμένο πυρήνα του, αποδεικνύεται ότι κατά μέσο όρο χρονικά, είναι δυνατόν τελικά να κατανείμει τα αρνητικά και τα θετικά φορτία του σε δύο κέντρα βάρους (Σχ. 2.1.1β). Αποδεικνύεται επίσης ότι με βάση την παραπάνω κατανομή, τα πεδιακά μεγέθη: ένταση ηλεκ. πεδίου, δυναμικό, καθώς και ροπή όπως και η πρόσθετη δυναμική ενέργεια που αποκτά το σύστημα στο εσωτερικό άλλου ηλεκτρικού πεδίου είναι μορφολογικά πανομοιότυπα με αυτά του απλού διπόλου. Άρα λοιπόν προκύπτει το πολύ ενδιαφέρον συμπέρασμα ότι άτομα και μό-

ρια των οποίων τα φορτία υπόκεινται σε ταλαντώσεις, μπορούν να εκπέμψουν Η/Μ ακτινοβολία.



(Σχ. 2.1.1)

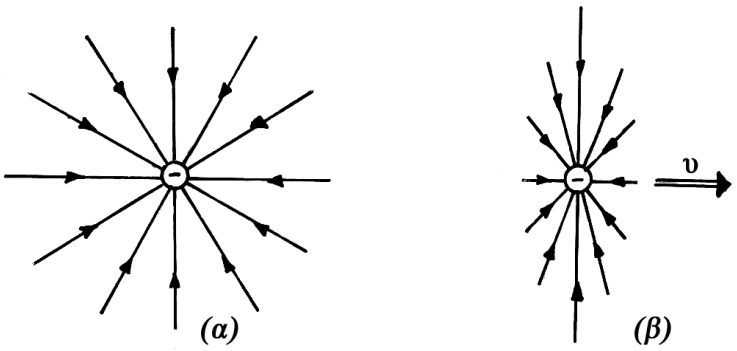
Σ' αυτά που θ' ακολουθήσουν, αρχικά περιγράφουμε τον τρόπο εκπομπής Η/Μ ακτινοβολίας από ένα επιταχυνόμενο γενικά ηλεκτρικό φορτίο. Με βάση αυτό το δεδομένο, κατόπιν, θα μελετήσουμε στοιχειωδώς το μοντέλο εκπομπής ακτινοβολίας από ένα ηλεκτρικό δίπολο.

Εκπομπή ακτινοβολίας από επιταχυνόμενο φορτίο

Είναι γνωστό κατ' αρχή, ότι στατικά φορτία ή φορτία που κινούνται με σταθερή ταχύτητα δεν εκπέμπουν Η/Μ ακτινοβολία. Δεν αναδεικνύεται δηλ. στις περιοχές ύπαρξης αυτών των πεδίων διάδοση ενέργειας με μορφή Η/Μ κυμάτων. Αναγκαία συνθήκη ανάπτυξης δυναμικού πεδίου (δηλ. χωρο−χρονικά μεταβαλλόμενου) είναι η στιγμιαία έστω επιτάχυνση των φορτίων. Στο (Σχ. 2.1.2α) παρατηρούμε το πεδίο ενός σημειακού στατικού αρνητικού φορτίου, δηλ. το μοντέλο των δυναμικών γραμμών της έντασης **Ε** του ηλεκτρικού πεδίου. Κατά τα γνωστά η πυκνότητα των δυναμικών γραμμών σ' ένα σημείο εκφράζει το μέτρο του **Ε** και η διεύθυνσή του είναι εφαπτομενική της δυναμικής γραμμής στο σημείο αυτό. Επίσης στο (Σχ. 2.1.2β) παρατηρούμε ένα αρνητικό ηλεκτ. φορτίο το οποίο κινείται με σταθερή ταχύτητα υ, που η τιμή της πλησιάζει αυτήν της ταχύτητας του φωτός c. Για την περίπτωση αυτή το πεδίο παρουσιάζει μια αξονική συμμετρία προς τη διεύθυνση που κινείται το φορτίο, με μεγαλύτερη πυκνότητα δυναμικών γραμμών κάθετα προς τη διεύθυνση αυτή, όπως προβλέπεται από την ειδική θεωρία της σχετικότητας.

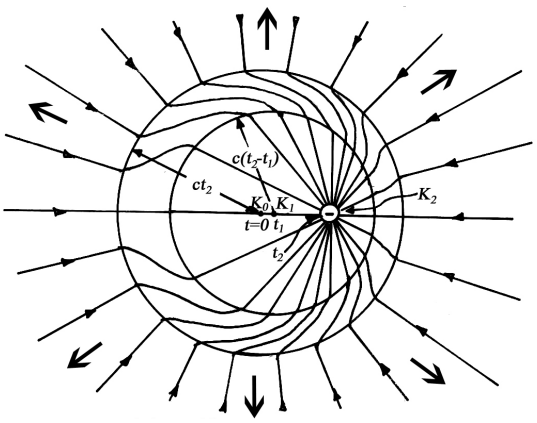
Για την περίπτωση που είναι πιο ενδιαφέρουσα (Σχ. 2.1.3), το αρνητικό φορτίο που θεωρείται αρχικά ακίνητο στη θέση K_0, επιταχύνεται μέχρι τη χρονική

στιγμή $t = t_1$ (θέση K_1). Στο τέλος αυτής της διαδρομής έχει αποκτήσει ταχύτητα υ, με την οποία φθάνει στο σημείο K_2 στο χρόνο $t = t_2$. Η επιτάχυνση 'συνέβη' μεταξύ των χωρικών διαστημάτων : $l_1 = ct_2$ (καμία διαταραχή δεν έχει υποστεί το πεδίο του φορτίου για $l > l_1$ δηλ. για την περίπτωση που ακόμα αυτό βρισκόταν στη θέση



(Σχ. 2.1.2)

K_0) και $l_2 = c(t_2 - t_1)$ (μέσα στον κύκλο με ακτίνα l_2, το πεδίο είναι αυτό του κινούμενου φορτίου με ταχύτητα υ) και $K_1K_2 = \upsilon(t_2 - t_1)$. Θα πρέπει εδώ να υπενθυμίσουμε ότι παρά το ότι το φορτίο κινείται με ταχύτητα υ, οι διαταραχές του Η/Μ πεδίου διαδίδονται (εγκαθίστανται σ' οποιοδήποτε σημείο του χώρου) με την ταχύτητα του φωτός.

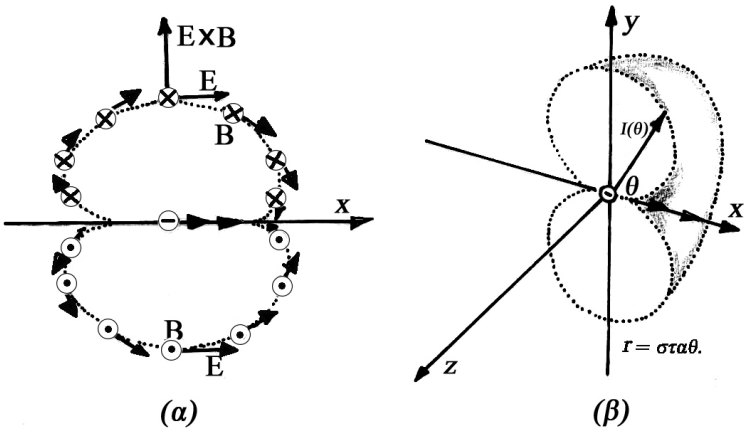


(Σχ. 2.1.3)

Αλλά ο νόμος του Gauss απαιτεί τη συνέχεια των δυναμικών γραμμών στην περίπτωση που δεν έχουμε ύλη στο εσωτερικό των δύο κύκλων. Άρα δημιουργείται όπως βλέπουμε στο μεσοδιάστημα μεταξύ των δύο έκκεντρων κύκλων (Σχ. 2.1.3) μια ***ιδιαιτερότητα*** της δομής των δυναμικών γραμμών. Σ' αυτό το χώρο είναι που

εμφανίζεται μια χρονική μεταβολή του ηλεκτρικού πεδίου. Η μεταβολή όμως αυτή με βάση τη (σχ. 1.1.8) αναπτύσσει μαγνητικό πεδίο επαγωγής **B**, κάθετο προς το ηλεκτρικό πεδίο κ.ο.κ. Έχουμε τελικά τη διάδοση μιας Η/Μ διαταραχής με τη μορφή ενός παλμού. Η ενέργεια του διαδιδόμενου παλμού, δίνεται από το περιβάλλον με τη μορφή έργου που εκτελείται πάνω στο φορτίο κατά τη διάρκεια της επιτάχυνσής του.

Είναι δυνατόν να προσδιορίσουμε – τουλάχιστον εδώ γραφικά – με τη βοήθεια του (Σχ. 2.1.3) τη μορφή της κατανομής της έντασης του ηλεκτρικού πεδίου (πάνω σ' ένα επίπεδο) στην περιοχή που εμφανίζεται το μεταβαλλόμενο πεδίο. Αρκεί στο κέντρο κάθε δυναμικής γραμμής στην περιοχή της ιδιομορφίας να φέρουμε την εφαπτόμενη. Η τελευταία θα μας δίνει τη διεύθυνση του **E** στο συγκεκριμένο σημείο (Σχ. 2.1.4α). Η φορά θα καθορίζεται από το πρόσημο του επιταχυνόμε-



(Σχ. 2.1.4)

νου φορτίου. Το μέτρο του **E** θα καθορίζεται κατά τα γνωστά από την πυκνότητα των δυναμικών γραμμών στο σημείο υπολογισμού του. Παρατηρούμε ότι κάθετα προς τη διεύθυνση κίνησης του αρνητικού φορτίου θα έχουμε τη μέγιστη τιμή της έντασης του **E** ενώ προς τη διεύθυνση κίνησης αυτή είναι μηδέν.

Το πώς κατανέμεται ενεργειακά η ακτινοβολία γύρο από το επιταχυνόμενο φορτίο φαίνεται στο (Σχ. 2.1.4β). Το μέγεθος το οποίο περιγράφει αυτή την κατανομή ονομάζεται ***ένταση ακτινοβολίας*** (***irradiance)*** (ένταση του φωτός αν πρόκειται για Η/Μ ακτινοβολία στην ορατή περιοχή του φάσματος). Η ένταση είναι ανάλογη του τετραγώνου του πλάτους του ηλεκτρικού πεδίου **E** και παριστάνει την ενέργεια ανά μονάδα χρόνου και ανά μονάδα επιφάνειας που διαδίδεται σε απόσταση $r = \text{σταθ.}$ από το φορτίο και σε γωνία θ σε σχέση με τη διεύθυνση κίνησής του. Συμβολίζεται με $I(\theta)$, είναι μονόμετρο μέγεθος και εκφράζεται σε μονάδες W/m^2. Η μορφή αυτής της κατανομής στο χώρο για $r = \text{σταθ.}$ φαίνεται στο (Σχ.

2.1.4β) και συνιστά ένα ***τοροειδές*** (στο σχήμα φαίνεται το μισό). Είναι πολύ εμφανές – όπως έχουμε αναφέρει προηγουμένως – ότι κατά τη διεύθυνση κίνησης του φορτίου δεν διαδίδεται ενέργεια.

Εκπομπή ακτινοβολίας από ηλεκτρικό δίπολο (βλ. ΕΡΓΑΣ/ΚΗ ΟΠΤΙΚΗ: [3] Ε.Σ.Σ.Φ. (Κεφ. 1), [5] Π.Α.Α.Φ. (Κεφ.4))

Η εκπομπή Η/Μ ενέργειας από την ύλη (στην κλασσική της περιγραφή) θεωρείται ότι γίνεται μέσω ταλαντώσεων των ηλεκτρικών διπόλων, με τα οποία ήδη έχουμε ταυτίσει κάθε μόριο ή άτομο. Στην πιο απλή περίπτωση τα δίπολα υποθέτουμε ότι εκτελούν το καθένα μια γραμμική αρμονική ταλάντωση. Θεωρούμε δηλ. ότι το αρνητικό φορτίο (ηλεκτρόνιο) κινείται σε σχέση με τον (ακίνητο) θετικό πυρήνα με την επίδραση μιας εξωτερικής δύναμης της μορφής:

$$F = qE(t) = qE_0 \cos \omega t \tag{2.1.2}$$

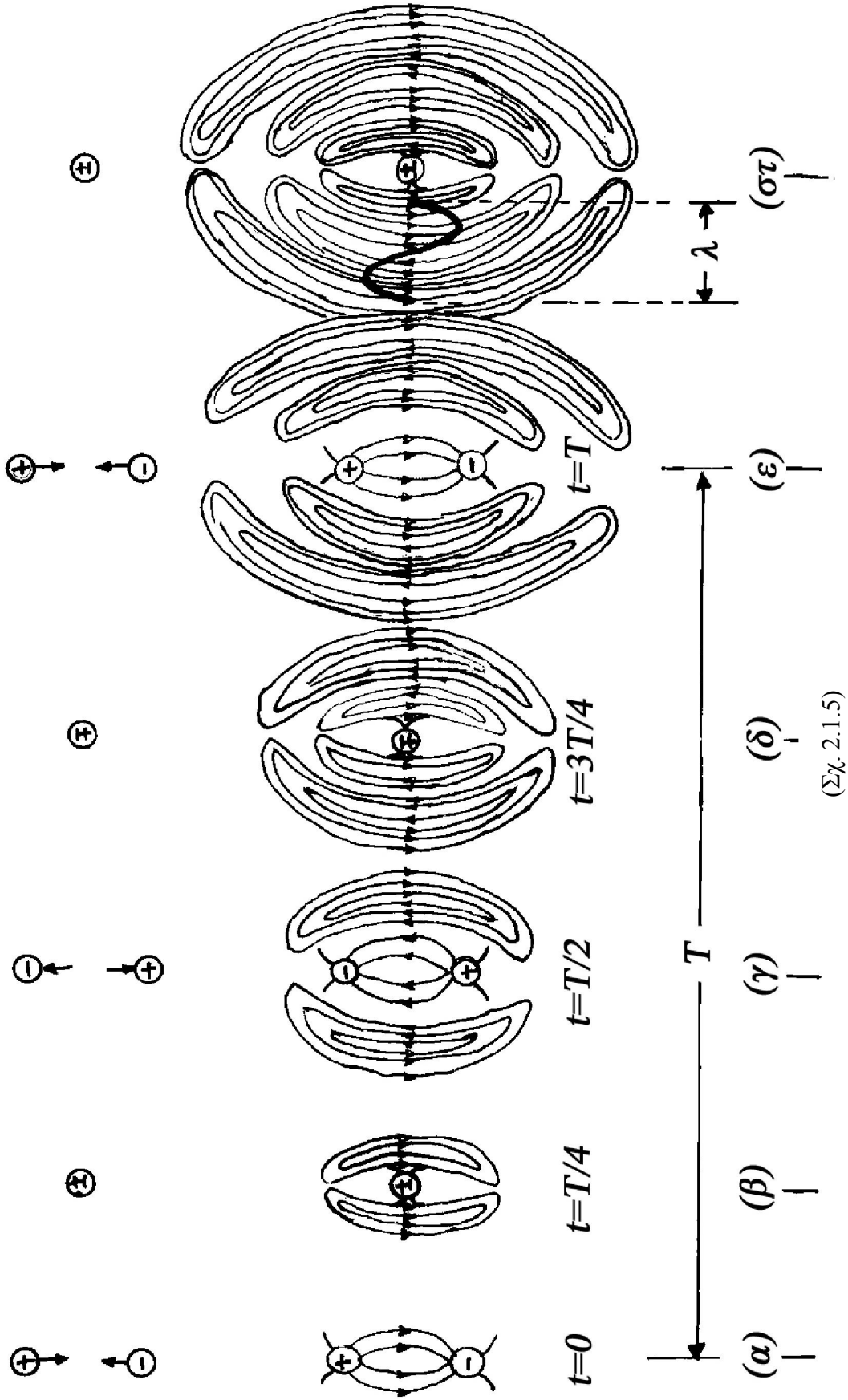
Και μιας δύναμης επαναφοράς που για μικρό πλάτος ταλαντώσεων ($\simeq 10^{-17}\,\mathrm{m}$) είναι:

$$F = -\kappa x \tag{2.1.3}$$

όπου $\kappa = \omega_0^2 m$. x η εκάστοτε απόσταση μεταξύ των φορτίων και κ μια σταθερή που δίνεται σαν το γινόμενο της μάζας του φορτίου (ηλεκτρονίου) επί το τετράγωνο της λεγόμενης ***φυσικής συχνότητας (natural frequency)*** ή ***συχνότητας συντονισμού***. Η συχνότητα ω_0 ($\omega_0 = 2\pi\nu_0$) στην πραγματικότητα είναι η συχνότητα ταλάντωσης του διπόλου όταν αυτό πάλλετε χωρίς την επίδραση εξωτερικής δύναμης. Άρα τελικά η κίνηση του φορτίου θα είναι επιταχυνόμενη και θα διέπεται από τη διαφορική εξίσωση:

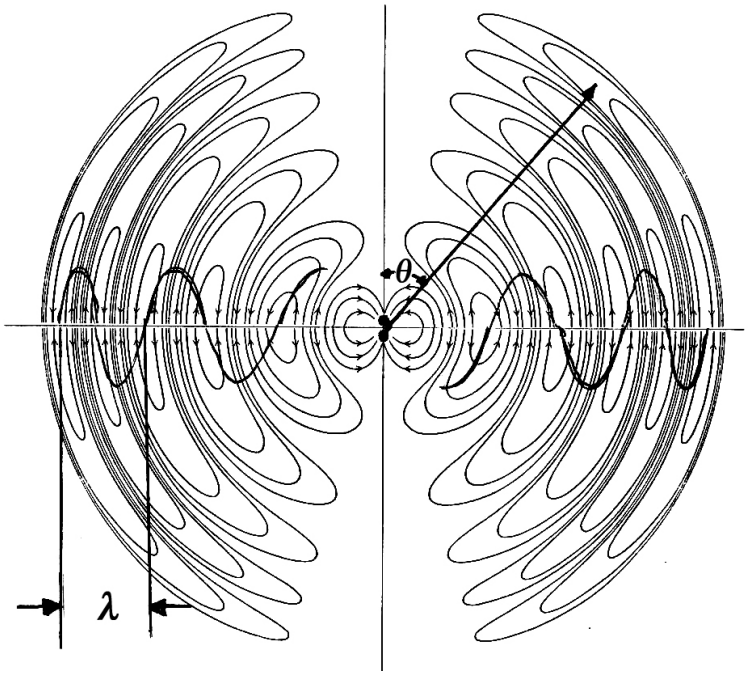
$$qE_0 \cos \omega t - m\omega_0^2 x = m\frac{d^2x}{dt^2} \tag{2.1.4}$$

Είναι δυνατόν – με όχι πολύ αυστηρό τρόπο – να σχεδιάσουμε την κατανομή της έντασης του ηλεκτρικού πεδίου $\mathbf{E}$ (δηλ. το μοντέλο των δυναμικών γραμμών) κατά τη διάρκεια της ταλάντωσης του ηλεκτρικού διπόλου. Η περιγραφή αυτή θα αφορά ένα επίπεδο, αυτό πάνω στο οποίο ταλαντεύεται το δίπολο για χρόνο ίσο με μια περίοδο T. Στη πραγματικότητα το μοντέλο στο χώρο θα προκύψει με την περιστροφή αυτού στο επίπεδο, γύρο από τον άξονα ταλάντωσης του διπόλου κατά 360^0.



(Σχ. 2.1.5)

Η εκκίνηση γίνεται (Σχ. 2.1.5α) από τη θέση των φορτίων στη μέγιστη απόσταση μεταξύ τους (θέση ισορροπίας) από όπου και το πρότυπο των δυναμικών γραμμών είναι το γνωστό του στατικού ηλεκτρικού διπόλου ($t = 0$). Στη δεύτερη φάση τα φορτία κινούνται και τείνουν να ταυτιστούν. Στη θέση αυτή περίπου οι δυναμικές γραμμές τείνουν να κλείσουν (Σχ. 2.1.5β), οπότε και σχηματίζεται ο πρώτος ανεξάρτητα διαδιδόμενος λοβός της Η/Μ ακτινοβολίας ($t = T/4$). Στην τρίτη φάση πάλι (Σχ. 2.1.5γ) έχουμε τη μέγιστη απόσταση των φορτίων (αν και σε αντίθετη θέση από ότι η αρχική θέση ισορροπίας) και την απαρχή γέννησης του δευτέρου λοβού ($t = T/2$).Στην τέταρτη φάση (Σχ. 2.1.5δ), έχουμε τη δεύτερη ταύτιση των φορτίων άρα και την ανεξάρτητη ύπαρξη του δεύτερου διαδιδόμενου λοβού ακτινοβολίας ($t = 3T/4$). Στην πέμπτη φάση (Σχ. 2.1.5ε) τα φορτία βρίσκονται στην αρχική τους θέση δηλ. η ταλάντωση συμπλήρωσε χρονικά μία περίοδο T ($t = T$). Παραπέρα ταύτιση των φορτίων (Σχ. 2.1.5στ) οδηγεί στη δημιουργία του τρίτου ανεξάρτητα διαδιδόμενου λοβού κ.ο.κ. Στο (Σχ. 2.1.6) εμφανίζονται οι λοβοί για



(Σχ. 2.1.6)

χρονικό διάστημα μεγαλύτερο της μίας περιόδου. Οι πυκνότερες περιοχές στο γράφημα των δυναμικών γραμμών αντιστοιχούν σε μέγιστες εντάσεις του ηλεκτρικού πεδίου ενώ οι μηδενικής πυκνότητας σε μηδενικές εντάσεις. Σε χρονικό διάστημα μίας περιόδου ($t = T$) έχουμε τη διάδοση της Η/Μ διαταραχής (του κύματος) σε απόσταση ίση με ένα ***μήκος κύματος(wave length)*** λ ($\lambda = cT$).

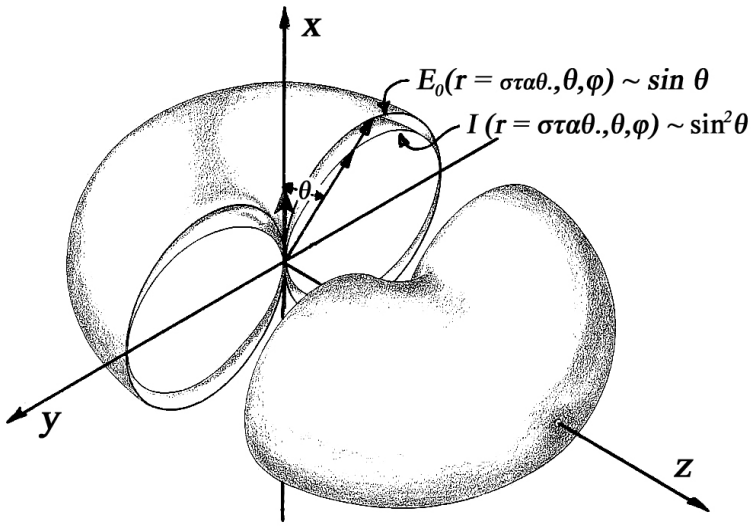
Από το (Σχ. 2.1.6) βλέπουμε χαρακτηριστικά ότι το μήκος κύματος δεν είναι σταθερό στην περιοχή κοντά στο ταλαντούμενο δίπολο. Πράγματι όπως αποδεικνύεται από την Η/Μ θεωρία στην περιοχή αυτή η ένταση του ηλεκ. πεδίου είναι αρκετά περίπλοκη και δίνεται από πέντε όρους (βλ. ΕΡΓΑΣ/ΚΗ ΟΠΤΙΚΗ [3]: Ε.Σ.Σ.Φ. (§1.2)). Εδώ εμάς μας ενδιαφέρει η περιοχή αρκετά μακριά από το ταλαντούμενο δίπολο, περιοχή που ονομάζεται ***ζώνη ακτινοβολίας(wave zone)***. Εκεί το μ.κ. σταθεροποιείται και η ένταση του ηλεκτρ. πεδίου (σε απόσταση r από το κέντρο ταλάντωσης και σε γωνία θ σε σχέση με τον άξονα του διπόλου) δίνεται από τη σχέση:

$$E(r,\theta) = \frac{p_0 k^2 \sin\theta}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\cos(\omega t - kr)}{r} = E_0(r,\theta)\cos(\omega t - kr) \qquad (2.1.5)$$

Όπου $p_0 = ql$ η μέγιστη ηλεκτρική διπολική ροπή, $k = 2\pi/\lambda = \omega/c$. Η ένταση της ακτινοβολίας $I(\theta)$ δίνεται γενικά από τη σχέση: $I = c\,\varepsilon_0 E_0^2/2$ όπου E_0 το πλάτος του E (βλ. ΕΡΓΑΣ/ΚΗ ΟΠΤΙΚΗ [5]:Π.Α.Α.Φ. (ΠΑΡ/ΜΑ 1)) οπότε:

$$I(\theta) = \frac{p_0^2 \omega^4}{32\pi^2 c^3 \varepsilon_0} \frac{\sin^2\theta}{r^2} \qquad (2.1.6)$$

Οι μορφές των συναρτήσεων $E_0(r,\theta)$ και $I(r,\theta)$ για $r = \text{σταθ.}$ σε πολικές συντεταγμένες στο χώρο ($r = \text{σταθ.}, \theta, \phi$) δίνονται στο (Σχ. 2.1.7).



(Σχ. 2.1.7)

Η εξωτερική επιφάνεια αντιστοιχεί στο πλάτος $E_0(r,\theta) = p_0 k^2 \sin\theta / 4\pi\varepsilon_0 r$, $r = \text{σταθ.}$

του $E(r,\theta)$ (σχ. 2.1.5) και η εσωτερική επιφάνεια στην ένταση $I(r,\theta)$, $r = \text{σταθ.}$ (σχ. 2.1.6). Οι μορφές και των δύο συναρτήσεων στο χώρο είναι τοροειδή, με το χαρακτηριστικό ότι στη διευθυνση ταλάντωσης δεν έχουμε εκπομπή ακτινοβολίας.

Σημείωση

Το πεδίο της μαγνητικής επαγωγής $\mathbf{B}$ – για την περιοχή της ζώνης ακτινοβολίας – είναι ορθογώνιο του $\mathbf{E}$ και τα δύο κάθετα προς τη διεύθυνση διάδοσης. Η διαφορά φάσης μεταξύ τους είναι μηδέν (βλ. ΠΑΡ/ΜΑ 2) και η διεύθυνση διάδοσης της ενέργειας είναι αυτή του διανύσματος Poynting ($\mathbf{S} = c^2\varepsilon_0 \mathbf{E} \times \mathbf{B}$).

2.2 *Διάδοση των Η/Μ κυμάτων σε ισότροπα και ανισότροπα υλικά. Το μοντέλο του μηχανικού ταλαντωτή του Lorentz*

Είναι βασικής σημασίας η κατανόηση του τρόπου με τον οποίο τα Η/Μ κύματα διαδίδονται στην ύλη και ειδικότερα στην περίπτωσή μας στα διηλεκτρικά: στερεά (ομογενή ισότροπα και ανισότροπα), υγρά και αέρια. Στην κατηγορία αυτή περιλαμβάνονται τα διάφορα είδη των γυαλιών, κρυσταλλικά υλικά, το νερό και άλλα υγρά, ο αέρας όπως και πολλά είδη αερίων. Για την περιοχή του ορατού φάσματος των ακτινοβολιών, τα προαναφερόμενα μέσα είναι ως επί το πλείστον διαφανή.

Σε γενικές γραμμές η διάδοση του φωτός στα διαφανή υλικά γίνεται μέσω της ταλάντωσης των ατομικών (ή μοριακών) διπόλων, το σύνολο των οποίων θεωρούμε ότι συνθέτουν το μέσο διάδοσης. Η ταλάντωση προκαλείται από τις δυνάμεις που ασκούνται στα ηλεκτρόνια από το πεδίο $\mathbf{E}$ της προσπίπτουσας Η/Μ ακτινοβολίας. Τα ατομικά δίπολα επανεκπέμπουν ταλαντούμενα όπως θα δούμε την ακτινοβολία με τη μορφή κυματίων, των οποίων η σύνθεση αποτελεί το διαδιδόμενο (διαθλώμενο) με μια ορισμένη ταχύτητα μέσα στο υλικό μέτωπο κύματος. Σαν ***δείκτη διάθλασης(refraction index)*** n ενός διαφανούς μέσου, ονομάζουμε τον λόγο της ταχύτητας διάδοσης του φωτός στο κενό προς αυτήν της διάδοσής του στο μέσο:

$$n = c/\upsilon \tag{2.2.1}$$

Επίσης με βάση τις προβλέψεις της θεωρίας του ***διασκεδασμού του φωτός(dispersion of light)*** (βλ. ΕΡΓΑΣ/ΚΗ ΟΠΤΙΚΗ [5]: Π.Α.Α.Φ. (§ 4.1)), ο δείκτης διάθλασης (δ.δ.) θα δίνεται από μια σχέση της μορφής:

$$n^2(\omega) = 1 + \frac{Nq_e^2}{\varepsilon_0 m_e}\left(\frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2}\right) \qquad (2.2.2)$$

δηλαδή εξαρτάται αντιστρόφως ανάλογα από τη διαφορά των τετραγώνων της φυσικής συχνότητας ταλάντωσης ω_0 των ηλεκτρονίων των ατόμων και των συχνοτήτων ταλάντωσης ω του προσπίπτοντος Η/Μ πεδίου. q_e, m_e είναι το φορτίο και η μάζα αντίστοιχα του ηλεκτρονίου και N ο αριθμός των ατόμων ανά μονάδα όγκου στο υλικό. Η (σχ. 2.2.2) είναι ενδεικτικά μια απλοποιημένη και ισχύει ακριβώς μόνο για πολύ αραιά αέρια που διαθέτουν μόνο μια συχνότητα συντονισμού ω_0. Θα τη χρησιμοποιήσουμε αν και με όχι αυστηρό τρόπο για να εξάγουμε συμπεράσματα όσον αφορά τη διάδοση στο εσωτερικό ισοτρόπων και ανισοτρόπων υλικών. Συγκεκριμένα θα συσχετίσουμε τις αναδεικνυόμενες συχνότητες συντονισμού στο εσωτερικό των υλικών με τους αντίστοιχους δ.δ. που προκύπτουν από τη (σχ. 2.2.2). Οι δ.δ. βέβαια με βάση τη (σχ. 2.2.1) σχετίζονται με τις αντίστοιχες ταχύτητες φάσης υ δηλ. με τις ταχύτητες διάδοσης των μετώπων κύματος στο εσωτερικό των υλικών. Τέλος ο τρόπος με τον οποίο απορροφούν ή σκεδανύουν τα άτομα ενός διηλεκτρικού την Η/Μ ακτινοβολία ανάγεται απλουστευτικά σε δύο κατηγορίες:

α) Σκέδαση συντονισμού (inelastic (resonant) scattering)

Συμβαίνει όταν η συχνότητα του προσπίπτοντος Η/Μ κύματος ταυτίζεται με τη φυσική συχνότητα συντονισμού ω_0 των ηλεκτρονίων των ατόμων του υλικού. Τότε θα έχουμε πρόσληψη της ενέργειας της ακτινοβολίας και μετάβαση των ηλεκτρονίων από τη θεμελιώδη τους στάθμη σε μία ανώτερη ενεργειακά. Είναι όμως σχεδόν βέβαιο ότι η συγκεκριμένη ενέργεια (που δεν επανεκπέμπεται με τη μορφή ακτινοβολίας) οδηγεί (μέσω των κρούσεων μεταξύ των ατόμων) σε αύξηση της εσωτερικής ενέργειας του υλικού δηλ. στη θέρμανσή του. Το φαινόμενο αυτό ονομάζεται γενικά ***απορρόφηση(absorption)***.

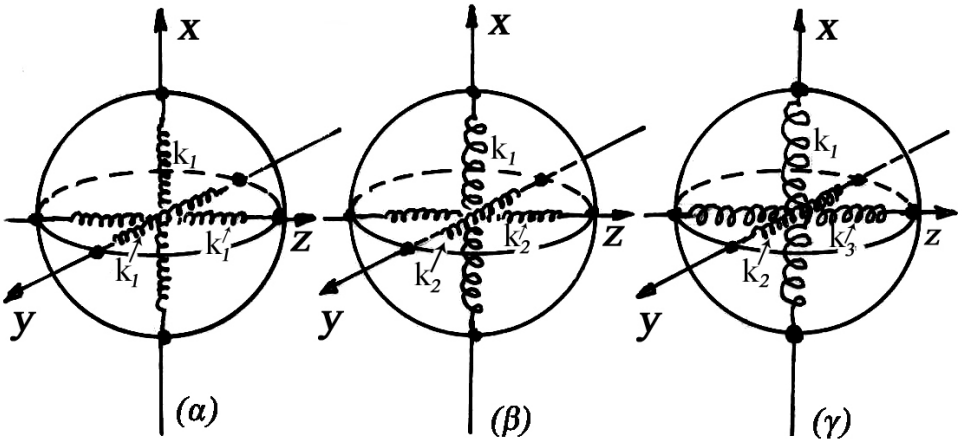
β) Ελαστική σκέδαση

Όταν η συχνότητα του προσπίπτοντος Η/Μ κύματος διαφέρει από αυτήν της συχνότητας συντονισμού των ηλεκτρονίων των ατόμων του υλικού, δεν υφίσταται μετάβαση τους σε ανώτερη ενεργειακή στάθμη. Μας είναι όμως ήδη γνωστό ότι τα άτομα σαν συστήματα (θετικών πυρήνων – αρνητικών ηλεκτρονίων) μπορούν να συμπεριφερθούν σαν ηλεκτρικά δίπολα. Τότε το προσπίπτον Η/Μ κύμα μέσω του μεταβαλλόμενου ηλεκτρικού του πεδίου ασκεί δυνάμεις και οδηγεί σε ταλάντωση

το ηλεκτρόνιο σε σχέση με τον πυρήνα του. Η ταλάντωση αυτή οδηγεί στην επανεκπομπή της προσλαμβανόμενης ενέργειας με τη μορφή Η/Μ ακτινοβολίας. Η συχνότητα της εκπομπής θα είναι αυτή της προσπίπτουσας. Το προαναφερόμενο φαινόμενο ανήκει στην περιοχή της μη συντονισμένης σκέδασης και ονομάζεται ***ελαστική σκέδαση(elastic scattering)***. Μπορούμε τελικά να θεωρήσουμε ότι τα άτομα ενός οπτικού μέσου (π.χ. ενός διηλεκτρικού) που φωτίζεται με ακτινοβολία εκτός της περιοχής των συχνοτήτων συντονισμού του (δηλ. διαφανούς), αποτελούν κατά προσέγγιση 'σημειακές' πηγές εκπομπής σφαιρικών κυματίων (βλ. Σχ. 2.1.6). Η επαλληλία των τελευταίων συγκροτεί το διαδιδόμενο (διαθλώμενο) μέσα στο υλικό μέτωπο κύματος.

Το μοντέλο του μηχανικού ταλαντωτή του Lorentz

Από όσα έχουμε αναφέρει μέχρις εδώ, βγαίνει το συμπέρασμα ότι κοινή συνιστώσα φαινόμενων όπως: της διάδοσης του φωτός στην ύλη ή της απορρόφησής του καθώς και του τρόπου της εκπομπής του φωτός (βλ. § 4.2), είναι τα ταλαντούμενα ατομικά ηλεκτρικά δίπολα. Μας είναι επίσης γνωστή (βλ. ΠΑΡ/ΜΑ 1) η Η/Μ θεωρία του Maxwell για τη διάδοση του φωτός στο κενό. Ο Lorentz προκειμένου να επεκτείνει την προαναφερόμενη θεωρία με κλασσικό τρόπο για τη διάδοση στην ύλη, έκανε τις εξής υποθέσεις: α) την ήδη γνωστή σ' εμάς ότι το φορτίο του ηλεκτρονίου περιβάλλει τον θετικό πυρήνα με τη μορφή ηλεκτρονικού νέφους και β) ότι το νέφος αυτό 'υποβαστάζεται' από τον πυρήνα μέσω 'ελατηρίων' (Σχ. 2.2.1)



(Σχ. 2.2.1)

των οποίων η σταθερή (σταθερή ελατηρίου) είναι η κ. Η ταλάντωση λοιπόν του ηλεκτρονικού νέφους σε σχέση με τον πυρήνα γίνεται με τη διαμεσολάβηση του

'ελατηρίου' όπου από τη γνωστή σχέση $\omega_0 = \sqrt{\kappa / m_e}$ προκύπτει η συχνότητα συντονισμού του συστήματος. m_e κατά τα γνωστά είναι η μάζα του ηλεκτρονίου.

Για τα ισότροπα υλικά (π.χ. γυαλί, νερό, αέρας) οι ιδιότητές τους είναι οι ίδιές προς οποιαδήποτε διεύθυνση. Τότε τα 'ελατήρια' έχουν όλα την ίδια σταθερή στις διευθύνσεις ενός τυχαία επιλεγμένου – στο εσωτερικό του οπτικού μέσου – τρισορθογωνίου συστήματος συντεταγμένων (Σχ. 2.2.1α). Το γεγονός σημαίνει ότι οι ασκούμενες στο δίπολο δυνάμεις επαναφοράς σε κάθε κατεύθυνση στο εσωτερικό του υλικού θα είναι ίδιες (σχ. 2.1.3). Ας υποθέσουμε τώρα ότι στο δίπολο ασκούνται εξωτερικές δυνάμεις εξαιτίας μιας προσπίπτουσας Η/Μ διαταραχής. Πράγματι το μεταβαλλόμενο ηλεκτρικό πεδίο της τελευταίας – αν θεωρήσουμε ότι πρόκειται π.χ. για ένα αρμονικό γραμμικά πολωμένο επίπεδο μέτωπο κύματος συχνότητας ω – δρα πάνω στα ηλεκτρόνια των ατόμων με την υπόθεση ότι οι πυρήνες παραμένουν ακίνητοι. Οι δυνάμεις αυτές επειδή είναι $\omega_0 = \text{σταθ.}$, θα δονούν το δίπολο με τον ίδιο ακριβώς τρόπο προς οποιαδήποτε διεύθυνση ασκούνται. Το γεγονός συνεπάγεται ότι με βάση τη (σχ. 2.2.2) ο δείκτης διάθλασης του υλικού θα είναι ο ίδιος προς κάθε κατεύθυνση στο εσωτερικό του όπως ίδια θα είναι και η ταχύτητα διάδοσης του φωτός (σχ. 2.2.1).

Δεν συμβαίνει όμως το ίδιο και για τα ***ανισότροπα*** υλικά δηλ. τους κρυστάλλους. Οι κρύσταλλοι είναι συνήθως στερεά που η εσωτερική τους δομή συνίσταται από διαδοχικές περιοδικές κατατάξεις ατόμων (οι μορίων) σε ευθείες, επίπεδα ή στο χώρο (βλ. Σχ. 5.3.11α). Σε αντίθεση, τα μόρια των ***ισότροπων*** υλικών δεν είναι διευθετημένα με ομαλό τρόπο (βλ. Σχ. 5.3.11β). Για την γενικότερη λοιπόν περίπτωση των ανισότροπων υλικών, στο μοντέλο του Lorentz θεωρούμε ότι το ηλεκτρονικό νέφος 'υποβαστάζεται' από τον πυρήνα με 'ελατήρια' που έχουν διαφορετικές σταθερές μεταξύ τους (Σχ. 2.2.1γ) για τις τρεις διευθύνσεις που σχηματίζουν τρισορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων. Οι διευθύνσεις αυτές είναι χαρακτηριστικές της δομής του εκάστοτε κρυστάλλου.

Θεωρούμε τώρα το γραμμικά πολωμένο φως, να διαδίδεται κάθετα (και το $\mathbf{E}$ να δονείται παράλληλα αντίστοιχα) προς τον καθένα από τους τρεις άξονες των 'ελατηρίων' μέσα στον κρύσταλλο. Γ' αυτές τις διευθύνσεις, επειδή οι ιδιοσυχνότητες ταλάντωσης είναι διαφορετικές (διαφορετικές σταθερές των 'ελατηρίων') έχουμε με βάση τη (σχ. 2.2.2) διαφορετικούς δείκτες διάθλασης άρα και διαφορετικές ταχύτητες διάδοσης του φωτός (σχ. 2.2.1). Σε διευθύνσεις διάδοσης που δεν ταυτίζονται με τους τρεις άξονες, προκύπτουν ενδιάμεσοι δ.δ. όπως και αντίστοιχες ταχύτητες διάδοσης. Βλέπουμε τελικά λοιπόν ότι ο συγκεκριμένος τρόπος διάταξης των μορίων στους κρυστάλλους οδηγεί σε ανάπτυξη δυνάμεων επαναφοράς μεταξύ των πυρήνων και των ηλεκτρονίων, διαφορετικών σε διαφορετικές διευθύνσεις με

συνέπεια την προαναφερόμενη διαφοροποίηση των δ.δ. και των ταχυτήτων διάδοσης του φωτός στο εσωτερικό τους.

Στην προκειμένη περίπτωση, μας ενδιαφέρουν ανισότροπα υλικά των οποίων η προσομοίωση των ατόμων τους με το μοντέλο του Lorentz δίνει δύο διευθύνσεις κάθετες μεταξύ τους που έχουν την ίδια σταθερή 'ελατηρίου'. Όχι όμως και η τρίτη διεύθυνση (Σχ. 2.2.1β). Τότε για διάδοση του φωτός κάθετη (και ταλάντωση του πεδίου παράλληλη) ως προς τους άξονες y και z, οι δ.δ. άρα και οι ταχύτητες διάδοσης είναι ίδιες ενώ για τον άξονα x διαφορετική. Δηλ. $n_y = n_z \neq n_x$ και ($\upsilon_y = \upsilon_z \neq \upsilon_x$). Ο άξονας x ονομάζεται ***οπτικός άξονας(optic axis)***. Οι άξονες y και z λόγω της συγκεκριμένης συμμετρίας αυτών των κρυστάλλων μπορούν να ληφθούν με οποιονδήποτε προσανατολισμό πάνω στο επίπεδο y,z αρκεί μεταξύ τους να είναι κάθετοι όπως και κάθετοι ως προς τον άξονα x.

Θα πρέπει επίσης να πούμε ότι ο οπτικός άξονας είναι μια συγκεκριμένη διεύθυνση στον κρύσταλλο και όχι μια αυστηρά οριοθετημένη γραμμή. Κρύσταλλοι με $n_y = n_z \neq n_x$ διαθέτουν έναν οπτικό άξονα και ονομάζονται ***μονοάξονες κρύσταλλοι(uniaxial crystals)***. Αυτοί για τους οποίους $n_y \neq n_z \neq n_x$ διαθέτουν δύο οπτικούς άξονες και ονομάζονται ***διάξονες κρύσταλλοι (biaxial crystals)***. Με βάση την κατάταξη των κρυστάλλων σε συστήματα συμμετρίας, οι μονοάξονες ανήκουν στα συστήματα: Τριγωνικό, Εξαγωνικό και Τετραγωνικό. Οι διάξονες ανήκουν στο: Ορθορομβικό, Μονοκλινές και Τρικλινές. Οι κρύσταλλοι του Κυβικού συστήματος συμπεριφέρονται ισότροπα.

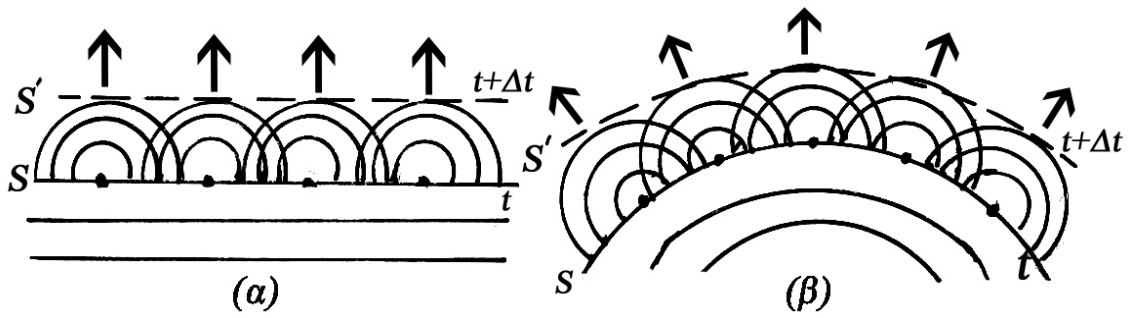
2.3 *Εφαρμογή της αρχής του Huygens, για τη διάδοση των μετώπων κύματος σε ισότροπα και ανισότροπα υλικά*

α) Η αρχή του Huygens για ισότροπα υλικά

Η συγκεκριμένη αρχή εφαρμόζεται για τον προσδιορισμό της μορφής ενός μετώπου κύματος σε μια ορισμένη χρονική στιγμή, όταν μας είναι γνωστή η μορφή του σε μια προηγούμενη. Στην (§ 1.3) είχαμε αναφέρει ότι το μέτωπο κύματος στο χώρο (για μια ορισμένη χρονική στιγμή) είναι μια νοητή επιφάνεια της διαδιδόμενης Η/Μ διαταραχής της οποίας τα σημεία έχουν την ίδια φάση. Οι νοητές γραμμές που ενώνουν αντίστοιχα σημεία στις διαδοχικές επιφάνειες των μετώπων κύματος και είναι κάθετες σ' αυτές ονομάζονται ***ακτίνες(rays)***. Η ορθογωνιότητα μεταξύ ισοφασικών επιφανειών και ακτίνων, ισχύει μόνο για τα ισότροπα υλικά.

Σύμφωνα με την αρχή του Huygens, κάθε σημείο ενός μετώπου κύματος αποτελεί πηγή εκπομπής ενός σφαιρικού ***κυματίου(wavelet)*** της ίδιας συχνότητας. Η περιβάλλουσα αυτών των κυματίων μετά από ένα χρονικό διάστημα θ' αποτελεί το νέο μέτωπο κύματος. Στα (Σχ. 2.3.1) επιδεικνύεται η εφαρμογή της αρχής για ένα επίπεδο και ένα σφαιρικό μέτωπο κύματος, που διαδίδονται σ' ένα ομογενές και ισότροπο μέσο με ταχύτητα υ. Σε χρόνο t τα αρχικά μέτωπα κύματος είναι οι επιφάνειες S. Σε χρόνο $t+\Delta t$ τα νέα μέτωπα κύματος (επιφάνειες S') προσδιορίζονται από την περιβάλλουσα των σφαιρικών κυματίων που γράφονται με κέντρα τα σημεία του μετώπου κύματος σε χρόνο t και ακτίνες $\upsilon\Delta t$.

Εδώ δεν μας ενδιαφέρει η διάδοση των κυματίων προς την αντίθετη διεύ-



(Σχ. 2.3.1)

θυνση της κίνησης των μετώπων κύματος, γεγονός που αποτελεί αντικείμενο εξέτασης στην θεωρία της περίθλασης του φωτός. Τέλος η αρχή του Huygens θα πρέπει να ξέρουμε ότι εφαρμόζεται για την ερμηνεία φαινομένων όπως είναι: η ευθύγραμμη διάδοση του φωτός σε ομογενή και ισότροπα μέσα, η ανάκλαση, η διάθλαση όπως και η ολική εσωτερική ανάκλαση, καθώς και για τη μη ευθύγραμμη διάδοση σε ανομοιογενή οπτικά μέσα.

β) Η αρχή του Huygens για ανισότροπα υλικά

Στα ανισότροπα υλικά κατά τα γνωστά, οι ιδιότητές τους είναι διαφορετικές σε διαφορετικές διευθύνσεις στο εσωτερικό τους. Η ιδιότητα η οποία μας ενδιαφέρει εδώ είναι η ταχύτητα διάδοσης του φωτός και πιο συγκεκριμένα για κρυστάλλους που χαρακτηρίζονται από ένα οπτικό άξονα (μονοάξονες κρύσταλλοι). Το πρόβλημα της διάδοσης του φωτός σε οποιαδήποτε διεύθυνση μέσα σ' ένα τέτοιο κρύσταλλο είναι μια αρκετά πολύπλοκη διαδικασία (βλ. ΠΑΡ/ΜΑ 4). Για το λόγο

Σημείωση

Υπάρχουν μεγέθη τα οποία περιγράφουν τις φυσικές ιδιότητες των διαφόρων υλικών. Όπως π.χ. η ***ηλεκτρική διαπερατότητα του μέσου (ε)*** (βλ. § 1.1, ή οποία καθορίζει την ταχύτητα διάδοσης του φωτός στο εσωτερικό του). Επίσης ένα άλλο παράδειγμα είναι ή ***αγωγιμότητα (σ)***(που μας δίνει την πυκνότητα του ηλ. ρεύματος στο εσωτερικό ενός αγωγού).Τα μεγέθη ε και σ έχουν όπως και πολλά άλλα όμως ***βαθμωτό*** χαρακτήρα μόνον για τις περιπτώσεις των ισοτρόπων υλικών (γυαλιά, αέρας, υγρά κ.τ.λ.) Τότε $D = \varepsilon E$ και $J = \sigma E$ και τα ε, σ είναι μονόμετρα μεγέθη. Στην περίπτωση όμως των κρυστάλλων (ανισότροπα υλικά), η ηλ. διαπερατότητα καθώς και η ηλ. αγωγιμότητα είναι ***τανυστές (tensors)***. Και οι σχέσεις με τις οποίες περιγράφονται τα προαναφερόμενα παραδείγματα είναι οι εξής:

$$D_i = \varepsilon_{ij} E_j \qquad (1) \qquad\qquad J_i = \sigma_{ij} E_j \qquad (2)$$

όπου ε_{ij} (ηλεκ. διαπερατότητα του μέσου) και σ_{ij} (αγωγιμότητα του μέσου) είναι τανυστές δεύτερης τάξης που ο καθένας ορίζεται από εννέα στοιχεία.

Πράγματι π.χ. η (σχ. 1) σε αναλυτική μορφή γράφεται:

$$\begin{aligned} D_1 &= \varepsilon_{11} E_1 + \varepsilon_{12} E_2 + \varepsilon_{13} E_3 \\ D_2 &= \varepsilon_{21} E_1 + \varepsilon_{22} E_2 + \varepsilon_{23} E_3 \\ D_3 &= \varepsilon_{31} E_1 + \varepsilon_{32} E_2 + \varepsilon_{33} E_3 \end{aligned}$$

Βλέπουμε δηλ. χαρακτηριστικά ότι η κάθε συνιστώσα D_i $(i = 1,2,3)$ του διανύσματος **D** (τανυστής πρώτης τάξης) της ***ηλεκτρικής μετατόπισης*** (βλ. ΠΑΡ/ΜΑ 1) δεν εξαρτάται από μια συνιστώσα E_i $(i = 1,2,3)$ της έντασης **E** του ***ηλεκτρικού πεδίου*** (τανυστής πρώτης τάξης) στο εσωτερικό του κρυστάλλου αλλά και από τις τρεις. Στο γεγονός αυτό οφείλεται και η πολυπλοκότητα υπολογισμού των ε_{ij} και κατά προέκταση των δ.δ. καθώς και των ταχυτήτων διάδοσης του φωτός σε διαφορετικές διευθύνσεις στο εσωτερικό των κρυστάλλων.

Στην περίπτωση όμως ενός ομογενούς ισοτρόπου μέσου (όπως π.χ. το γυαλί): $D = \varepsilon E$ (βλ. ΠΑΡ/ΜΑ 1 (σχ. Α3.8)) όπου τώρα η ηλεκτρ. διαπερατότητα ε του μέσου είναι μονόμετρο μέγεθος και σταθερό προς οποιαδήποτε κατεύθυνση στο εσωτερικό του γυαλιού. Επειδή όμως κατά τα γνωστά (βλ. ΠΑΡ/ΜΑ 1 (§ 3)) $k_e = \varepsilon / \varepsilon_0$ και $n = \sqrt{k_e}$, όπως και $\upsilon = c/n$, διαπιστώνουμε ότι και η ταχύτητα υ του φωτός θα είναι η ίδια προς οποιαδήποτε κατεύθυνση.

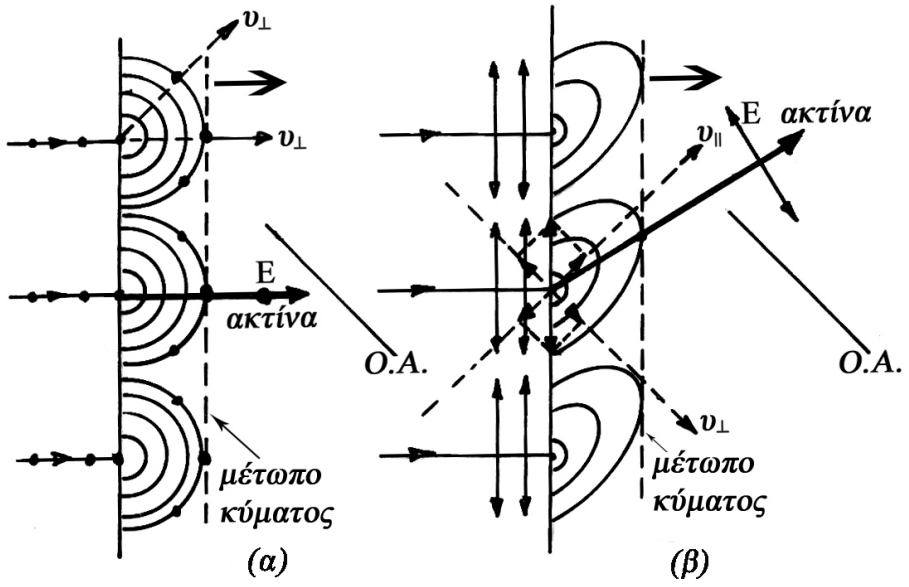
Ίδιοι περίπου συλλογισμοί μας οδηγούν στο να διαπιστώσουμε ότι η αγωγιμότητα του ηλεκτ. ρεύματος δεν είναι η ίδια σε διαφορετικές διευθύνσεις στο εσωτερικό ενός κρυστάλλου. Σ' έναν όμως ομογενή και ισότροπο αγωγό (π.χ. από Χαλκό) η αγωγιμότητα θα είναι η ίδια.

αυτό θα επιλέξουμε συγκεκριμένες διευθύνσεις διάδοσης, που με τη βοήθεια της αρχής του Huygens θα μπορούσαν να μελετηθούν με σχετική ευκολία. Θεωρούμε λοιπόν την κάθετη πρόσπτωση ενός επιπέδου γραμμικά πολωμένου μετώπου κύματος πάνω σε μια φυσική επιφάνεια ενός μονοάξονα κρυστάλλου. Η πρόσπτωση αυτή ταυτόχρονα γίνεται και παράλληλα με το επίπεδο που περιλαμβάνει τον οπτικό άξονα. Θα προσπαθήσουμε λοιπόν να ερμηνεύσουμε την ανάπτυξη των μετώπων κύματος σ' αυτό το επίπεδο (το επίπεδο των (Σχ. 2.3.2)). Την τυχαία διεύθυνση πόλωσης του προσπίπτοντος γραμμικά πολωμένου φωτός μπορούμε να την αναλύσουμε σε δύο συνιστώσες: μία κάθετη προς τον οπτικό άξονα (•) (Σχ. 2.3.2α) και μια παράλληλη προς το επίπεδο που περιλαμβάνει τον οπτικό άξονα (↔) (Σχ. 2.3.2β).

Γνωρίζουμε από την (§ 2.2) ότι για μονοάξονα κρύσταλλο και για διάδοση που αντιστοιχεί σε ταλάντωση του **E** κάθετα στον οπτικό άξονα (Σχ. 2.3.2α), η ταχύτητα διάδοσης είναι η ίδια προς οποιαδήποτε διεύθυνση. Άρα με βάση την αρχή του Huygens, τα δευτερεύοντα κυμάτια που διαδίδονται μέσα στον κρύσταλλο είναι σφαιρικές επιφάνειες που κινούνται με ταχύτητα $\upsilon_{\perp}$. Πράγματι επειδή η ιδιοσυχνότητα ταλάντωσης των ηλεκτρονίων για τις διευθύνσεις αυτές είναι η ίδια, θα έχουμε και τον ίδιο δ.δ. άρα και την ίδια ταχύτητα διάδοσης. Τελικά η περιβάλλουσα αυτών των κυματίων θα είναι ένα επίπεδο μέτωπο κύματος το οποίο θα διαδίδεται μέσα στον κρύσταλλο στην ίδια διεύθυνση με την προσπίπτουσα και θα είναι γραμμικά πολωμένο κάθετα προς τον οπτικό άξονα.

Θα εξετάσουμε τώρα τι ακριβώς θα συμβεί όταν η προσπίπτουσα στον κρύσταλλο διαταραχή είναι παράλληλη προς το επίπεδο που περιλαμβάνει τον οπτικό άξονα (Σχ. 2.3.2β). Στην προκειμένη περίπτωση αυτή αναλύεται σε δύο συνιστώσες, μια κάθετη και μία παράλληλη σε σχέση με τον οπτικό άξονα. Η κάθετα ταλαντούμενη κατά τα γνωστά διαδίδεται με ταχύτητα $\upsilon_{\perp}$. Η παράλληλη προς τον οπτικό άξονα συνιστώσα, δονεί τα ηλεκτρόνια σ' αυτή τη διεύθυνση. Τα τελευταία όμως για την περίπτωση αυτή έχουν διαφορετική ιδιοσυχνότητα ταλάντωσης. Άρα με βάση τη (σχ. 2.2.2) σ' αυτή τη διεύθυνση διάδοσης θα έχουμε και διαφορετικό δ.δ. άρα και διαφορετική ταχύτητα διάδοσης (ίση με $\upsilon_{\parallel}$).Έστω ότι $\upsilon_{\parallel} > \upsilon_{\perp}$. Μένει να δούμε τώρα ποια θα είναι η μορφή των δευτερευόντων κυματίων με βάση την αρχή του Huygens.

Κατ' αρχή (Σχ. 2.3.2β) υποθέτουμε ότι μόλις τα κυμάτια αρχίσουν να διαδίδονται στον κρύσταλλο είναι σφαιρικές επιφάνειες. Σε μια μεταγενέστερη όμως χρονική στιγμή, λόγω της διαφορετικής ταχύτητας διάδοσης σε διευθύνσεις κάθετα και παράλληλα ως προς τον οπτικό άξονα, τα κυμάτια χάνουν τη σφαιρικότητά τους και επιμηκύνονται προς τη διεύθυνση εκεί που η ταχύτητα είναι μεγαλύτερη. Το γεγονός θα έχει σαν συνέπεια να καθίστανται ελλειψοειδή εκ περιστροφής σε σχέση με τον οπτικό άξονα. Το διαδιδόμενο μέτωπο κύματος μέσα στον κρύσταλλο για την περίπτωση αυτή βρίσκεται αν κατά τα γνωστά φέρουμε την περιβάλλουσα



(Σχ. 2.3.2)

των ελλειψοειδών κυματίων. Πρόκειται για ένα επίπεδο μέτωπο κύματος γραμμικά πολωμένο παράλληλα με το επίπεδο στο οποίο βρίσκεται ο οπτικός άξονας, με το **E** να ταλαντεύεται κάθετα στην ***ακτίνα διάδοσης(ray direction)***. Πρόκειται για ένα επίπεδο μέτωπο κύματος παράλληλο με το προσπίπτον στον κρύσταλλο, αλλά με διεύθυνση διάδοσης προς τα πάνω και δεξιά. Η διεύθυνση αυτή καθορίζεται από την ευθεία που ενώνει το σημείο εκπομπής ενός κυματίου στην επιφάνεια του κρυστάλλου, με το αντίστοιχο σημείο στο οποίο εφάπτεται το ελλειψοειδές με την περιβάλλουσα (δηλ. το μέτωπο κύματος). Είναι η διεύθυνση της ακτίνας διάδοσης και όπως αποδεικνύεται είναι η διεύθυνση στην οποία διαδίδεται η ενέργεια της διαταραχής. Άρα για διάδοση γενικά του φωτός σε ανισότροπα υλικά και ειδικότερα για την περίπτωση που εξετάζουμε εδώ, οι ακτίνες φωτός δεν είναι κάθετες στα μέτωπα κύματος.

Συμπεραίνουμε τελικά ότι, όταν γενικά πάνω σε μια επιφάνεια ενός μονοάξονα κρυστάλλου προσπέσει κάθετα ένα επίπεδο γραμμικά πολωμένο μέτωπο κύ-

ματος το οποίο αναλυόμενο θα μας δώσει δυο συνιστώσες – μια κάθετη προς τον οπτικό άξονα και μια παράλληλη προς το επίπεδο που τον περιέχει – θα συμβεί το εξής: Μέσα στον κρύσταλλο θ' αναπτυχθούν δύο επίπεδα μέτωπα κύματος. Θα είναι γραμμικά πολωμένα και ορθογώνια μεταξύ τους με διευθύνσεις διάδοσης (των ακτινών τους) διαφορετικές. Το φαινόμενο ονομάζεται ***διπλή διάθλαση(double refraction)*** του φωτός και θα είναι το αντικείμενο μελέτης του (Κεφ. 5). Αναφέρουμε τέλος ότι για τις περιπτώσεις που το προσπίπτον μέτωπο κύματος είναι πολωμένο αποκλειστικά κάθετα ή παράλληλα με το επίπεδο που βρίσκεται ο οπτικός άξονας, τότε στον κρύσταλλο θα διαδοθεί μόνο το αντίστοιχο μέτωπο κύματος.

3 *Περιγραφή των καταστάσεων πόλωσης του φωτός*

Στην (§ 1.3) είχαμε αποδείξει ότι η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου **E** ενός επιπέδου αρμονικού Η/Μ κύματος, το οποίο διαδίδεται προς τη διεύθυνση z, είναι δυνατόν να παρασταθεί από την 'επαλληλία' (σύζευξη) δύο αρμονικών συνιστωσών ορθογωνίων μεταξύ τους και καθέτων προς την διεύθυνση διάδοσης z δηλαδή:

$$\mathbf{E} = E_x\mathbf{i} + E_y\mathbf{j}$$

$$E_x = A_x e^{i(\omega t - kz + \phi_x)} \quad ή \quad E_x = A_x \cos(\omega t - kz + \phi_x)$$
$$E_y = A_y e^{i(\omega t - kz + \phi_y)} \quad ή \quad E_y = A_y \cos(\omega t - kz + \phi_y)$$

Στη γενικότερη περίπτωση τα πλάτη των συνιστωσών A_x, A_y – που είναι πραγματικοί αριθμοί – έχουν διαφορετική τιμή όπως και οι φάσεις με τις οποίες εκκινούν οι διαταραχές από την αρχή του συστήματος συντεταγμένων $z = 0$ στο χρόνο $t = 0$. Οι συνιστώσες E_x, E_y θα έχουν μια σταθερή διαφορά φάσης $\phi = \phi_y - \phi_x$ (πάντα βέβαια στα όρια του χρόνου συμφωνίας). Οι δύο δηλαδή αρμονικές συνιστώσες θα είναι κάθετες και σύμφωνες μεταξύ τους, οπότε η επαλληλία τους, ανάλογα με τις τιμές των πλατών (ή πιο συγκεκριμένα του λόγου τους $r = E_y / E_x$) και τη διαφορά φάσης τους $\phi = \phi_y - \phi_x$, θα μας δίνει το συνιστάμενο κύμα. Το τελευταίο θα χαρακτηρίζεται όπως λέμε από μια συγκεκριμένη ***κατάσταση πόλωσης (polarization state)***.

Θα διαπιστώσουμε ότι σε κάθε περίπτωση, το διάνυσμα **E** του ηλεκτρικού πεδίου και αντιπροσωπευτικά το άκρο του, διαγράφει χρονικά (δηλ. για $z = 0$) μια καμπύλη στο επίπεδο ταλάντωσης το κάθετο στον άξονα των z. Στη γενικότερη περίπτωση η καμπύλη αυτή είναι μια έλλειψη (ελλειπτικά πολωμένο φως). Κατά τη χωρική του μεταβολή επίσης (δηλ. για $t = 0$), το άκρο του διανύσματος **E** διαγράφει μια ελλειπτική έλικα στο χώρο κατά τη διεύθυνση του άξονα z. Στα επόμενα περιγράφουμε τις διάφορες καταστάσεις πόλωσης, αρχής γινομένης από την γενικότερη που είναι η ελλειπτική. Για μια πληρέστερη περιγραφή (βλ. Άσκ.1-Λυμένη).

3.1 *Ελλειπτικά πολωμένο φως*

Στη γενικότερη περίπτωση το διάνυσμα του ηλεκτρικού πεδίου

$$\mathbf{E} = E_x\mathbf{i} + E_y\mathbf{j} \tag{3.1.1}$$

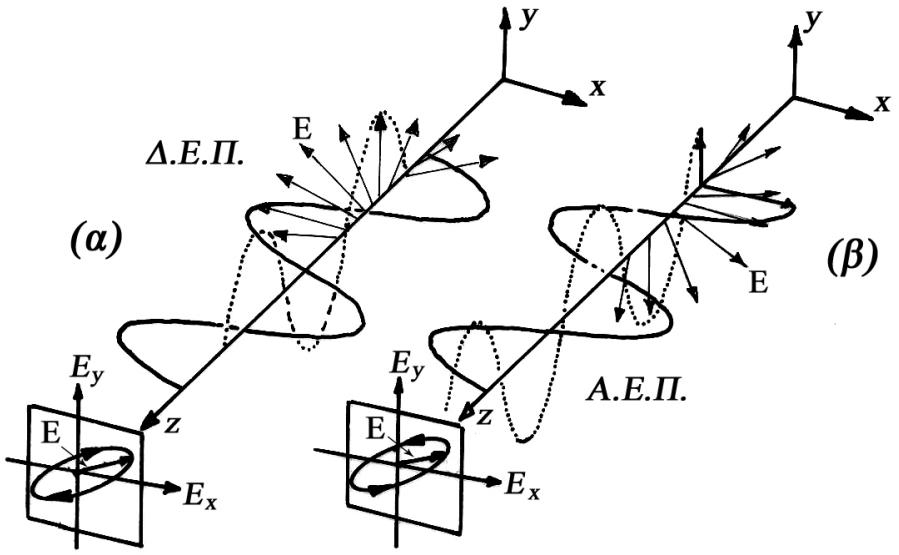
με συνιστώσες:

$$E_x = A_x \cos(\omega t - kz + \phi_x)$$
$$E_y = A_y \cos(\omega t - kz + \phi_y) \qquad (3.1.2)$$

θα έχει: $A_x \neq A_y$ και $\phi = \phi_y - \phi_x$ όπου $0 \leq \phi < 2\pi$. Έχουμε ήδη αναφέρει όμως (§ 3) ότι μπορούμε να καθορίσουμε την κατάσταση πόλωσης του Η/Μ κύματος από τη συμπεριφορά του άκρου του διανύσματος **E** κατά τη χωροχρονική μεταβολή του τελευταίου. Αυτό είναι δυνατόν να το ελέγξουμε παραμετρικά επειδή η θέση του άκρου του **E** καθορίζεται από τις συνιστώσες των E_x, E_y με βάση τις (σχ. 3.1.2). Αρκεί λοιπόν από αυτές να απαλείψουμε τον όρο $\omega t - kz$. Μια σειρά τριγωνομετρικών πράξεων (βλ.Άσκ.1-Λυμένη) μας οδηγεί στη σχέση:

$$\left(\frac{E_x}{A_x}\right)^2 + \left(\frac{E_y}{A_y}\right)^2 - 2\left(\frac{E_x}{A_x}\right)\left(\frac{E_y}{A_y}\right)\cos\phi = \sin^2\phi \qquad (3.1.3)$$

Αποδεικνύεται ότι η τελευταία είναι εξίσωση κωνικής τομής στο επίπεδο E_x, E_y και πιο συγκεκριμένα εξίσωση έλλειψης. Για την περίπτωση λοιπόν όπου $A_x \neq A_y$ ή $\left(A_x = A_y \text{ και } \varphi \neq \pi/2\right)$ το άκρο του διανύσματος **E** διαγράφει για $z = 0$ μια έλλειψη και για $t = 0$ μια ελλειπτική έλικα (Σχ. 3.1.1). Το φως με τις παραπάνω ιδιότητες

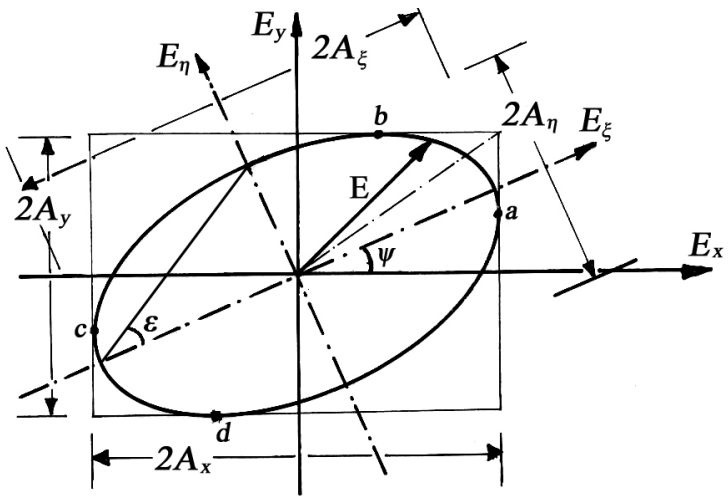


(Σχ. 3.1.1)

ονομάζεται ***ελλειπτικά πολωμένο(elliptical polarized)***. Διακρίνουμε ελλειπτικά πολωμένο φως ***δεξιόστροφο(right-circularly)*** (Δ.Ε.Π.) (Σχ. 3.1.1α) και ***αριστερό-***

στροφο(left- circularly) (Α.Ε.Π.) (Σχ. 3.1.1β). Τα τελευταία, ανάλογα με το αν καθώς το φως διαδίδεται από την πηγή προς τα εμάς (για $z = 0$) βλέπουμε το άκρο του διανύσματος **E** χρονικά να περιστρέφεται κατά τη φορά των δεικτών του ωρολογίου ή αντίθετα.

Η έλλειψη αυτή (Σχ. 3.1.2) είναι εγγεγραμμένη σε ορθογώνιο διαστάσεων $2A_x \times 2A_y$ με πλευρές παράλληλες με τους άξονες E_x, E_y και εφάπτεται στα σημεία: $a\left(A_x, A_y \cos\phi\right), b\left(A_x \cos\phi, A_y\right), c\left(-A_x, -A_y \cos\phi\right), d\left(-A_x \cos\phi, -A_y\right)$. Συνήθως οι κύριοι



(Σχ. 3.1.2)

άξονες της έλλειψης δεν συμπίπτουν με τους άξονες E_x, E_y. Για το λόγο αυτό προσδιορίζουμε τη γωνία ψ που ονομάζεται ***αζιμουθιακή γωνία(azimuthal angle)*** της έλλειψης και είναι αυτή που καθορίζεται από τη γωνία μεταξύ του άξονα E_x και του άξονα E_ξ που ταυτίζεται με τον μεγάλο άξονα της έλλειψης. Υποθέτουμε ότι οι παραμετρικές εξισώσεις της έλλειψης ως προς το σύστημα συντεταγμένων E_ξ, E_η δίνονται από τις σχέσεις:

$$\begin{aligned} E_\xi &= A_\xi \cos(\omega t - kz + \phi_0) \\ E_\eta &= \pm A_\eta \sin(\omega t - kz + \phi_0) \end{aligned} \qquad (3.1.4)$$

(+) αριστερόστροφη και (-) δεξιόστροφη περιστροφή του άκρου του διανύσματος του πεδίου για φως ερχόμενο προς τον παρατηρητή. Δεδομένων των σχέσεων μετασχηματισμού των δύο συστημάτων συντεταγμένων E_x, E_y και E_ξ, E_η (βλ. Άσκ. 17-Λυμένη) θα έχουμε:

$$E_\xi = E_x \cos\psi + E_y \sin\psi$$
$$E_\eta = -E_x \sin\psi + E_y \cos\psi \qquad (3.1.5)$$

όπου $0 \le \psi < \pi$. Τότε με συσχετισμό των (σχ. 3.1.2,5)(Άσκ. 1-Λυμένη) μπορούμε να βρούμε ότι:

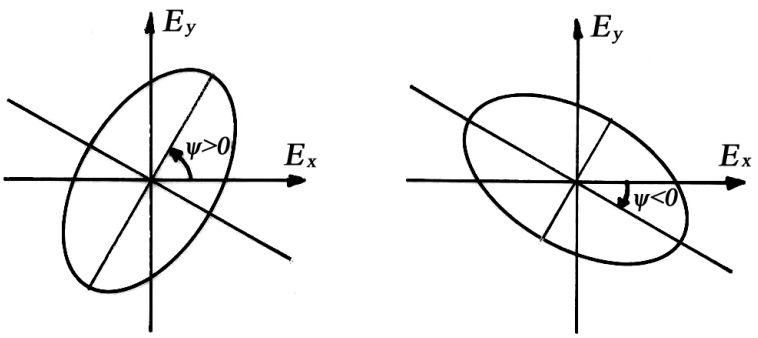
α) $$e = \tan\varepsilon = \frac{\pm A_\eta}{A_\xi} = \frac{A_x \sin\phi_x \sin\psi - A_y \sin\phi_y \cos\psi}{A_x \cos\phi_x \cos\psi + A_y \cos\phi_y \sin\psi} \qquad (3.1.6)$$

όπου ο λόγος $e = A_\eta / A_\xi$ μας δίνει την εκκεντρότητα (ή ελλειπτικότητα) της έλλειψης με $-\pi/4 \le \varepsilon \le \pi/4$. Τα πρόσημα στη (σχ. 3.1.6) – όπως ήδη αναφέραμε – μας δίνουν τη φορά περιστροφής: (+) αριστερόστροφη και (–) δεξιόστροφη.

β) Η γωνία ψ δίνεται από τη σχέση:

$$\tan 2\psi = \frac{2A_x A_y}{A_x^2 - A_y^2} \cos\phi \qquad (3.1.7)$$

όπου $0 \le \psi < \pi$ ή $-\pi/2 \le \psi < \pi/2$. Στο (Σχ. 3.1.3) βλέπουμε για $\psi > 0$ ή $\psi < 0$ τις



(Σχ.3.1.3)

σχετικές κλίσεις του μεγάλου άξονα της έλλειψης μιας ορισμένης εκκεντρότητας σε σχέση με τον άξονα E_x. Είναι δυνατόν επίσης τη φορά περιστροφής του **E** να την προσδιορίσουμε με τη βοήθεια των (σχ. 3.1.2). Πράγματι για $z = 0$ και $t = 0,\ T/4,\ 3T/4$ κ.λ.π. με $\omega = 2\pi/T$, βρίσκουμε κάθε φορά το μέτρο και τη θέση του **E**, εφόσον προσδιορίζουμε τις συνιστώσες του (E_x, E_y). Η φορά περιστροφής του **E** μας δίνει και τη στροφικότητα του πολωμένου φωτός. Επίσης αποδεικνύεται ότι η στροφικότητα εξαρτάται από τις τιμές της διαφοράς φάσης ϕ ως εξής:

$$0 < \phi < \pi \quad : \quad \text{Δεξιόστροφα πολωμένο φως}$$
$$\pi < \phi < 2\pi \quad : \quad \text{Αριστερόστροφα πολωμένο φως} \tag{3.1.8}$$

Παράδειγμα

Να προσδιοριστεί η κατάσταση πόλωσης του επιπέδου μετώπου κύματος της μορφής:

$$\mathbf{E} = E_0 \cos(\omega t - kz)\,\mathbf{i} + E_0 \cos(\omega t - kz - \pi/4)\ \mathbf{j}$$

- Πράγματι για το κύμα αυτό $A_x = A_y = A$ και $\phi = \phi_y - \phi_x = -\pi/4$ οπότε: α) Από τη (σχ. 3.1.8) $\pi < \phi < 2\pi$, άρα το φως είναι αριστερόστροφα ελλειπτικά πολωμένο. β) Από τη (σχ. 3.1.7) βρίσκουμε ότι $\tan 2\psi \to \infty$ οπότε $\psi = 45^0$ δηλ. η κλίση του μεγάλου άξονα της έλλειψης είναι στις 45^0 σε σχέση με τον E_x. γ) Από τη (σχ. 3.1.6) βρίσκουμε ότι $e = A_\eta / A_\xi = +0.4141$. Το θετικό πρόσημο σημαίνει αριστερόστροφα πολωμένο φως, γεγονός το οποίο ήδη έχουμε προβλέψει. Τέλος από το μέγεθος της ελλειπτικότητας συμπεραίνουμε ότι ο μεγάλος άξονας της έλλειψης είναι περίπου διπλάσιος από το μικρό.

3.2 *Κυκλικά πολωμένο φως*

Το ***κυκλικά πολωμένο φως(circular polarized light)*** είναι μια ειδική περίπτωση του ελλειπτικά πολωμένου φωτός όπου τώρα:

$$A_x = A_y = A \quad , \quad \phi = \phi_y - \phi_x = \pm\ \pi/2$$

Για τις συνθήκες αυτές από τη (σχ. 3.1.3) παίρνουμε:

$$E_x^2 + E_y^2 = A^2 \tag{3.2.1}$$

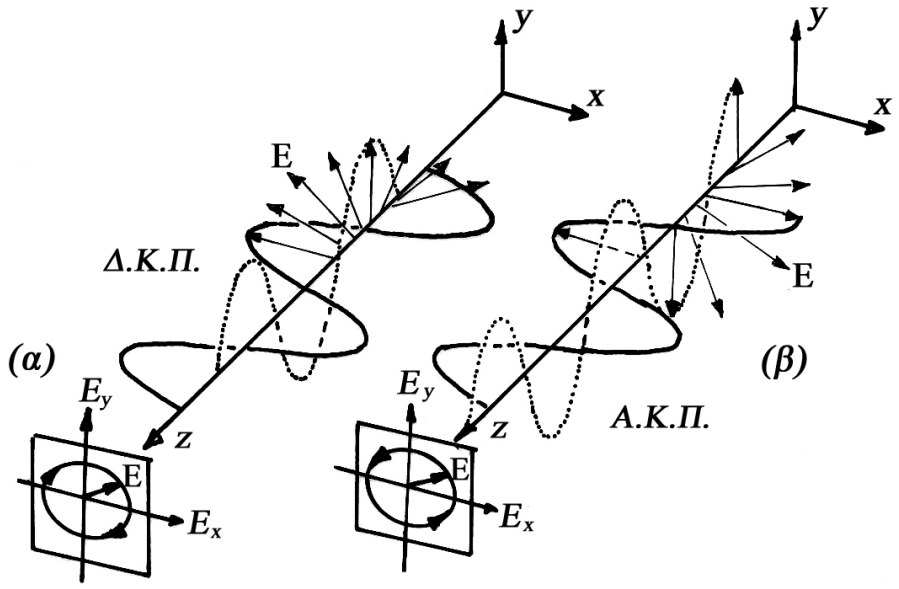
η οποία είναι εξίσωση κύκλου. Άρα στην περίπτωση αυτή το άκρο του διανύσματος $\mathbf{E}$ διαγράφει χρονικά ένα κύκλο ακτίνας A και χωρικά (Σχ. 3.2.1) μια κυκλική έλικα. Για $\phi = \pi/2$ έχουμε ***δεξιόστροφα κυκλικά πολωμένο φως (Δ.Κ.Π.)*** ενώ για $\phi = -\pi/2$ ***αριστερόστροφα κυκλικά πολωμένο φως (Α.Κ.Π.)***. Οι παραμετρικές εξισώσεις για το κυκλικά πολωμένο φως θα δίνονται από τις σχέσεις:

$$\begin{aligned} E_x &= A\cos(\omega t - kz) \\ E_y &= A\cos(\omega t - kz \pm \pi/2) \end{aligned} \tag{3.2.2}$$

Το διάνυσμα **E** του ηλεκτρικού πεδίου θα έχει τη μορφή:

$$\mathbf{E} = A\cos(\omega t - kz)\,\mathbf{i} \mp A\sin(\omega t - kz)\;\mathbf{j} = A\cos(\omega t - kz)\,\mathbf{i} + A\cos(\omega t - kz \pm \pi/2)\;\mathbf{j} \qquad (3.2.3)$$

Όπως αποδεικνύεται στην (§ 3.5), η επαλληλία δύο κυκλικά πολωμένων φώτων της μορφής που μας δίνει η (σχ. 3.2.3), με αντίθετη στροφικότητα και διαφορετικά πλάτη αποτελούν μια βάση για την έκφραση οποιασδήποτε κατάστασης πόλωσης.



(Σχ.3.2.1)

Σημείωση

Στη ***κβαντική*** περιγραφή του φωτός, τη λεγόμενη ***φωτονική φύση*** του (δηλ. το φως με τη μορφή φωτονίων), μια από τις παραμέτρους που καθορίζουν την κατάσταση ενός φωτονίου είναι αυτή της ***γωνιακής στροφορμής (angular momentum-spin)***. Ένα φωτόνιο (που έρχεται προς τα εμάς), θα έχει στροφορμή $-\hbar$ ή $+\hbar$ ανάλογα με το αν ο χαρακτήρας της είναι δεξιόστροφος ή αριστερόστροφος σε σχέση με τη διεύθυνση της ορμής του. Με όχι πολύ αυστηρό τρόπο, η κατάσταση πόλωσης μιας δέσμης φωτός που γνωρίζουμε ότι αποτελείται από ένα πολύ μεγάλο στατιστικό σύνολο φωτονίων, μπορεί να περιγραφεί ως εξής: Βρίσκουμε 'πειραματικά' τα ποσοστά (επί του συνόλου) των φωτονίων των οποίων οι μετρούμενες τιμές των στροφορμών τους είναι $-\hbar$ ή $+\hbar$. Αν τα ποσοστά αυτά (δηλ. οι πιθανότητες) είναι 1 και 0 (ή 0 και 1), τότε λέμε ότι έχουμε Δ.Κ.Π. φως ή Α.Κ.Π. φως αντίστοιχα. Αν τα ποσοστά είναι ακριβώς τα ίδια (1/2 και 1/2) τότε το φως θα είναι γραμμικά πολωμένο. Αν τέλος τα ποσοστά διαφέρουν μεταξύ τους (με άθροι-

σμα πάντα τη μονάδα) τότε θα έχουμε ελλειπτικά πολωμένο φως. Βλέπουμε δηλ. ότι και στη φωτονική περιγραφή, τα ποσοστά των δεξιόστροφων και αριστερόστροφων φωτονίων προσδιορίζουν την κατάσταση πόλωσης μιας δέσμης φωτός.

Παράδειγμα

Να προσδιοριστεί η κατάσταση πόλωσης του επιπέδου μετώπου κύματος:

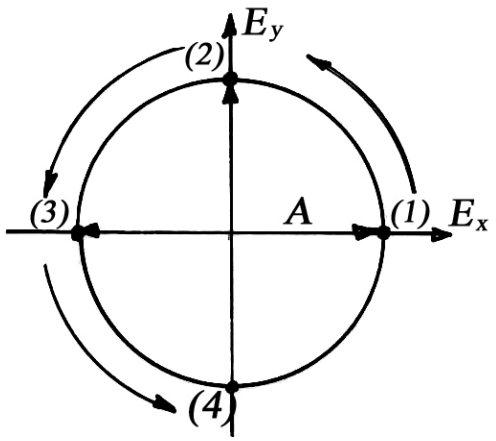
$$\mathbf{E} = A\cos(\omega t - kz)\,\mathbf{i} + A\cos(\omega t - kz + 3\pi/2)\,\mathbf{j}$$

- Επειδή $\cos(a + 3\pi/2) = \cos(a - \pi/2)$, τότε θα έχουμε:

$$\mathbf{E} = A\cos(\omega t - kz)\,\mathbf{i} + A\cos(\omega t - kz - \pi/2)\,\mathbf{j}$$

Οι συνιστώσες λοιπόν του $\mathbf{E}$ έχουν ίσα πλάτη $A_x = A_y = A$ και η διαφορά φάσης τους είναι $\phi = \phi_y - \phi_x = -\pi/2$. Άρα πρόκειται για κυκλικά πολωμένο επίπεδο μέτωπο κύματος. Θα έχουμε για $z = 0$:

$$\begin{array}{llllll}
t = 0 & \rightarrow & E_x = A & , & E_y = 0 & \rightarrow \ \theta\acute{\varepsilon}\sigma\eta \quad (1) \\
t = T/4 & \rightarrow & E_x = 0 & , & E_y = A & \rightarrow \ -//- \quad (2) \\
t = T/2 & \rightarrow & E_x = -A & , & E_y = 0 & \rightarrow \ -//- \quad (3) \\
t = 3T/4 & \rightarrow & E_x = 0 & , & E_y = -A & \rightarrow \ -//- \quad (4)
\end{array}$$



(Σχ. 3.2.2)

Επομένως η φορά περιστροφής του $\mathbf{E}$ (Σχ. 3.2.2), είναι αντίθετη των δεικτών του ρολογιού. Άρα το φως θα είναι αριστερόστροφα κυκλικά πολωμένο.

3.3 *Γραμμικά πολωμένο φως*

Το ***γραμμικά πολωμένο φως(linearly polarized light)***, ήδη το έχουμε περιγράψει στην (§ 1.3). Για την περίπτωση αυτή το διάνυσμα **E** που είναι πάντα κάθετο στη διεύθυνση διάδοσης, ταλαντεύεται χρονικά και χωρικά σ' ένα σταθερό επίπεδο, αυτό που ονομάζουμε ***επίπεδο πόλωσης***. Το προαναφερόμενο επίπεδο ορίζεται από τη διεύθυνση του **E** και τη διεύθυνση διάδοσης (Σχ. 3.3.1). Γραμμικά πολωμένο φως παίρνουμε όταν:

$$A_x = A_y \;\; ή \;\; A_x \neq A_y \;\; \text{και} \;\; \phi = \phi_y - \phi_x = 0 \;\; ή \;\; \pi$$

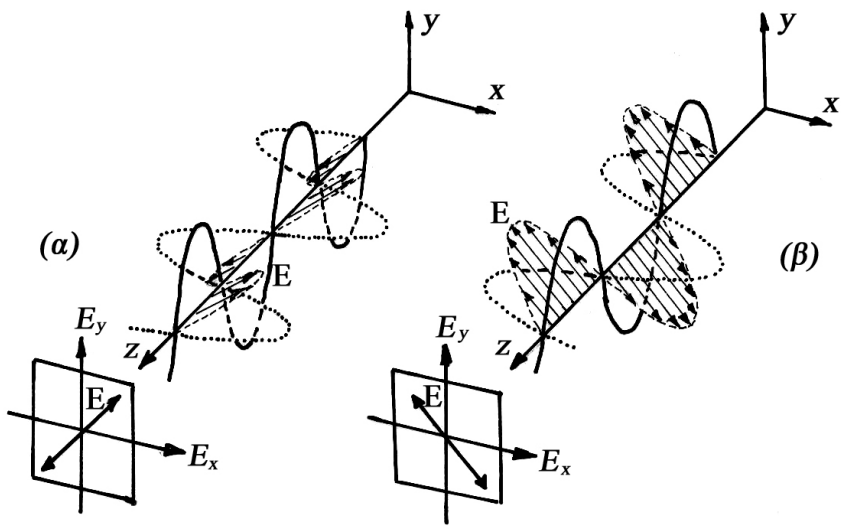
Πράγματι από τη (σχ. 3.1.3) για $A_x \neq A_y$ και $\phi = 0$ θα έχουμε:

$$E_y = \frac{A_y}{A_x} E_x \tag{3.3.1}$$

και για $A_x \neq A_y$ και $\phi = \pi$:

$$E_y = -\frac{A_y}{A_x} E_x \tag{3.3.2}$$

Οι δυο αυτές σχέσεις καθορίζουν και τα επίπεδα ταλάντωσης του **E** όπως φαίνεται στο (Σχ. 3.3.1).



(Σχ. 3.3.1)

3.4 *Φυσικό φως και μερικά πολωμένο φως*

Φυσικό φως

Στην Η/Μ θεωρία η περιγραφή του λεγόμενου φυσικού φωτός θα μπορούσε να γίνει από δύο 'ασύμφωνες' (ασύζευκτες), κάθετες μεταξύ τους γραμμικά πολωμένες συνιστώσες $E_x(t)$ και $E_y(t)$:

$$\begin{aligned} E_x(t) &= A_x(t)\cos\left[\omega t - kz + \phi_x(t)\right] \\ E_y(t) &= A_y(t)\cos\left[\omega t - kz + \phi_y(t)\right] \end{aligned} \tag{3.4.1}$$

Δηλ. για τις συνιστώσες αυτές τα πλάτη $A_x(t), A_y(t)$ καθώς και οι φάσεις τους $\phi_x(t), \phi_y(t)$ είναι συναρτήσεις του χρόνου οι οποίες μεταβάλλονται ταχύτατα και με εντελώς τυχαίο τρόπο. Που σημαίνει ότι και η κατάσταση πόλωσης μεταβάλλεται με εντελώς τυχαίο τρόπο. Δηλ. το άκρο τού διανύσματος του ηλ. πεδίου ανά πάσα στιγμή βρίσκεται σε τυχαία θέση στο επίπεδο x, y το κάθετο στη διεύθυνση διάδοσης.

Ένα δεύτερο που δεν έχουμε κανένα λόγο να υποθέσουμε ότι δεν μπορεί να συμβαίνει είναι ότι:

$$\left\langle E_x(t)^2 \right\rangle = \left\langle E_y(t)^2 \right\rangle \tag{3.4.2}$$

όπου το σύμβολο $\langle\ \rangle$ δηλώνει μέση χρονική τιμή. Επειδή όμως η ένταση του φωτός για την 'ασύμφωνη' επαλληλία δύο δεσμών είναι ίση με το άθροισμα των επί μέρους εντάσεων δηλ. $I = \left\langle E_x(t)^2 \right\rangle + \left\langle E_y(t)^2 \right\rangle$ θα έχουμε:

$$\left\langle E_x(t)^2 \right\rangle = \left\langle E_y(t)^2 \right\rangle = I/2 \tag{3.4.3}$$

Άρα το φυσικό φως είναι τελείως συμμετρικό. Δηλ. όπως και να επιλέξουμε το σύστημα συντεταγμένων x, y η ενέργεια θα κατανέμεται εξ ίσου στις δύο συνιστώσες διευθύνσεις, αρκεί οι τελευταίες να είναι ορθογώνιες

Το φως που εκπέμπεται από τις λεγόμενες χαοτικές πηγές φωτός όπως είναι οι λυχνίες πυράκτωσης (π.χ. μια λυχνία αλογόνου) ή οι φασματικές λυχνίες (π.χ. μια λυχνία Na) ακόμη και ένα κοινό Laser He-Ne, εκπέμπουν φυσικό φως.

Μερικά πολωμένο φως

Σαν ***μερικά πολωμένο φως(partial polarized light)*** μπορούμε να θεωρήσουμε την ασύμφωνη επαλληλία (μίγμα) φυσικού φωτός και φωτός που η κατάσταση πόλωσής του είναι μια από γνωστές: γραμμική, κυκλική ή ελλειπτική. Η παράμετρος που συνήθως χαρακτηρίζει το προαναφερόμενο φως είναι ο ***βαθμός πόλωσης(degree of polarization)*** P και δίνεται από το λόγο της έντασης του φωτός της πολωμένης συνιστώσας του I_p προς τη συνολική ένταση $I_{tot} = I_p + I_u$ της δέσμης, όπου I_u η ένταση του φυσικού φωτός:

$$P = \frac{I_p}{I_{tot}} = \frac{I_p}{I_p + I_u} \tag{3.4.4}$$

Για να μετρήσουμε τον παράγοντα αυτό θα πρέπει αρχικά (εφόσον το φως είναι μερικά κυκλικά πολωμένο ή μερικά ελλειπτικά πολωμένο), με τη βοήθεια ενός πλακιδίου καθυστέρησης $\lambda/4$ (βλ. § 5.6) να το μετατρέψουμε σε μίγμα φυσικού και γραμμικά πολωμένου φωτός. Κατόπιν με τη βοήθεια ενός αναλυτή (γραμμικός πολωτής) (βλ. § 4.1), να μετρήσουμε τις εντάσεις $I_{\max}$ και $I_{\min}$ που προκύπτουν μετά το πλακίδιο $\lambda/4$. Τότε ο βαθμός πόλωσης θα δίνεται από τη σχέση:

$$P = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}} \tag{3.4.5}$$

όπου $I_{\max}$, $I_{\min}$ η μέγιστη και η ελάχιστη από τις εντάσεις που μετράμε με τον αναλυτή σε διευθύνσεις κάθετες μεταξύ τους. Πράγματι επειδή: $I_{\max} = I_p + (1/2)I_u$ και $I_{\min} = (1/2)I_u$ η (σχ. 3.4.5) καταλήγει στη (σχ. 3.4.4).

3.5 *Το αποτέλεσμα της σύμφωνης επαλληλίας (σύζευξης) δεσμών φωτός της ίδιας συχνότητας και διαφορετικών καταστάσεων πόλωσης*

Έστω μια δέσμη φωτός με τη μορφή επιπέδου μονοχρωματικού μετώπου κύματος, διαδίδεται προς μια ορισμένη διεύθυνση και χαρακτηρίζεται από μια ορισμένη κατάσταση πόλωσης. Τότε υφίσταται η δυνατότητα το τελευταίο να εκφραστεί από τη σύμφωνη επαλληλία (σύζευξη) δύο άλλων φώτων που διαδίδονται στην ίδια διεύθυνση και έχουν διαφορετική κατάσταση πόλωσης.

Θα επικεντρώσουμε την ανάλυσή μας σε μια συγκεκριμένη περίπτωση όπου ένα γενικά ελλειπτικά πολωμένο φως να μπορεί να εκφραστεί από την σύμφωνη επαλληλία (σύζευξη) δύο κυκλικά πολωμένων φώτων διαφορετικών πλατών και στροφικοτήτων. Θα δούμε επίσης με ποιό τρόπο είναι δυνατόν να προσδιοριστούν οι σχέσεις μεταξύ των πλατών και των φάσεων του ελλειπτικού και των δύο κυκλικά πολωμένων φώτων.

Πράγματι ένα επίπεδο μέτωπο κύματος ελλειπτικά πολωμένου φωτός περιγράφεται από τις (σχ. 3.1.2):

$$\left.\begin{aligned} E_x &= A_x \cos(\omega t - kz + \phi_x) \\ E_y &= A_y \cos(\omega t - kz + \phi_y) \end{aligned}\right\} \qquad (3.5.1)$$

με την προϋπόθεση ότι θα πρέπει να ισχύει: $A_x \neq A_y$ και (ή) $\phi = \phi_y - \phi_x$ με $0 < \phi < 2\pi$. Από τη (σχ. 3.5.1) θα έχουμε:

$$\begin{aligned} E_x &= \frac{1}{2} A_x e^{i\phi_x} e^{i\theta} + \frac{1}{2} A_x e^{-i\phi_x} e^{-i\theta} = \frac{1}{2}\alpha_x e^{i\theta} + \frac{1}{2}\alpha_x^* e^{-i\theta} \\ E_y &= \frac{1}{2} A_y e^{i\phi_y} e^{i\theta} + \frac{1}{2} A_y e^{-i\phi_y} e^{-i\theta} = \frac{1}{2}\alpha_y e^{i\theta} + \frac{1}{2}\alpha_y^* e^{-i\theta} \end{aligned} \qquad (3.5.2)$$

όπου: $$\alpha_x = A_x e^{i\phi_x} \quad , \quad \alpha_y = A_y e^{i\phi_y} \qquad (3.5.3)$$

Τα πλάτη E_x και E_y μπορούν να θεωρηθούν αντίστοιχα σαν το πραγματικό και το φανταστικό μέρος ενός μιγαδικού μεγέθους $\tilde{E}$. Δηλ.

$$\left.\begin{aligned} \tilde{E} &= E_x + iE_y \\ &= \frac{1}{2}\alpha_x e^{i\theta} + \frac{1}{2}\alpha_x^* e^{-i\theta} + i\left(\frac{1}{2}\alpha_y e^{i\theta} + \frac{1}{2}\alpha_y^* e^{-i\theta}\right) \text{ ή} \\ \tilde{E} &= \frac{1}{2}\left(\alpha_x + i\alpha_y\right)e^{i\theta} + \frac{1}{2}\left(\alpha_x^* + i\alpha_y^*\right)e^{-i\theta} \end{aligned}\right\} \qquad (3.5.4)$$

Θεωρούμε τώρα ένα αριστερόστροφα κυκλικά πολωμένο επίπεδο μέτωπο κύματος, με πλάτος A_L και σαν φάση εκκίνησης τη γωνία ϕ_L οπότε με βάση τη (σχ. 3.2.2) θα έχουμε για τα πλάτη του ηλεκτρικού πεδίου E_x, E_y:

$$\left.\begin{aligned} E_{xL} &= A_L \cos(\omega t - kz) = A_L \cos(\omega t - kz + \phi_L) = A_L \cos(\theta + \phi_L) \\ E_{yL} &= A_L \cos(\omega t - kz - \pi/2) = A_L \cos(\omega t - kz + \phi_L - \pi/2) = A_L \sin(\theta + \phi_L) \end{aligned}\right\} \quad (3.5.5)$$

όπου $\theta = \omega t - kz$. Οι (σχ. 3.5.5) γράφονται:

$$\left.\begin{aligned} E_{xL} &= A_L \cos(\theta + \phi_L) = \mathrm{Re}\, A_L e^{i\phi_L} e^{i\theta} \\ E_{yL} &= A_L \sin(\theta + \phi_L) = \mathrm{Im}\, A_L e^{i\phi_L} e^{i\theta} \end{aligned}\right\} \quad (3.5.6)$$

που μπορούν να θεωρηθούν ότι είναι το πραγματικό και το φανταστικό μέρος ενός μιγαδικού αριθμού $\tilde{E}_L$ όπου:

$$\tilde{E}_L = E_{xL} + iE_{yL} = A_L e^{i\phi_L} e^{i\theta} \quad (3.5.7)$$

Για ένα δεξιόστροφα κυκλικά πολωμένο φως με πλάτος A_R και φάση εκκίνησης ϕ_R με βάση τη (σχ. 3.2.2) θα έχουμε για τα πλάτη E_x, E_y:

$$\left.\begin{aligned} E_{xR} &= A_R \cos(\omega t - kz) = A_R \cos(\omega t - kz - \phi_R) = A_R \cos(\theta - \phi_R) \\ E_{yR} &= A_R \cos(\omega t - kz + \pi/2) = A_R \cos(\omega t - kz - \phi_L + \pi/2) = -A_R \sin(\theta - \phi_R) \end{aligned}\right\} \quad (3.5.8)$$

Οι (σχ. 3.5.8) μπορούν να γραφούν:

$$\left.\begin{aligned} E_{xR} &= A_R \cos(\theta - \phi_R) = \mathrm{Re}\, A_R e^{i\phi_R} e^{-i\theta} \mathrm{A} \\ E_{yR} &= -A_R \sin(\theta - \phi_R) = \mathrm{Im}\, A_R e^{i\phi_R} e^{-i\theta} \end{aligned}\right\} \quad (3.5.9)$$

όπου με τον ίδιο τρόπο μπορούν να θεωρηθούν ότι είναι το πραγματικό και το φανταστικό μέρος ενός μιγαδικού αριθμού $\tilde{E}_R$ με:

$$\tilde{E}_R = E_{xR} + iE_{yR} = A_R e^{i\phi_R} e^{-i\theta} \quad (3.5.10)$$

Το συνολικό ηλεκτρικό πεδίο που είναι η επαλληλία του αριστερόστροφου και του δεξιόστροφου φωτός, θα δίνεται από τη σχέση:

$$\tilde{E} = \tilde{E}_L + \tilde{E}_R = A_L e^{i\phi_L} e^{i\theta} + A_R e^{i\phi_R} e^{-i\theta} \quad (3.5.11)$$

ή

$$\tilde{E} = \alpha_L e^{i\theta} + \alpha_R e^{-i\theta} \quad (3.5.12)$$

όπου: $\alpha_L = A_L e^{i\phi_L}$, $\alpha_R = A_R e^{i\phi_R}$ (3.5.13)

Για να είναι τώρα το πεδίο του ελλειπτικά πολωμένου φωτός (αυτό το οποίο περιγράψαμε κατ' αρχή με βάση τις δύο ορθογώνιες συνιστώσες του γραμμικά πολωμένου φωτός (σχ. 3.5.4)) ισοδύναμο με το πεδίο που προκύπτει από την επαλληλία (σύζευξη) των δύο κυκλικά πολωμένων φώτων με διαφορετικό πλάτος και αντίθετη στροφικότητα (σχ. 3.5.12) θα πρέπει να ισχύει:

$$\left.\begin{aligned} a_L &= \frac{1}{2}\left(\alpha_x + i\alpha_y\right) \\ a_R &= \frac{1}{2}\left(\alpha_x^* + i\alpha_y^*\right) \end{aligned}\right\} \qquad (3.5.14)$$

Και η συζυγής της δεύτερης των (σχ. 3.5.14) θα μας δώσει: $a_R^* = \frac{1}{2}\left(\alpha_x - i\alpha_y\right)$.

Οπότε:
$$\left.\begin{aligned} \alpha_x &= \alpha_L + \alpha_R^* \\ \alpha_y &= -i(\alpha_L - \alpha_R^*) \end{aligned}\right\} \qquad (3.5.15)$$

Παράδειγμα

Έστω A_R, A_L $\left(A_R > A_L\right)$ τα πλάτη και ϕ_R, ϕ_L οι φάσεις εκκίνησης δύο κυκλικά πολωμένων φώτων (δεξιόστροφου και αριστερόστροφου), τα οποία διαδίδονται κατά τη διεύθυνση του άξονα z. Να προσδιοριστούν οι συνιστώσες E_x, E_y του προκύπτοντος από την 'επαλληλία' (σύζευξη) εν γένει ελλειπτικά πολωμένου φωτός, με την προϋπόθεση ότι ο μέγιστος άξονας της έλλειψης, είναι κατά τη διεύθυνση του άξονα x.

- Οι σχέσεις μεταξύ των A_x, A_y και A_R, A_L θα δίνονται όπως αποδείχθηκε από τις (σχ. 3.5.15):

$$\alpha_x = \alpha_L + \alpha_R^* \quad \text{και} \quad \alpha_y = -i(\alpha_L - \alpha_R^*) \qquad (1)$$

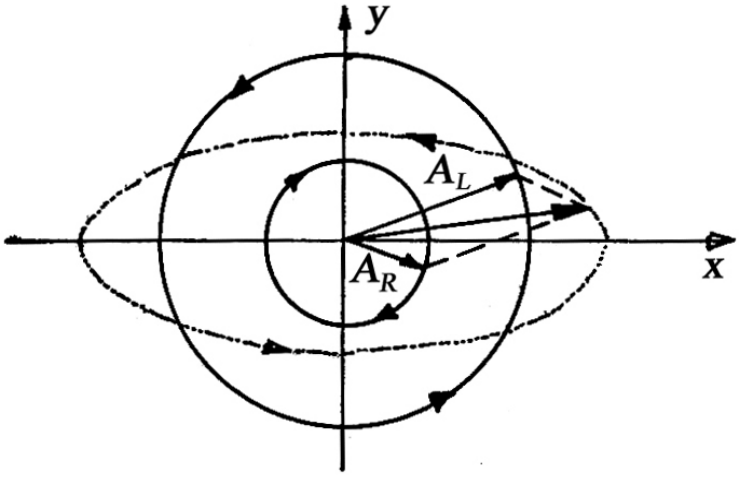
όπου από τις (σχ. 3.5.3): $\alpha_x = A_x e^{i\phi_x}$, $\alpha_y = A_y e^{i\phi_y}$ και τις (σχ. 3.5.13): $\alpha_L = A_L e^{i\phi_L}$, $\alpha_R = A_R e^{i\phi_R}$. Και με το δεδομένο ότι οι φάσεις εκκίνησης των κυκλικών φώτων είναι $\phi_R = \phi_L = 0$ (μέγιστος άξονας της έλλειψης κατά x) θα έχουμε:

$$A_x e^{i\phi_x} = A_R + A_L, \qquad A_y e^{i\phi_y} = i\left(A_R - A_L\right) \tag{2}$$

οι οποίες γίνονται:

$$A_x e^{i\phi_x} e^{i\theta} = \left(A_R + A_L\right) e^{i\theta}, \qquad A_y e^{i\phi_y} e^{i\theta} = i\left(A_R - A_L\right) e^{i\theta} \tag{3}$$

όπου $\theta = \omega t - kz$. Οπότε από την δεύτερη των (σχ. 3):



(Σχ. 3.5.1)

$$\left.\begin{aligned} &A_y \cos\left(\theta + \phi_y\right) + iA_y \sin\left(\theta + \phi_y\right) = i\left(A_R - A_L\right)\left(\cos\theta + i\sin\theta\right) = \\ &= i\left(A_R - A_L\right)\cos\theta - \left(A_R - A_L\right)\sin\theta \end{aligned}\right\}$$. Από την οποία:

$$A_y \cos\left(\theta + \phi_y\right) = E_y = \left(A_L - A_R\right)\sin\theta \tag{4}$$

Επίσης από την πρώτη των (σχ. 3):
$A_x \cos\left(\theta + \phi_x\right) + iA_x \sin\left(\theta + \phi_x\right) = \left(A_R + A_L\right)\cos\theta + i\left(A_R + A_L\right)\sin\theta$. Οπότε:

$$A_x \cos\left(\theta + \phi_x\right) = E_x = \left(A_R + A_L\right)\cos\theta \tag{5}$$

Και από τις (σχ. 4,5):

$$\tilde{\mathbf{E}} = \left(A_L + A_R\right)\cos\theta\,\mathbf{i} + \left(A_L - A_R\right)\sin\theta\,\mathbf{j} \tag{6}$$

Πρόκειται για το προκύπτον από τη σύμφωνη επαλληλία (σύζευξη) φως, που διαδίδεται κατά τον άξονα των z. Η τελευταία μπορεί επίσης να γραφεί ως εξής:

$$\tilde{\mathbf{E}} = \left(A_R + A_L\right)\cos\theta\mathbf{i} + \left(A_R - A_L\right)\cos\left(\theta + 90^0\right)\mathbf{j} = A'_x\cos\left(\theta + \phi'_x\right)\mathbf{i} + A'_y\cos\left(\theta + \phi'_y\right)\mathbf{j} \qquad (7)$$

Όπου: $A'_x = A_R + A_L$, $A'_y = A_R - A_L$, $\phi'_x = 0^0$, $\phi'_y = +90^0$ $\left(\phi' = \phi'_y - \phi'_x = +90^0\right)$.

α) Από τη (σχ. 3.1.7): $\tan 2\psi = \dfrac{2A_xA_y}{A_x^2 - A_y^2}\cos\phi' \Rightarrow \psi = 0^0$

β) Από τη (σχ. 3.1.6):

$$\frac{A'_\eta}{A'_\xi} = \frac{A'_x\sin\phi'_x\sin\psi - A'_y\sin\phi'_y\cos\psi}{A'_x\cos\phi'_x\cos\psi + A'_y\cos\phi'_y\sin\psi} = -\frac{A'_y}{A'_x} = -\frac{\left(A_R - A_L\right)}{A_R + A_L} > 0 \text{ (πρόσημο +)}$$

γ) Επίσης από τη (σχ. 3.1.6): $\dfrac{A'_\eta}{A'_\xi} = \dfrac{A_L - A_R}{A_R + A_L} < 1$ (επειδή από τα δεδομένα: $A_L > A_R$)

Άρα το φως το οποίο προκύπτει, είναι αριστερόστροφα ελλειπτικά πολωμένο, με τον μεγάλο άξονα της έλλειψης κατά τον άξονα x (Σχ. 3.5.1).

4 *Πολωτές*

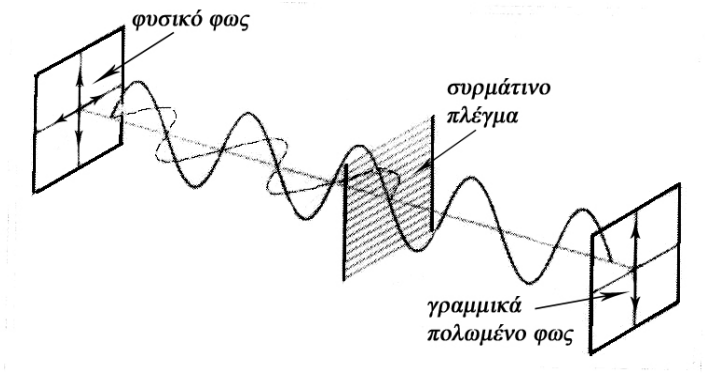
Πολωτές (polarizers), είναι τα οπτικά στοιχεία ή τεχνήματα για τα οποία όταν στην είσοδό τους προσπέσει φυσικό φως από την έξοδό τους προκύπτει πολωμένο. Πρόκειται δηλ. για συστήματα τα οποία με τη βοήθεια ορισμένων φυσικών διαδικασιών, έχουν τη δυνατότητα να επιλέγουν μια συγκεκριμένη κατάσταση πόλωσης απορρίπτοντας όλες τις άλλες. Από τις φυσικές αυτές διαδικασίες αναφέρουμε τις εξής: ***διχρωϊσμός (dichroism)*** ή επιλεκτική απορρόφηση, ***ανάκλαση (reflection)*** και ***διάθλαση (refraction)***, ***σκέδαση (scattering)*** και ***διπλή διάθλαση (double refraction)***. Με βάση το φαινόμενο της επιλεκτικής απορρόφησης θα μελετήσουμε το είδος των γραμμικών πολωτών με την πολύ γνωστή ονομασία ***polaroid***. Για την πόλωση μέσω διπλής διάθλασης θ' αναφερθούμε στο (Κεφ. 5) και στοιχειωδώς στο (Κεφ. 6) θα συζητήσουμε την πόλωση του φωτός από ανάκλαση και διάθλαση στα διηλεκτρικά υλικά. Όσο για τον διχρωϊσμό γίνεται μνεία στην (§ 6.2) και για την πόλωση από σκέδαση στην (§ 6.3). Όλες οι παραπάνω διαδικασίες ενέχουν την έννοια της ασύμμετρης συμπεριφοράς μεταξύ των συνιστωσών του πεδίου, κατά τη διάδοση του φωτός μέσω αυτών των συστημάτων. Το γεγονός αυτό αποτελεί στην πραγματικότητα, την αιτία της επιλεκτικής τους ικανότητας όσον αφορά την ανάδειξη μιας συγκεκριμένης κατάστασης πόλωσης.

4.1 *Γραμμικοί πολωτές. Polaroid*

Γραμμικός πολωτής (linear polarizer) είναι αυτός που αν στην είσοδό του προσπέσει φυσικό φως, από την έξοδό του θα διαδοθεί γραμμικά πολωμένο. Το επίπεδο πόλωσης του φωτός στην έξοδο θα ορίζεται από τη διεύθυνση διάδοσης του φωτός και τη διεύθυνση ταλάντωσης του ηλεκτρικού πεδίου. Η διεύθυνση ταλάντωσης ονομάζεται ***άξονας διέλευσης(transmission axis)***.

Ένα κλασσικό παράδειγμα γραμμικού πολωτή είναι ο ***πολωτής συρμάτινου πλέγματος(wire-grid polarizer)***. Συνίσταται (Σχ. 4.1.1) από ένα πολύ πυκνό πλέγμα λεπτών παραλλήλων συρμάτων. Κάθετα στο προαναφερόμενο, αφήνουμε να προσπέσει έστω μια δέσμη φυσικού φωτός. Την τελευταία έχουμε τη δυνατότητα ν' αναλύσουμε σε δύο συνιστώσες: την παράλληλη και την κάθετη προς τη διεύθυνση των συρμάτων. Η παράλληλη συνιστώσα του πεδίου δρα στα ελεύθερα ηλεκτρόνια των αγώγιμων συρμάτων, θέτοντάς τα σε κίνηση. Όμως είναι γνωστό (βλ. ΕΡΓΑΣ/ΚΗ ΟΠΤΙΚΗ [3]: Ε.Σ.Σ.Φ. (ΠΑΡ/ΜΑ 3)) - οπτικές ιδιότητες των αγωγών) στην περίπτωση αυτή, ένα ποσοστό της ακτινοβολίας απορροφάται ταχύτατα και μετατρέπεται σε θερμότητας Joule. Το υπόλοιπο ανακλάται προς διεύθυνση αντίθετη της προσπίπτουσας ακτινοβολίας. Δεν συμβαίνει όμως το ίδιο και για τη συνι-

στώσα του πεδίου την κάθετη προς τη διεύθυνση των συρμάτων. Η δράση της εξαναγκάζει τα ηλεκτρόνια σε μικρές σχετικά μετατοπίσεις (λόγω του μικρού πλάτους του σύρματος) με συνέπεια μικρό ποσοστό της να δαπανάται σε απορρόφηση και ανάκλαση. Επομένως είναι η μόνη τελικά που εξέρχεται από το συρμάτινο πλέγμα ενώ η παράλληλη συνιστώσα όπως αποδείξαμε προηγουμένως απορροφάται πλήρως.



(Σχ. 4.1.1)

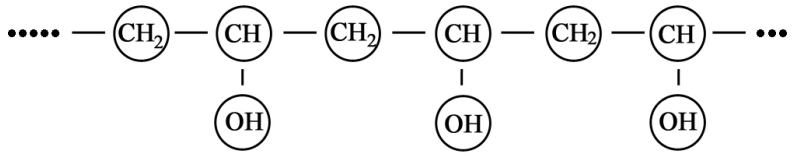
Στην πράξη για να λειτουργήσει το σύστημα σαν γραμμικός πολωτής, θα πρέπει η απόσταση των συρμάτων να είναι μικρότερη του μ.κ. της προσπίπτουσας ακτινοβολίας και το πλάτος των συρμάτων, κλάσμα της προηγούμενης. Με βάση την υπάρχουσα τεχνολογία, πολωτές συρμάτινου πλέγματος χρησιμοποιούνται μόνο στην περιοχή των μικροκυμάτων και της μέσης και μακράς περιοχής του υπερύθρου φάσματος της Η/Μ ακτινοβολίας (βλ. ΕΡΓΑΣ/ΚΗ ΟΠΤΙΚΗ [5]: Π.Α.Α.Φ. (ΠΑΡ/ΜΑ 5) (Πίν. Ι)).

Θα περιγράψουμε στα επόμενα τον πλέον συνήθη γραμμικό πολωτή που χρησιμοποιείται για την ορατή περιοχή του Η/Μ φάσματος. Ονομάζεται ***φύλλο-Η (H-sheet)*** ή ***polaroid*** και αναπτύχθηκε από τον Edwin H. Land*. Το υπόβαθρο αυτού του πολωτή είναι η ***πολυβινυλική αλκοόλη (polyvinyl alcohol)*** (PVOH, PVA ή PVAL). Πρόκειται για ένα συνθετικό πολυμερές το οποίο είναι διαλυτό στο νερό (Σχ. 4.1.2). Αν μια ράβδος του υλικού κατόπιν επεξεργασίας τανυστεί κατά πλάτος προς μια διεύθυνση, προκύπτει ένα διαφανές φύλλο ορισμένου πάχους. Τότε και τα μακρομόρια του υλικού βρίσκονται προσανατολισμένα προς την ίδια διεύθυνση. Το φύλλο καθίσταται πολωτής όταν εμβαπτιστεί σε κατάλληλο διάλυμα Ιωδίου. Τότε τα μόρια του Ιωδίου εγκαθίστανται στα υδροκαρβονικά μακρομόρια, με συνέπεια να τα καθιστούν αγώγιμα.(Σχ. 4.1.3α).

* Land, E. H. (1951) "Some aspects on the development of sheet polarizers". *J.Optical Society of America* **41** (12), 957-963.

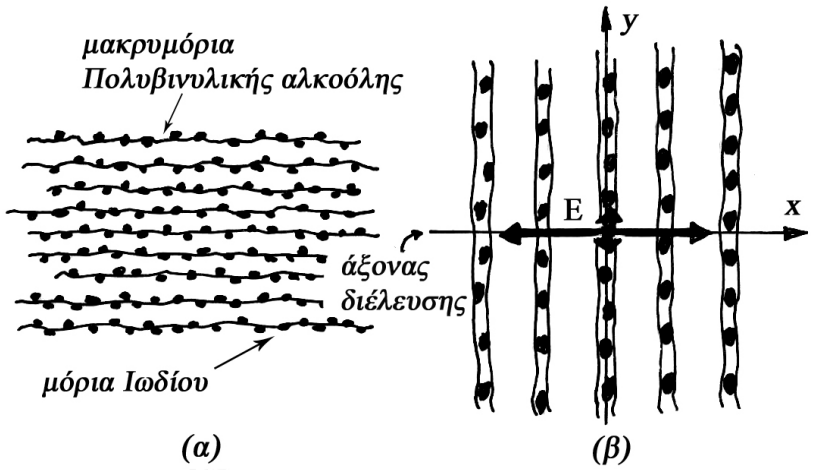
Ας υποθέσουμε ότι κάθετα σ' αυτό το φύλλο (Σχ. 4.1.3β) πέφτει μια δέσμη φυσικού φωτός. Τότε λόγω της πλήρους συμμετρίας του μπορούμε να το αναλύ-

PVA ***(Πολυβινυλική Αλκοόλη)***



(Σχ. 4.1.2)

σουμε σε δύο συνιστώσες κατά x και y. Η συνιστώσα του ηλεκτρικού πεδίου κατά y που είναι παράλληλη με τα μακρομόρια, θέτει σε κίνηση τα ηλεκτρόνια των ατόμων του Ιωδίου, εκτελεί έργο πάνω τους και κατά τα γνωστά μερικώς απορροφάται ισχυρά και η υπόλοιπη ανακλάται. Το έργο αυτό μετατρέπεται σε θερμότητα Joule. Η συνιστώσα του **E** κατά x, δεν έχει την δυνατότητα να μετακινήσει κατά πολύ τα ηλεκτρόνια, με συνέπεια να διέρχεται από το φύλλο πρακτικά χωρίς ν' απορροφηθεί. Άρα η κατάσταση πόλωσης του εξερχόμενου φωτός είναι γραμμική. Η διεύθυνση x θα είναι και ο άξονας διέλευσης του πολωτή.



(Σχ. 4.1.3)

Στο εμπόριο τα φύλλα των πολωτών εμφανίζονται με κωδικές ονομασίες όπως: HN-46 ,HN-32 κ.λ.π. όπου το Η σημαίνει το είδος του πολωτή που περιγράψαμε προηγουμένως. Το N (Neutral) σημαίνει ότι ο πολωτής είναι ουδέτερος, δηλ. δια μέσου του περνάει όλο το ορατό Η/Μ φάσμα. Οι αριθμοί 46 , 32 κ.λ.π. σημαί-

νουν το ποσοστό του φωτός (από το συνολικά προσπίπτον) που περνάει από το πολωτή, αφού λάβουμε υπόψη μας τις απώλειες λόγω ανακλάσεων και απορροφήσεων. Για δύο τελικά πολωτές polaroid (φύλλα-Η) των οποίων οι άξονες διέλευσης είναι παράλληλοι, θα έχουμε τη μέγιστη διέλευση φωτός μιας προσπίπτουσας. Όταν όμως είναι κάθετοι μεταξύ τους (διασταυρωμένοι πολωτές) πρακτικά δεν θα περνάει φως. Τότε λέμε ότι έχουμε ***κατάσβεση(extinction)***.

4.2 *Ημικλασσική άποψη για το φως. Εύρος ζώνης συχνοτήτων, χρόνος συμφωνίας και διάρκεια των καταστάσεων πόλωσης. Ημικλασσική μελέτη του μηχανισμού επιλεκτικότητας ενός πολωτή Polaroid*

Το φως όπως γνωρίζουμε, χαρακτηρίζει την ορατή περιοχή του Η/Μ φάσματος. Δηλ. μια περιοχή μεταξύ των συχνοτήτων $\left(3.84-7.69\times10^{14}\,\mathrm{Hz}\right)$. Η παραγωγή του οφείλεται ως επί το πλείστον στους ατομικούς εκπομπούς: Δηλ. την προσρόφηση ενέργειας από άτομα ή μόρια, την μετάβαση των ηλεκτρονίων των εξώτερων στοιβάδων τους σε μεγαλύτερη ενεργειακή στάθμη και στην αποδιέγερσή τους, με συνέπεια την εκπομπή φωτονίων (*κβαντική άποψη για το φως*).

Όσον αφορά τώρα την *ημικλασσική άποψη για το φως*, στο χρονικό διάστημα της προαναφερόμενης διαδικασίας (διέγερσης – αποδιέγερσης του ατόμου), δεχόμαστε ότι το κέντρο βάρος του ηλεκτρονικού νέφους (χώρος πιθανότητας κίνησης των ηλεκτρονίων) που περιβάλλει τον πυρήνα, υπόκειται σε ταλάντωση. Με δεδομένο ότι η ταλάντωση του φορτίου είναι επιταχυνόμενη κίνηση, θα έχουμε εκπομπή Η/Μ ακτινοβολίας (εκπομπή ηλ. διπόλου πυρήνα-ηλεκτρονικού νέφους).

Όμως ο χρόνος αυτής της εκπομπής είναι πεπερασμένος, επομένως είναι πεπερασμένη και η εκπεμπόμενη Η/Μ διαταραχή χωρικά και χρονικά. Μια τυπική χρονική διάρκεια του φαινομένου μπορούμε να εκλάβουμε τα $10^{-8}\,\mathrm{s}$. Έχουμε λοιπόν την εκπομπή Η/Μ διαταραχών όχι απείρου μήκους και διάρκειας (*κλασσική άποψη για το φως*) αλλά πεπερασμένες. Πρόκειται για τους λεγόμενους ***κυματοσυρμούς (wave-trains)***. Είναι συνήθως αρμονικής μορφής με περιβάλλουσα γκαουσιανή όπως αποδεικνύεται και πειραματικά. Κάθε κυματοσυρμός περιλαμβάνει μερικές χιλιάδες περιόδους.

Οι κυματοσυρμοί κατ' αρχή θα μπορούσαν να θεωρηθούν ότι έχουν σχεδόν σταθερό πλάτος. Με δεδομένη τη χρονική τους διάρκεια και με βάση την χρονική τους ανάλυση κατά Fourier (βλ. ΕΡΓΑΣ/ΚΗ ΟΠΤΙΚΗ [3]: Ε.Σ.Σ.Φ. (Κεφ.6)), αποδεικνύεται ότι δεν είναι μονοχρωματικοί αλλά περιλαμβάνουν ένα εύρος συχνοτήτων $\Delta\nu$. Για ένα κυματοσυρμό που εκπέμπεται στο χρονικό διάστημα Δt, τον οποίο ονομάζουμε ***χρόνο εξασθένισης (decay time-mean life)*** (όπου βασικά τα ό-

ριά του συμπίπτουν με το χρονικό διάστημα κατά το οποίο η ενέργεια του αποδιεγειρόμενου ατόμου έχει σχεδόν εκπεμφθεί) και το εύρος συχνοτήτων του είναι $\Delta\nu$, ισχύει η γνωστή σχέση:

$$\Delta t \approx 1/\Delta\nu \tag{4.2.1}$$

Υπάρχουν όμως και δύο άλλοι παράγοντες κατά τη διαδικασία της ατομικής εκπομπής, που επηρεάζουν το μήκος και τη μορφή των κυματοσυρμών, αυξάνοντας το εύρος των συχνοτήτων τους. Ο πρώτος είναι η αυξημένη πιθανότητα σύγκρουσης μεταξύ των ατόμων (π.χ. αέριο υπό πίεση) σε μια φασματική λυχνία, γεγονός που έχει σαν αποτέλεσμα την απότομη ελάττωση του μήκους τους. Ο δεύτερος παράγοντας είναι η μεγάλη ταχύτητα με την οποία κινούνται τα άτομα σε σχέση με τον παρατηρητή (θερμική κίνηση των ατόμων). Πρόκειται για το φαινόμενο Dopler. Το πραγματικό λοιπόν εύρος συχνοτήτων τους $\Delta\nu'$ συνδέεται μέσω μιας παρόμοιας με τη (σχ. 4.2.1) μ' ένα χρόνο $\Delta t'$ ο οποίος είναι σαφώς μικρότερος του μέσου χρόνου εξασθένισης Δt. Ο $\Delta t'$ ονομάζεται ***χρόνος συμφωνίας(coherent time)*** τ_c (βλ. ΕΡΓΑΣ/ΚΗ ΟΠΤΙΚΗ [3]: Ε.Σ.Σ.Φ. Κεφ. 6) και κατά τα γνωστά – για την ορατή περιοχή του Η/Μ φάσματος – είναι της τάξης των 10^{-8}s. Επομένως θα ισχύει:

$$\tau_c \approx 1/\Delta\nu' \tag{4.2.2}$$

Ο χρόνος τ_c, θα μπορούσαμε να πούμε ότι είναι αυτός κατά τη διάρκεια του οποίου θα έχουμε ομαλή (και όχι απότομη) μεταβολή στη φάση, σε ένα τυχαίο σημείο στο χώρο διάδοσης του κυματοσυρμού.

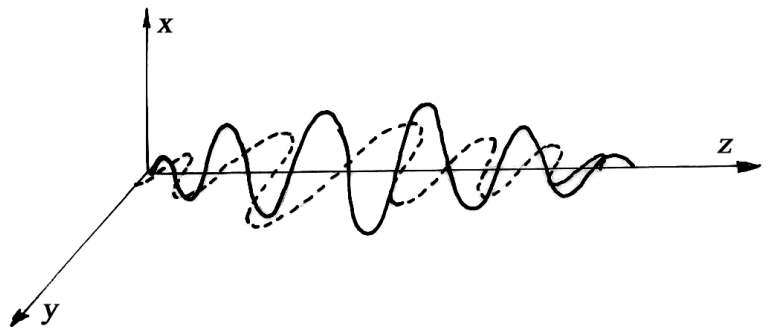
Στην προαναφερόμενη περιγραφή των κυματοσυρμών δεν αναφέρθηκε οτιδήποτε αφορά την κατάσταση πόλωσής τους, βέβαια μέσα στα όρια του χρόνου (και κατά προέκταση του μήκους) συμφωνίας τους, λόγω της πεπερασμένης χωροχρονικής τους διάρκειας. Για το σκοπό αυτό επανερχόμαστε στο συμβάν της κρούσης ενός ηλεκτρονίου (το οποίο προήλθε π.χ. από τον ιονισμό ενός ουδετέρου ατόμου) με ένα εξωτερικό ηλεκτρόνιο (το ηλεκτρονικό του νέφος) ενός άλλου ατόμου. Θεωρούμε την κρούση πλαστική, η οποία θα έχει σαν συνέπεια την πλήρη απορρόφηση της ενέργειας του προσπίπτοντος ηλεκτρονίου. Το γεγονός αυτό θα έχει σαν αποτέλεσμα την προτροπή του κέντρου βάρους του ηλεκτρονικού νέφους σε ταλάντωση, το οποίο με τη σειρά του θα προκαλέσει την εκπομπή κυματοσυρμού.

Το κέντρο βάρος όμως του ηλ. νέφους δεν εκτελεί αποκλειστικά γραμμική ταλάντωση αλλά εν γένει ελλειπτική, που οι παράμετροί της καθορίζονται από τις

συνθήκες πρόσπτωσης του ηλεκτρονίου*. Συνέπεια του τελευταίου είναι να μπορούμε να υποθέσουμε ότι το εκπεμπόμενο πεδίο του κυματοσυρμού είναι σαν να προέρχεται από δύο ταλαντωτές οι οποίοι ταλαντώνονται κάθετα μεταξύ τους όμως είναι αδιαχώρητα συζευγμένοι. Κατά προέκταση και το εκπεμπόμενο πεδίο τους συνίσταται από δύο ορθογώνιες μεταξύ τους συνιστώσες E_x, E_y (Σχ. 4.2.1) οι οποίες δονούνται κάθετα προς τη διεύθυνση διάδοσης. Όμως εν γένει, οι αρχικές τους φάσεις καθώς και τα πλάτη τους δεν είναι ίδια.

Το γεγονός αυτό μας οδηγεί (με βάση και τ' αναφερόμενα στο (Κεφ. 3)) να συμπεράνουμε ότι έκαστος κυματοσυρμός διακρίνεται από μια συγκεκριμένη κατάσταση πόλωσης που εξαρτάται από τα πλάτη (ή το λόγο των πλατών τους) και τη διαφορά φάσης μεταξύ τους. Σ' ένα όμως σημείο μιας δέσμης φωτός που προέρχεται από μια χαοτική πηγή, θα έχουμε την επαλληλία μεγάλου πλήθους κυματοσυρμών διαφορετικών καταστάσεων πόλωσης η οποία οδηγεί σε μια τελική που διατηρείται για χρονικό διάστημα όσο και ο χρόνος συμφωνίας. Από στιγμή σε στιγμή όμως μεταβάλλεται ταχύτατα και με εντελώς τυχαίο τρόπο. Το σύνολο αυτών των καταστάσεων, των διαδιδόμενων στη διεύθυνση z μας δίνει μια δέσμη φυσικού φωτός.

Το πρόβλημα το οποίο τίθεται τώρα είναι με ποιο τρόπο είναι δυνατόν να δημιουργήσουμε μια δέσμη φωτός η οποία να χαρακτηρίζεται από μια συγκεκριμένη κατάσταση πόλωσης για πολύ μεγάλο χρονικό διάστημα. Όπως θα δούμε στα ε-



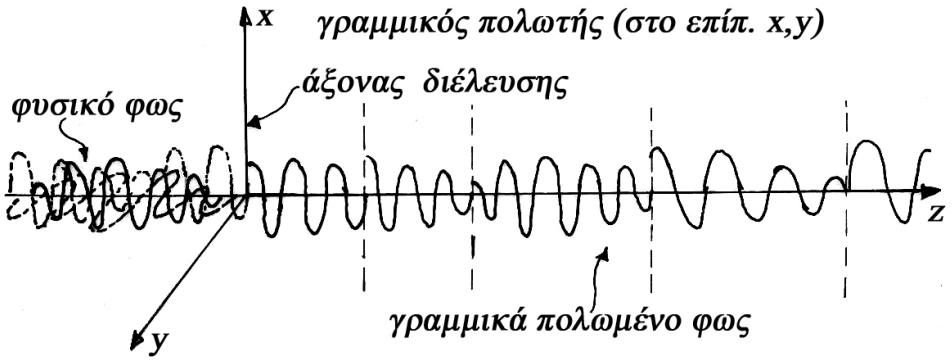
(Σχ. 4.2.1)

πόμενα με τη βοήθεια ενός παραδείγματος, το ζήτημα αφορά τον τρόπο με τον οποίο τα διάφορα οπτικά στοιχεία επιβάλλουν διαδικασίες επιλεκτικότητας κυματοσυρμών συγκεκριμένης κατάστασης πόλωσης. Το προσπίπτον φως – ορισμένης κατάστασης πόλωσης – μετά την έξοδό του από τα προαναφερόμενα στοιχεία, χα-

* Μία πλήρης περιγραφή της ελλειπτικής εν γένει ταλάντωσης του κέντρου βάρους του ηλεκτρονικού νέφους ουδετέρου ατόμου κατά την ανελαστική πρόσκρουση σ' αυτό άλλου ηλεκτρονίου, δίνεται στο βιβλίο: 'J.M.Stone "Radiation and Optics" Ch.12: Radiation from Lorentz atoms.

ρακτηρίζεται από μια άλλη κατάσταση πόλωσης. Ακριβέστερα θ' αναφερθούμε στη δημιουργία μιας δέσμης γραμμικά πολωμένου φωτός μέσω ενός πολωτή polaroid όταν στην είσοδό του προσπέσει φυσικό φως.

Έστω λοιπόν ότι στην είσοδο του γραμμικού πολωτή του οποίου τη δομή περιγράψαμε στην (§ 4.1) πέφτει φυσικό φως. Δηλ. ένα τεράστιο πλήθος κυματοσυρμών διαφορετικών καταστάσεων πόλωσης οι οποίες όμως διατηρούνται για ένα πολύ μικρό χρονικό διάστημα, όσο ο χρόνος συμφωνίας τους. Μέσα σ' αυτό το διάστημα ο πολωτής από κάθε κυματοσυρμό που δρα επάνω του, επιτρέπει (επιλέγει) τη διέλευση εκείνων που είναι γραμμικά πολωμένοι παράλληλα προς τον άξονα διέλευσης του πολωτή (Όσον αφορά την κλασσική άποψη για το φως, από τις δύο συνιστώσες του φυσικού φωτός απορροφιέται η κάθετη προς τον άξονα διέλευσης. Τότε από την έξοδο του πολωτή αναδύεται μια διαταραχή με τη μορφή της ακολουθίας πολλών ασύμφωνων κυματοσυρμών γραμμικά πλέον πολωμένων στο ίδιο επίπεδο x,z (Σχ. 4.2.2). Το ηλεκτρικό τους πεδίο πάλλετε παράλληλα με τον άξονα διέλευσης x. Δηλ. ο καθένας από τους προαναφερμένους κυματοσυρμούς θα διατηρεί τη σταθερότητα της φάσης του για χρονικό διάστημα όσο και ο χρόνος συμφωνίας. Ταχύτατα όμως (έξω από τα προαναφερόμενα χρονικά όρια) και με εντελώς τυχαίο τρόπο θ' ακολουθείται από άλλον με άλλη φάση στο ίδιο πάντα επίπεδο πόλωσης x,z. Η όλη διαδικασία οδηγεί στη διάδοση μετά τον πολωτή polaroid μιας δέσμης γραμμικά πολωμένου φωτός.



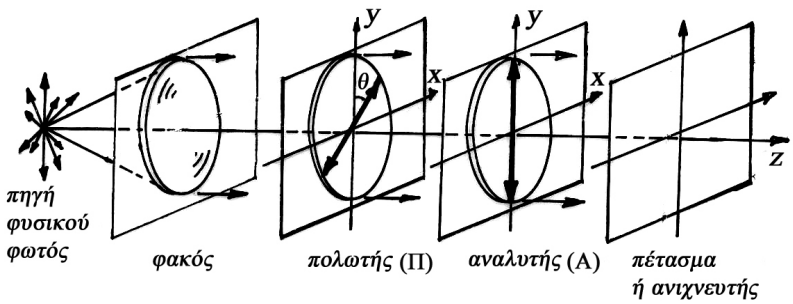
(Σχ. 4.2.2)

Η ασύμφωνη διαδοχή των κυματοσυρμών μετά τον πολωτή δεν συνιστά κάποια διαφορετική κατάσταση πόλωσης από ότι αυτή της γραμμικής. Πράγματι στην (Άσκ.3) αποδεικνύεται ότι για την κλασσική προσέγγιση του Η/Μ πεδίου, η επαλληλία πολλών ασύμφωνων δεσμών της ίδιας όμως κατάστασης πόλωσης, οδηγεί σε μια τελική δέσμη με κατάσταση πόλωσης όπως και οι προηγούμενες.

Στη γενικότερη περίπτωση με βάσει φαινόμενα όπως: η διπλή διάθλαση, ο διχροϊσμός , η ανάκλαση, η διάθλαση κ.λ.π. και τη χρησιμοποίηση εξαρτημάτων όπως: πολωτών, πλακιδίων καθυστέρησης κ.λ.π. οδηγούμαστε μέσω διαδικασιών επιλογής (κυματοσυρμών) – που επιβάλλονται από την ιδιαίτερη δομή των προαναφερόμενων συστημάτων – σε δέσμες φωτός που χαρακτηρίζονται από συγκεκριμένες καταστάσεις πόλωσης. Στην πραγματικότητα τα προαναφερόμενα ανάγονται στο φαινόμενο της αλληλεπίδρασης του φωτός με την ύλη.

4.3 *Νόμος του Malus*

Η διάταξη του (Σχ. 4.3.1) περιλαμβάνει κατ' αρχή μια σχεδόν σημειακή πηγή φυσικού φωτός, τοποθετημένη στο εμπρός εστιακό επίπεδο συγκλίνοντος φακού. Τότε από τον φακό αναδύεται κατά τα γνωστά ένα επίπεδο μέτωπο κύματος. Το τελευταίο προσπίπτει σ' ένα πολωτή (Π) με τον άξονα διέλευσής του σε γωνία θ σε



(Σχ. 4.3.1)

σχέση με τον κατακόρυφο άξονα y. Μετά τον πολωτή (Π) θα διαδίδεται ένα γραμμικά πολωμένο μέτωπο κύματος του οποίου το επίπεδο πόλωσης καθορίζεται από τη διεύθυνση του άξονα διέλευσης και τον άξονα διάδοσης z. Έστω ότι το πλάτος του κύματος αυτού είναι E_0. Τότε η ένταση του φωτός που θ' ανιχνεύσουμε μετά τον (Π) θα δίνεται από τη σχέση:

$$I = I(0) = \frac{c\varepsilon_0}{2} E_0^2 \tag{4.3.1}$$

ανάλογη δηλ. του τετραγώνου του πλάτους E_0. Έστω τώρα ότι μετά τον πολωτή (Π) τοποθετούμε ένα δεύτερο γραμμικό πολωτή (Α) που συνηθίζεται να τον αποκαλούμε ***αναλυτή (analyzer)***, με άξονα διέλευσης παράλληλο με τον άξονα y. Είναι εύκολο να κατανοήσουμε ότι από τον (Α) θα περάσει γραμμικά πολωμένο φως

που το πλάτος του θα είναι η συνιστώσα του E_0 κατά τη διεύθυνση του άξονα διέλευσης δηλ. η $E_0 \cos\theta$. Τότε η ένταση του φωτός που θ' ανιχνεύσουμε μετά τον (Α) θα είναι:

$$I(\theta) = \frac{c\varepsilon_0}{2} E_0^2 \cos^2\theta \qquad (4.3.2)$$

και επειδή $I(0) = c\varepsilon_0 E_0^2/2$ τελικά:

$$I(\theta) = I(0)\cos^2\theta \qquad (4.3.3)$$

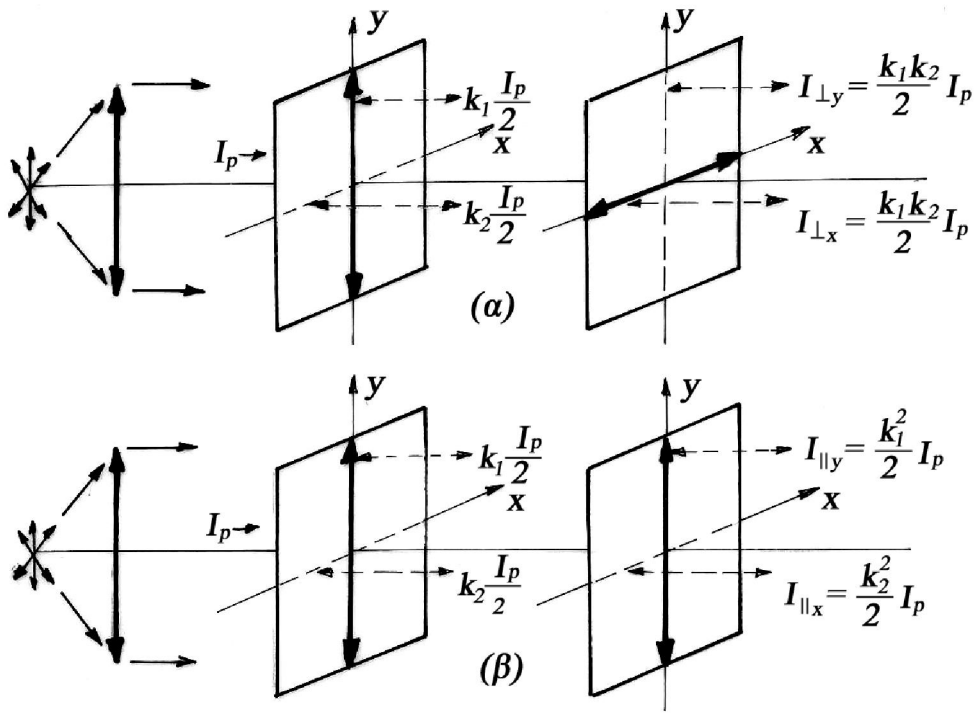
Η παραπάνω σχέση εκφράζει το νόμο του Malus. Για $\theta = 90^0$ από τη (σχ. 4.3.3) θα έχουμε: $I(90^0) = 0$, άρα από τον αναλυτή (Α) δεν θα περάσει καθόλου φως. Θα έχουμε δηλ. κατάσβεση. Τότε λέμε ότι οι πολωτές είναι ***διασταυρωμένοι(crossed)***.

Η κατάσβεση αυτή δεν είναι πλήρης ακόμη και για κρυσταλλικούς πολωτές. Πράγματι έστω μια δέσμη γραμμικά πολωμένου φωτός πέφτει πάνω σ' ένα γραμμικό πολωτή, τον οποίο περιστρέφουμε έτσι ώστε να πετύχουμε τη θέση διέλευσης του φωτός. Τότε ο λόγος k_1 της διερχόμενης έντασης του φωτός προς την προσπίπτουσα ονομάζεται ***μέγιστη κύρια διέλευση (maximum main transmission)***. ***Ελάχιστη κύρια διέλευση (minimum main transmission)*** k_2 είναι ο λόγος της ελάχιστης έντασης του φωτός που πετυχαίνουμε σε κάποια θέση κατά την περιστροφή του πολωτή προς την προσπίπτουσα ένταση του φωτός. Ονομάζουμε ***λόγο κατάσβεσης (extinction ratio)*** το λόγο k_2/k_1. Ο λόγος αυτός τυπικά έχει την τιμή 10^{-3} για φυλλόμορφους πολωτές (π.χ. polaroid) και 10^{-5} για τους κρυσταλλικούς (π.χ. πρίσμα Nicol , πολωτές Glan-Thompson, Glan-Taylor κ.τ.λ. (βλ. § 5.7.1).

Για δύο πανομοιότυπους πολωτές σε σειρά που φωτίζονται με φυσικό φως, μια πιο αυστηρή θεώρηση του νόμου του Malus μας οδηγεί στο εξής συμπέρασμα: Ο λόγος της εξερχόμενης έντασης $I_\perp$ σε θέση κατάσβεσης (πολωτές διασταυρωμένοι) προς την ένταση $I_\parallel$ (θέση που οι άξονες των πολωτών είναι παράλληλοι) είναι περίπου διπλάσιος από τον λόγο κατάσβεσης k_2/k_1. Πράγματι με τη βοήθεια των (Σχ. 4.3.2α,β) βρίσκουμε ότι:

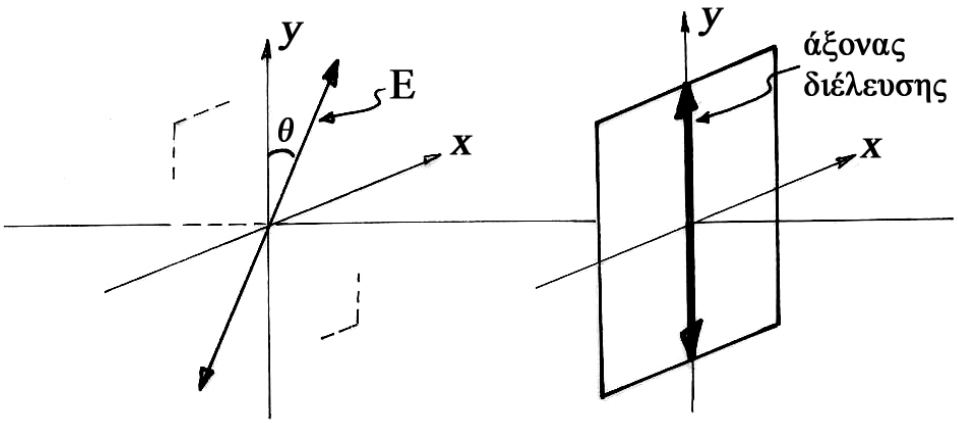
$$I_\perp = I_{x\perp} + I_{y\perp} = k_1 k_2 I_p \qquad (4.3.4) \qquad\qquad I_\parallel = I_{x\parallel} + I_{y\parallel} = \left(k_1^2 + k_2^2\right) I_p / 2 \qquad (4.3.5)$$

Οπότε: $$I_\perp / I_\parallel = \frac{2k_1k_2}{k_1^2 + k_2^2} \simeq 2\frac{k_2}{k_1}, \qquad \text{επειδή:} \qquad k_2 \ll k_1 \qquad (4.3.6)$$



(Σχ. 4.3.2)

Θεωρούμε τώρα ότι σ' ένα γραμμικό πολωτή πέφτει μια δέσμη γραμμικά πολωμένου φωτός με διεύθυνση του **E** να σχηματίζει γωνία θ σε σχέση με τον άξονα διέλευσής του (Σχ. 4.3.3). Το **E** αναλυόμενο κατά x και y θα μας δώσει συνιστώσες:



(Σχ. 4.3.3)

$E_x = E_0 \sin\theta$, $E_y = E_0 \cos\theta$ όπου E_0 το πλάτος της έντασης του ηλεκτρικού πεδίου. Άρα λίγο πριν τον πολωτή οι εντάσεις του φωτός κατά x και y θα είναι:

$$I_x = I_p \sin^2\theta \quad \text{και} \quad I_y = I_p \cos^2\theta \quad \text{με} \quad I_p = E_0^2 \tag{4.3.7}$$

Τότε η διερχόμενη από τον πολωτή ένταση του φωτός I_t θα είναι:

$$I_t = k_1 I_p \cos^2\theta + k_2 I_p \sin^2\theta$$

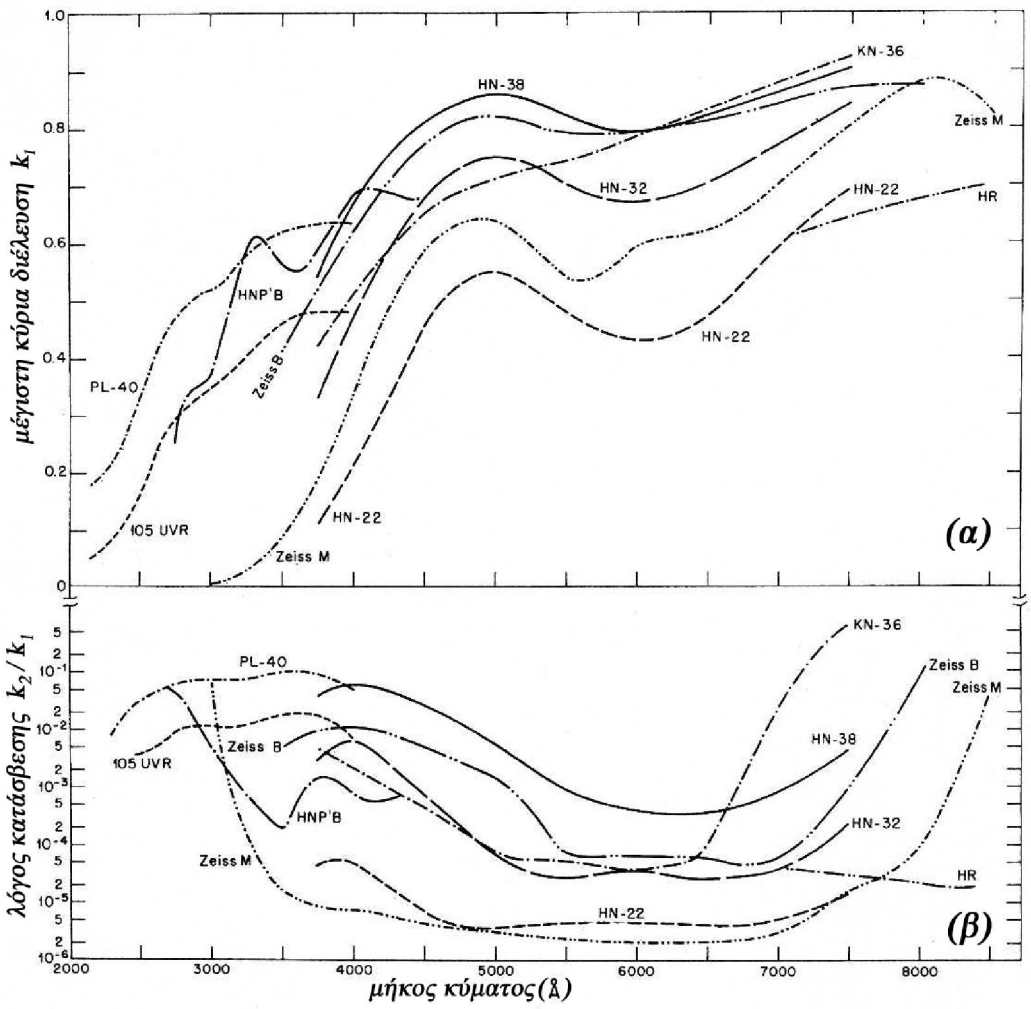
ή

$$I_t = k_1 I_p \cos^2\theta + k_2 I_p (1-\cos^2\theta)$$

οπότε:

$$k = \frac{I_t}{I_p} = (k_1 - k_2)\cos^2\theta + k_2 \tag{4.3.8}$$

k είναι ο πραγματικός λόγος διέλευσης από τον γραμμικό πολωτή, λαμβανομένων υπόψη των k_1, k_2.



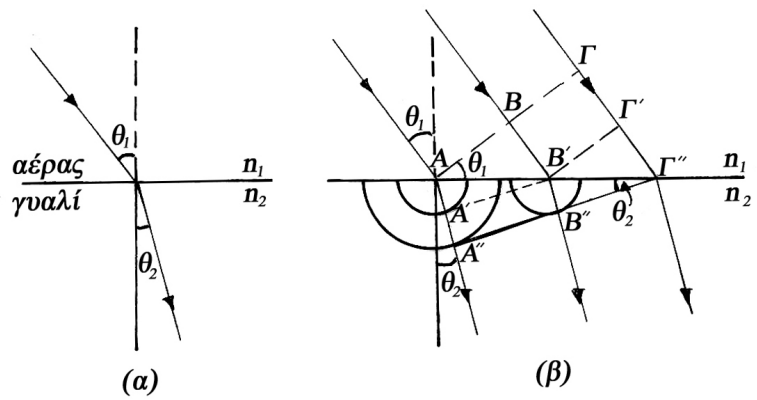
(Σχ. 4.3.4)

Στο (Σχ. 4.3.4α) φαίνεται η μέγιστη κύρια διέλευση k_1 συναρτήσει του μήκους κύματος λ για διαφόρους τύπους γραμμικών πολωτών. Στο (Σχ. 4.3.4β) επίσης δίνεται ο λόγος κατάσβεσης k_2/k_1 συναρτήσει του λ για τους αντίστοιχους πολωτές.

5 *Διπλή διάθλαση του φωτός*

5.1 *Διάθλαση του φωτός από ομογενή και ισότροπα υλικά. Νόμος του Snell*

Θεωρούμε ένα ομογενές και ισότροπο διαφανές μέσο, που διαχωρίζεται από άλλο μέσω μιας επίπεδης επιφάνειας. Π.χ. το σύστημα αέρας-γυαλί του (Σχ. 5.1.1α).



(Σχ. 5.1.1)

Η προσπίπτουσα ακτίνα φωτός (από τον αέρα στο γυαλί) με γωνία θ_1 ως προς την κάθετη στην επιφάνεια (θ_1: γωνία πρόσπτωσης), θα οδεύσει στο δεύτερο μέσο με γωνία θ_2 (θ_2: γωνία διάθλασης). Προσπίπτουσα, διαθλώμενη και κάθετη στην επιφάνεια βρίσκονται στο ίδιο επίπεδο (επίπεδο πρόσπτωσης). Ο νόμος που συσχετίζει τις γωνίες θ_1, θ_2 και τις ταχύτητες διάδοσης του φωτός υ_1, υ_2 στα δύο μέσα, είναι δυνατόν ν' αναδειχθεί με τη βοήθεια της αρχής του Huygens.

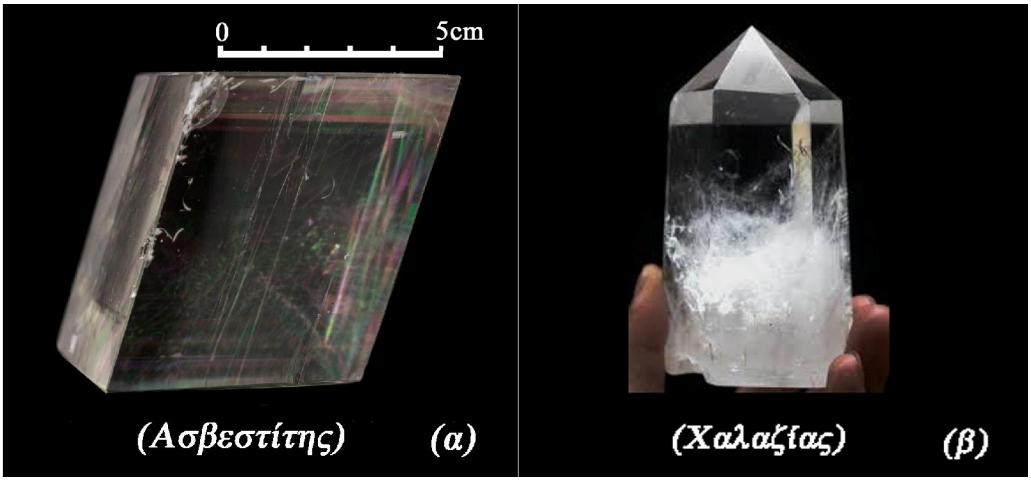
Για το λόγο αυτό θεωρούμε (Σχ. 5.1.1β) την πρόσπτωση ενός επιπέδου μετώπου κύματος $AB\Gamma$ στη διαχωριστική επιφάνεια των δυο μέσων με γωνία θ_1. (Το σημείο B είναι το μέσον της απόστασης $A\Gamma$). Η ταχύτητα του φωτός στο μέσο αυτό είναι υ_1 ενώ στο δεύτερο υ_2. Σε χρόνο π.χ. $t = t_1$, το αρχικό μέτωπο κύματος διαδόθηκε κατά $BB' = \Gamma\Gamma' = \upsilon_1 t_1$ στο πρώτο μέσο ενώ στο δεύτερο κατά $AA' = \upsilon_2 t_1$. Αν θεωρήσουμε τη διάδοση και για ένα επόμενο χρονικό διάστημα t_1 τότε: $\Gamma\Gamma'' = 2\upsilon_1 t_1$ $B'B'' = \upsilon_2 t_1$ και $AA'' = 2\upsilon_2 t_1$. Από τα ορθογώνια τρίγωνα $A\Gamma\Gamma''$ και $A\Gamma''A''$ θα έχουμε: $\Gamma\Gamma''/AA'' = \sin\theta_1/\sin\theta_2$ και επειδή $\Gamma\Gamma'' = 2\upsilon_1 t_1$, $AA'' = 2\upsilon_2 t_1$ τότε:

$$\frac{\sin\theta_1}{\sin\theta_2} = \frac{\upsilon_1}{\upsilon_2} = \frac{c/\upsilon_2}{c/\upsilon_1} = \frac{n_2}{n_1} \Rightarrow n_1 \sin\theta_1 = n_2 \sin\theta_2 \qquad (5.1.1)$$

Η τελευταία σχέση ονομάζεται ***νόμος του Snell***. n_1, n_2 με βάση τη (σχ. 2.2.1) είναι οι δείκτες διάθλασης των δύο μέσων.

5.2 *Διάθλαση του φωτός από ανισότροπα υλικά. Η ανάδειξη του φαινομένου της διπλής διάθλασης στην Ισλανδική κρύσταλλο*

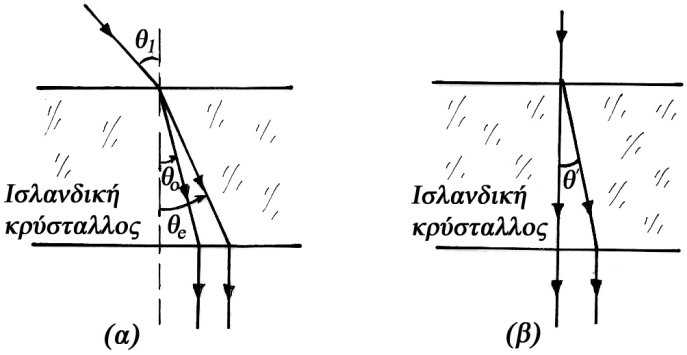
Η ***Ισλανδική κρύσταλλος*** είναι ένας ρομβοεδρικής μορφής (πλάγιο παραλληλεπίπεδο) διαφανής κρύσταλλος που τον συναντούμε στη φύση σαν ορυκτό (Εικ. 5.2.1.α). Κόβουμε από αυτόν τον κρύσταλλο κατά τυχαίο τρόπο ένα τμήμα του ορισμένου πάχους με παράλληλες έδρες και τον λειαίνουμε. Κατόπιν αφήνουμε να



(Εικ. 5.2.1)

προσπέσει μια ακτίνα μονοχρωματικού φωτός με γωνία θ_1 σε σχέση με την κάθετη στην επιφάνειά του (Σχ. 5.2.2α). Τότε βλέπουμε ότι αντί μέσα στο υλικό να οδεύσει μια ακτίνα, οδεύουν δύο. Το φαινόμενο ονομάζεται ***διπλή διάθλαση (double refraction)***. Για την ακτίνα που διαθλάται με γωνία θ_0 ο λόγος $\sin\theta_1/\sin\theta_0$ είναι σταθερός ($\simeq 5/3$), υπακούει δηλ. στο γνωστό νόμο του Snell και ονομάζεται ***τακτική ακτίνα(ordinary ray*** ή ***o-ray)***. Η άλλη που διαθλάται με γωνία θ_e, δεν παρουσιάζει σταθερό λόγο ημιτόνων και ονομάζεται ***έκτακτη ακτίνα (extraordinary ray*** ή ***e-ray)***. Επίσης μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι διπλή διάθλαση εμφανίζεται και κατά την κάθετη πρόσπτωση στην επιφάνεια του κρυστάλλου (Σχ. 5.2.2β). Στην περίπτωση αυτή η τακτική ακτίνα ακολουθεί τη διεύθυνση της προσπίπτουσας, ενώ η έκτακτη σχηματίζει γωνία θ' με την πρώτη. Κατά την έξοδό τους από την άλλη επιφάνεια του κρυστάλλου οι ακτίνες είναι παράλληλες. Τέλος μπορούμε να διαπιστώσουμε ότι υπάρχει μόνο μία χαρακτηριστική διεύθυνση του κρυστάλλου, κατά την

οποία δεν εμφανίζεται το φαινόμενο της διπλής διάθλασης. Πρόκειται για τη διεύθυνση του λεγόμενου ***οπτικού άξονα(optical axis)***. Η ερμηνεία του φαινομένου της



(Σχ. 5.2.2)

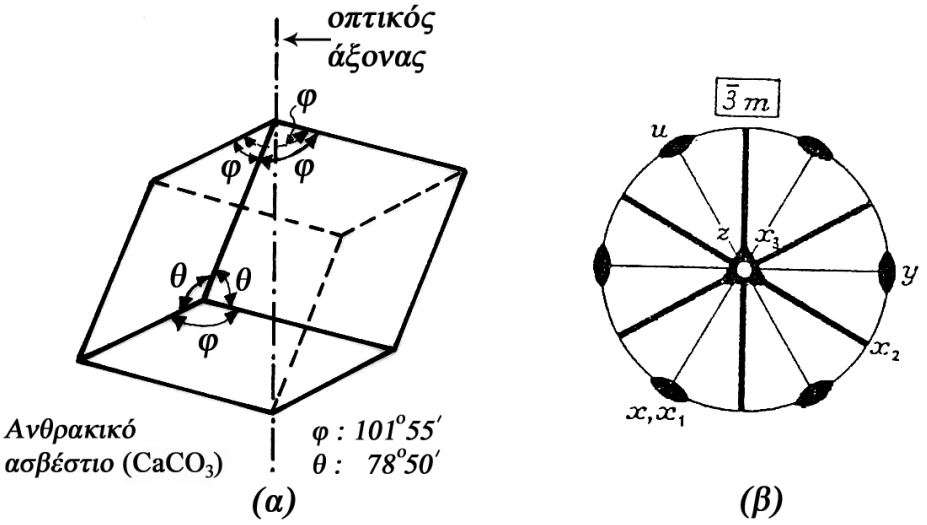
διπλής διάθλασης δίνεται στην (§ 5.5) και θα στηριχθεί στις γνώσεις που αποκομίσαμε στις (§ 2.2 και 2.3) κατά την περιγραφή του μοντέλου του μηχανικού ταλαντωτή του Lorentz και την αρχή του Huygens όπως αυτή εφαρμόζεται στα ανισότροπα υλικά (ταύτιση των ελλειψοειδών κυματίων με τις ***επιφάνειες κύματος*** (§ 5.4) στον κρύσταλλο).

5.3 *Η δομή των μονοαξόνων διπλοθλαστικών κρυστάλλων Ασβεστίτη και α-Χαλαζία*

Ασβεστίτης ή Ισλανδική κρύσταλλος (Calcite)

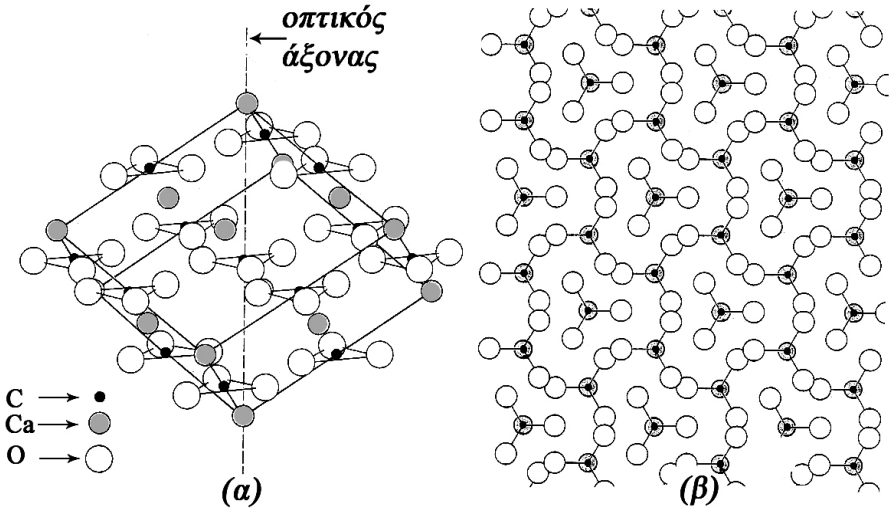
Η χημική του σύσταση είναι: $CaCO_3$ (ανθρακικό ασβέστιο). Έχει ειδικό βάρος $\rho = 2.6 - 2.8\,\mathrm{gr/cm^3}$ και θερμοκρασία τήξης $\theta_m = 1339\,^0C$ (στις 102.5atm). Ανήκει στο Τριγωνικό σύστημα και ειδικότερα στην ομάδα συμμετρίας σημείου $(\bar{3}m)$ (Σχ. 5.3.1β). Δηλ. διαθέτει ένα άξονα συμμετρίας τρίτης τάξης (πρόκειται για τον οπτικό άξονα του κρυστάλλου), κέντρο συμμετρίας, τρεις άξονες δεύτερης τάξης και τρία επίπεδα συμμετρίας. Τα στοιχεία αυτά είναι δυνατόν να γίνουν εμφανή όταν έχουμε τον κρύσταλλο στη φυσική ρομβοεδρική του μορφή (Σχ. 5.3.1α), (Εικ. 5.2.1α) και πιο συγκεκριμένα όταν οι ακμές των εδρών του είναι ίσες μεταξύ τους. Τότε ο οπτικός άξονας θα περνά από τις κορυφές δύο απέναντι τριέδρων στερεών γωνιών που συντίθενται η κάθε μια τους από τρεις αμβλείες γωνίες των $101^0\,55'$. Παράλληλα με τις έδρες του ρομβοέδρου είναι εύκολο ν' απομακρυνθούν τμήμα-

τα του κρυστάλλου. Δηλ. ο κρύσταλλος εμφανίζει ***σχισμό(cleavage)*** και τις περισσότερες φορές η εξωτερική του εμφάνιση είναι η σχισμογενής.



(Σχ. 5.3.1)

Ο Ασβεστίτης εμφανίζει επίσης ισχυρή ***διπλοθλαστικότητα(birefringence)*** δηλ. μεγάλη διαφορά στις ταχύτητες διάδοσης του φωτός (άρα και στους δείκτες

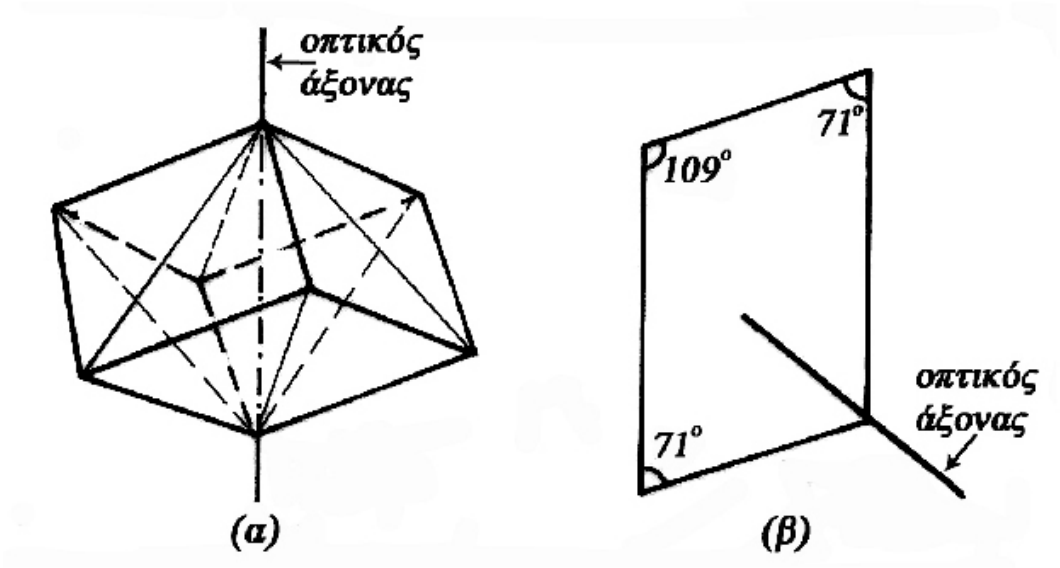


(Σχ. 5.3.2)

διάθλασης) για προσπίπτον φως που είναι γραμμικά πολωμένο παράλληλα και κάθετα με τον οπτικό του άξονα ($n_o = 1.6584, n_e = 1.4864$ (ακραίοι δ.δ.) για $\lambda = 589.3$nm που είναι το φως της λυχνίας του Na). Το γεγονός αυτό γίνεται φανερό αν εξετά-

σουμε τη διάταξη των μορίων του κρυστάλλου στο χώρο (Σχ. 5.3.2α). Εκεί βλέπουμε ότι οι ομάδες CO_3 σχηματίζουν ένα τρίγωνο (με τον άνθρακα στο κέντρο των τριών οξυγόνων), που το επίπεδό του είναι κάθετο στον οπτικό άξονα. Μπορούμε εύκολα να κατανοήσουμε ότι η συμπεριφορά των ταλαντούμενων μοριακών διπόλων για τις περιπτώσεις που το προσπίπτον στον κρύσταλλο πεδίο **E** είναι κάθετο σ' αυτά ή παράλληλο, θα είναι εντελώς διαφορετική. Στο (Σχ. 5.3.2β) βλέπουμε την ορθή προβολή των μορίων του $CaCO_3$ σ' ένα επίπεδο κάθετο στον οπτικό άξονα. Είναι φανερό ότι ο άξονας αυτός είναι τρίτης τάξης δηλ. το διάγραμμα περιστρεφόμενο ανά 120° ταυτίζεται με το αρχικό.

Για το ρομβόεδρο του Ασβεστίτη διακρίνουμε τρία επίπεδα (Σχ. 5.3.3α) τα

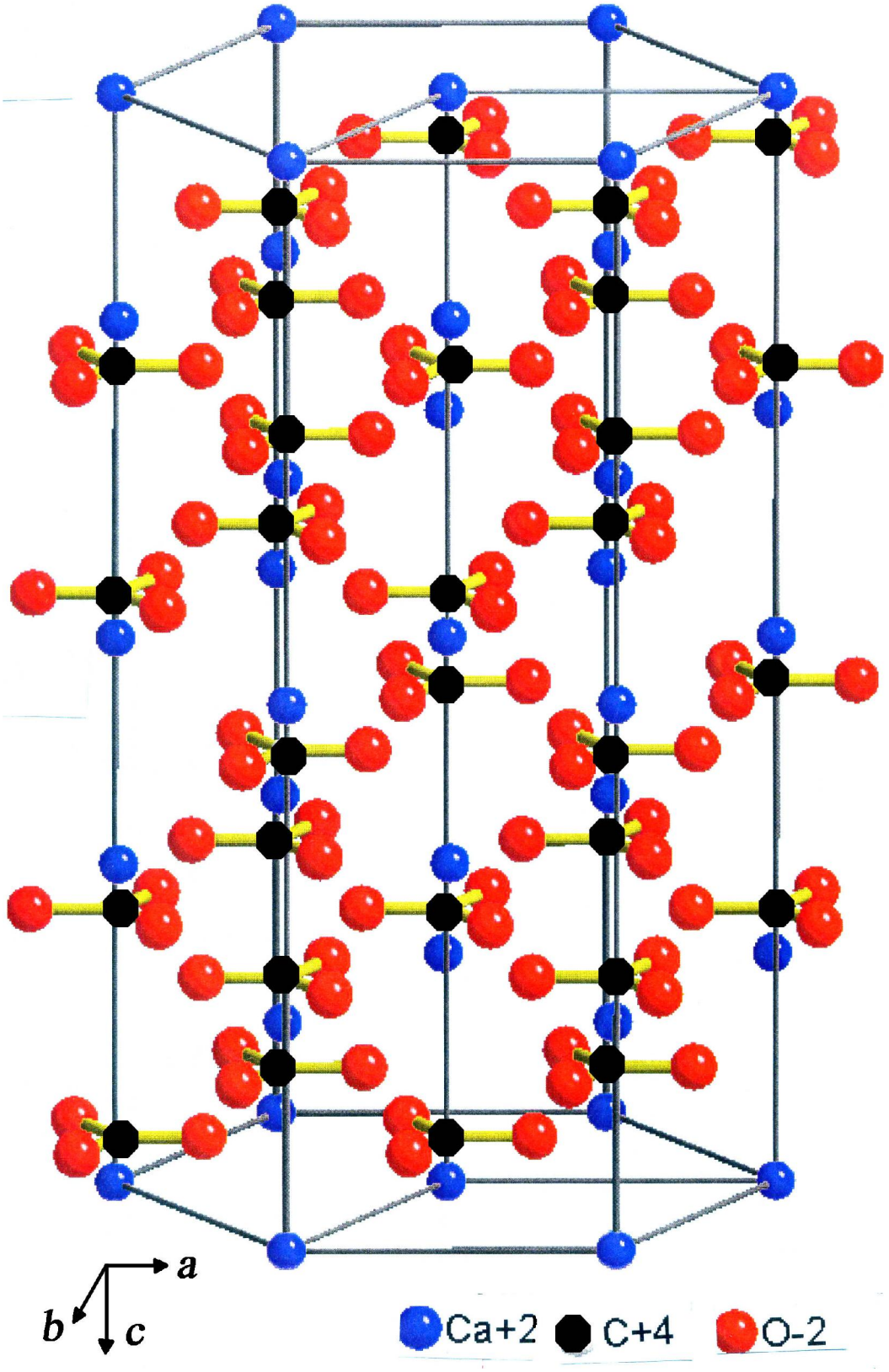


(Σχ. 5.3.3)

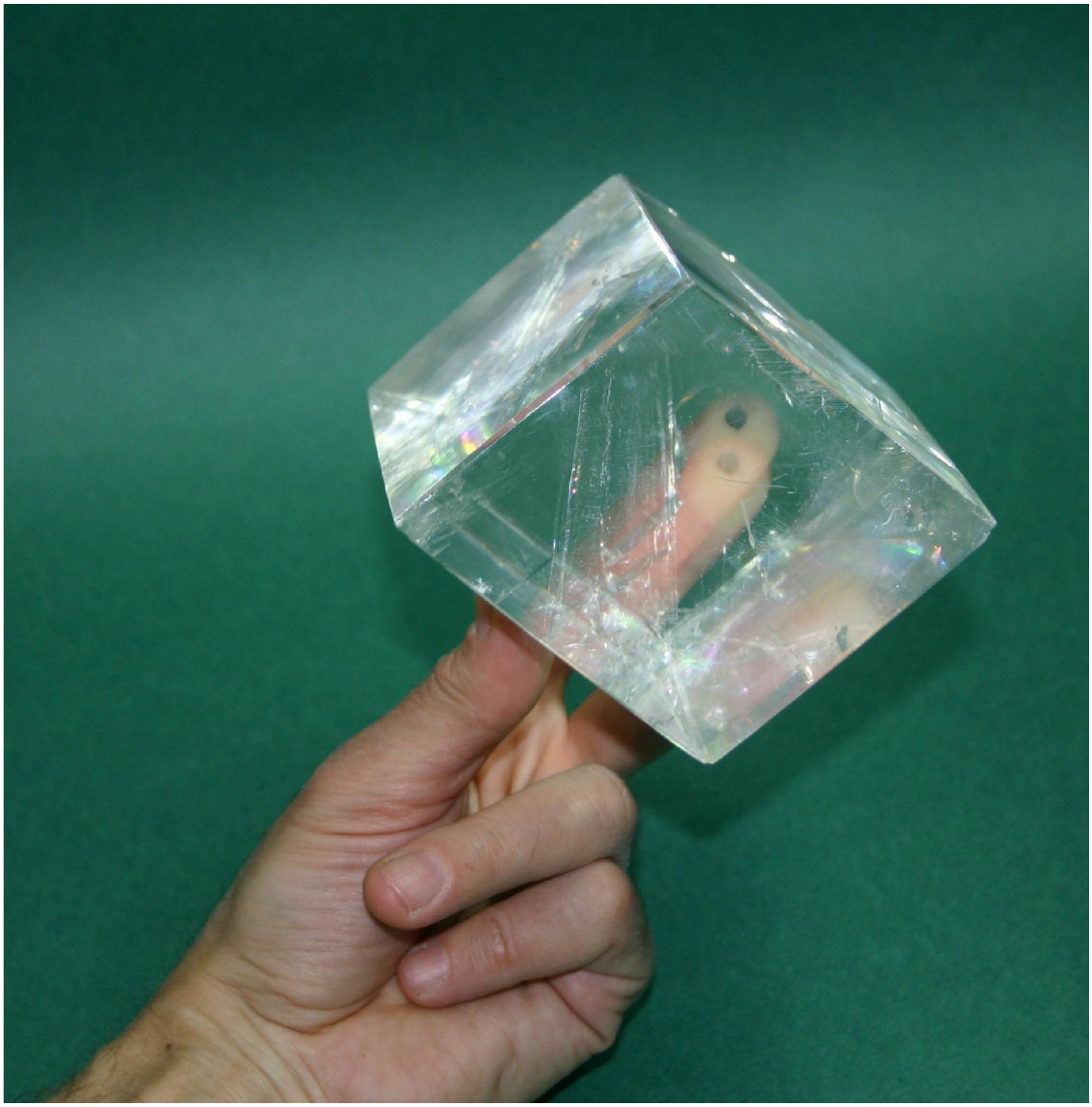
οποία περιλαμβάνουν τον οπτικό άξονα και είναι κάθετα στις απέναντι έδρες του. Ονομάζονται ***κύριες τομές(principal sections)*** του κρυστάλλου. Επίπεδα που περιλαμβάνουν τον οπτικό άξονα αλλά δεν είναι κάθετα σε απέναντι έδρες, ονομάζονται ***κύρια επίπεδα(principal planes)***. Στο (Σχ. 5.3.3β) φαίνονται τα γεωμετρικά χαρακτηριστικά μιας κύριας τομής.

Στην (Εικ. 5.3.4) βλέπουμε τη δομή της κυψελίδας του $CaCO_3$ καθώς και τη διευθέτηση των ατόμων Ca, C και O σ' αυτήν. Επίσης στην (Εικ. 5.3.5) μπορούμε να δούμε ένα ευμεγέθη κρύσταλλο $CaCO_3$ στη σχισμογενή του μορφή με προέλευση από περιοχή της Βραζιλίας. Λόγο του μεγάλου πάχους του, είναι εμφανέστατο το φαινόμενο της διπλής διάθλασης του φωτός, του δείκτη του αριστερού χεριού (που είναι σημαδεμένος με μια μαύρη βούλα), αυτού που συγκρατεί τον κρύσταλλο.

Κτυσταλλική δομή της κυψελίδας του **$CaCO_3$**



(Εικ. 5.3.4)

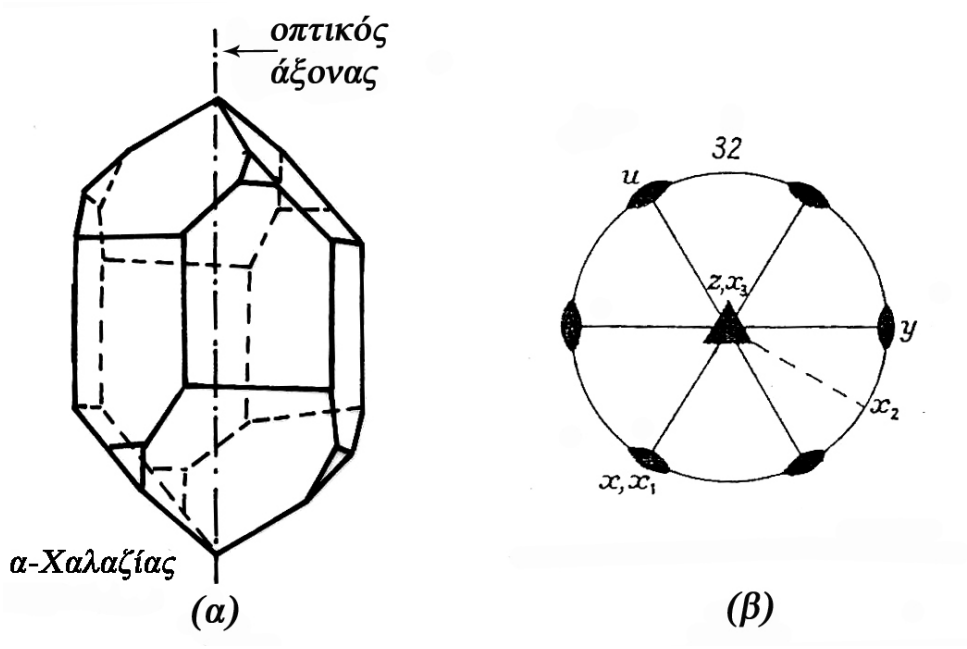


(Εικ. 5.3.5)

Κρύσταλλος α-Χαλαζία (Quartz)

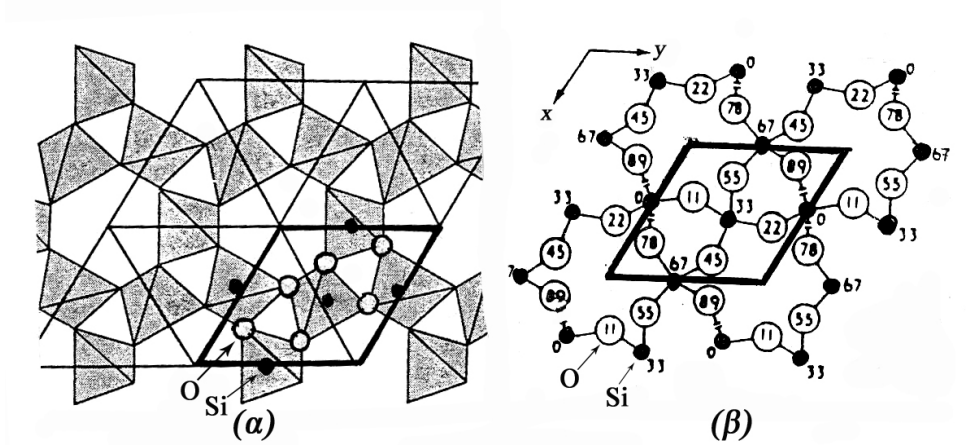
Η χημική του σύσταση είναι: SiO_2 (διοξείδιο του πυριτίου). Έχει ειδικό βάρος περίπου $\rho = 2.648\,\mathrm{gr/cm^3}$ και θερμοκρασία τήξης $\theta_m = 1710\,^0\mathrm{C}$. Εδώ θα περιγράψουμε τον λεγόμενο χαμηλής θερμοκρασιακής σύνθεσης ή α-Χαλαζία $\left(< 573^0\mathrm{C}\right)\left(\mathrm{P3_221}\right)\left(32\right)$. Αυτή είναι μια από τις πολλές παραλλαγές που συναντούμε στη φύση ή παρασκευάζουμε τεχνικά. Ο συγκεκριμένος κρύσταλλος (Εικ. 5.2.1β και Σχ. 5.3.6α) ανήκει στο τριγωνικό σύστημα και ειδικότερα στην ομάδα συμμετρίας σημείου (32) (Σχ. 5.3.4β). Δηλ. διαθέτει ένα άξονα συμμετρίας τρίτης τάξης (οπτικός άξονας του κρυστάλλου) και τρεις άξονες δεύτερης τάξης καθέτους σ' αυτόν. Η

διάταξη των μορίων της παραλλαγής αυτής του Χαλαζία στο χώρο, αποτελείται από ικριώματα – σχηματισμούς τετραέδρων (SiO_4^{4-}), τα οποία ανά δύο μοιράζονται ένα



(Σχ. 5.3.6)

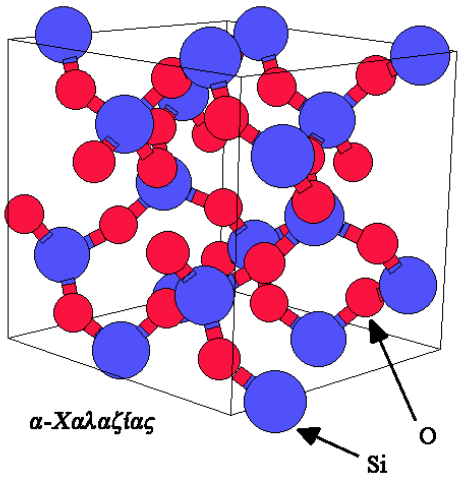
κοινό άτομο οξυγόνου (Σχ.5.3.7α και Σχ. 5.3.8) και τα οποία διευθετούνται με κανονικό τρόπο στο χώρο. Στο (Σχ. 5.3.7β) φαίνεται η ορθή προβολή της δομής του



(Σχ. 5.3.7)

α-Χαλαζία στο επίπεδο που είναι κάθετο στον οπτικό άξονα του κρυστάλλου. Η περιστροφή αυτού του διαγράμματος ανά 120^0 το ταυτίζει με τον εαυτό του γεγονός που αποδεικνύει ότι ο οπτικός άξονας είναι ο άξονας συμμετρίας τρίτης τάξης. Ο Χαλαζίας δεν εμφανίζει μεγάλη διπλοθλαστικότητα. Πράγματι οι κύριοι δ.δ. της τα-

κτικής και της έκτακτης ακτίνας είναι: ($n_o = 1.5443, n_e = 1.5534$ (ακραίοι δ.δ.) για $\lambda = 589.3\text{nm}$ που είναι το φως της λυχνίας του Na).



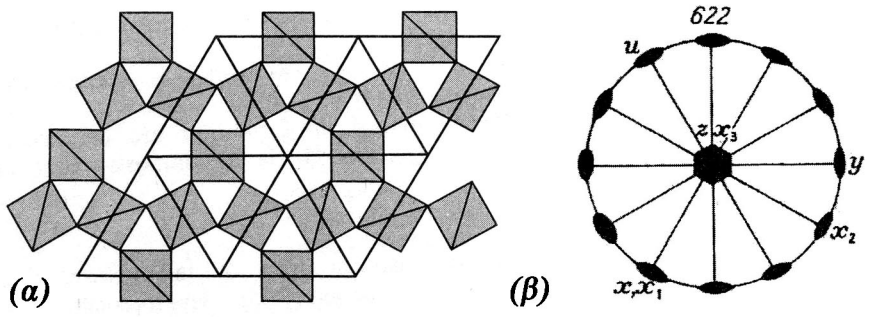
(Εικ. 5.3.8)

Στην (Εικ. 5.3.8) βλέπουμε τη δομή της κυψελίδας του α-Χαλαζία (SiO_2) καθώς και τη διευθέτηση των ατόμων Si και O σ' αυτήν. Επίσης στην (Εικ. 5.3.9) μπορούμε να δούμε μια συστάδα κρυστάλλων α-Χαλαζία όπως αυτοί αναπτυχθήκαν από το υπόβαθρό τους προς διάφορες διευθύνσεις.

(Εικ. 5.3.9)

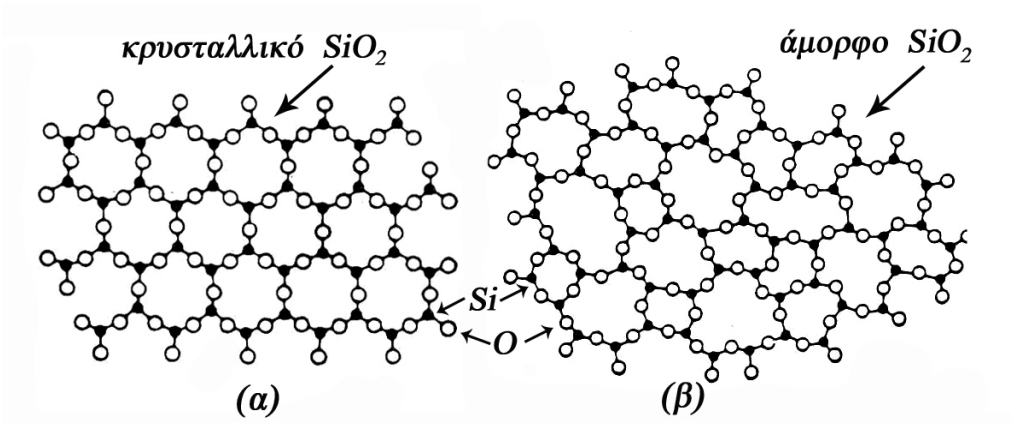
Σημείωση

Θα ήταν χρήσιμο εδώ ν' αναφέρουμε τη διαφορά ενός κρυσταλλικού υλικού και ενός ισοτρόπου όσον αφορά τη μικροσκοπική τους δομή. Σαν άμεσο παράδειγμα μπορούμε να θεωρήσουμε τον κρύσταλλο του β-Χαλαζία (υψηλής θερμοκρασιακής σύνθεσης) $\left(575-870^{0}\mathrm{C}\right)$ που κρυσταλλώνεται στο εξαγωνικό σύστημα στην τάξη (622) (Σχ. 5.3.10β) (ένας άξονας έκτης τάξης και κάθετα σ' αυτόν έξη άξονες δεύτερης τάξης). Η διάταξη των μορίων του σε τετράεδρα φαίνεται στο (Σχ. 5.3.10α). Στο



(Σχ. 5.3.10)

σχήμα (Σχ. 5.3.11α) φαίνεται η ορθή προβολή των μορίων του β-Χαλαζία SiO_2 σε επίπεδο κάθετα στον οπτικό του άξονα, που είναι άξονας συμμετρίας έκτης τάξης



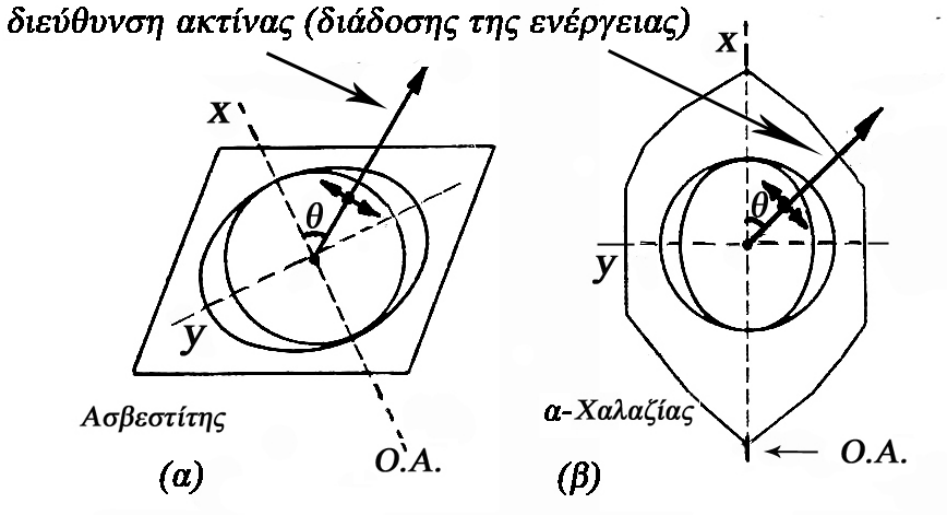
(Σχ. 5.3.11)

(εξαγωνικό σύστημα). Αν τώρα ένα κομμάτι αυτού του κρυσταλλικού υλικού το υποβάλλουμε σε ανόπτυση (το ξανά ψήσουμε) ή το λιώσουμε (τετηγμένος Χαλαζίας) και το επαναφέρουμε στην αρχική του θερμοκρασία θα συμβεί το εξής: Καταστρέφεται η εσωτερική συμμετρική δομή του κρυστάλλου (Σχ. 5.3.6β), με συνέπεια οι

ενδοατομικές γωνίες των δεσμών να μην είναι όπως πριν οι ίδιες. Τότε το πλέγμα του δεν παρουσιάζει σταθερή πολυγωνική μορφή, αλλά καθίσταται μια ανώμαλη πλεγματική δομή. Το γεγονός θα έχει σαν αποτέλεσμα, το κρυσταλλικό υλικό να μετατραπεί σε ομογενές ισότροπο με συνέπεια οι οπτικές του ιδιότητες να είναι οι ίδιες σε οποιαδήποτε κατεύθυνση (π.χ. η ταχύτητα διάδοσης του φωτός).

5.4 *Επιφάνειες κύματος (ή επιφάνειες ταχύτητας ακτίνας) σε μονοάξονες διπλοθλαστικούς κρυστάλλους*

Οι ***επιφάνειες κύματος(wave surfaces)*** ταυτίζονται σε γενικές γραμμές με τη μορφή των ελλειψοειδών κυματίων της αρχής του Huygens, τα οποία χρησιμοποιήσαμε στην (§ 2.3) προκειμένου να ερμηνεύσουμε τη διάδοση της Η/Μ ακτινοβολίας σε κρυστάλλους δηλ. σε ανισότροπα υλικά. Εδώ θα προσπαθήσουμε ν' αποδώσουμε μια περισσότερο φυσική υπόσταση στα κυμάτια, στηριζόμενοι στη διάδοση των διαταραχών του πεδίου στο εσωτερικό των ανισοτρόπων υλικών όπως αυτές προκύπτουν σαν λύσεις της διαφορικής εξίσωσης του Maxwell. Τα συμπεράσματά μας θ' αφορούν μόνο μονοάξονες διπλοθλαστικούς κρυστάλλους αρνητικούς ή θετικούς.



(Σχ. 5.4.1)

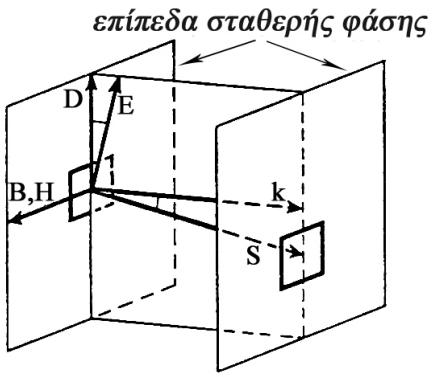
Ξεκινούμε κατ' αρχή θεωρώντας (Σχ. 5.4.1α,β) ότι στο εσωτερικό του κρυστάλλου π.χ. του Ασβεστίτη ή του Χαλαζία υπάρχει μια σημειακή πηγή που εκπέμπει φυσικό φως το οποίο επιπλέον υποθέτουμε ότι είναι σχεδόν μονοχρωματικό. Το σημαντικό ερώτημα το οποίο τίθεται είναι: Τι ακριβώς θα διαδοθεί, με ποιο τρόπο και προς ποια διεύθυνση. Το πρόβλημα είναι αρκετά περίπλοκο και η πλήρης απάντηση μπορεί να δοθεί όπως προαναφέραμε από τη λύση της διαφορικής εξίσωσης

του Maxwell μέσα στα όρια του ανισοτρόπου υλικού. Όμως η διαδικασία αυτή προϋποθέτει τη χρησιμοποίηση μεγεθών όπως είναι η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου $\mathbf{E}$, η ηλεκτρική μετατόπιση $\mathbf{D}$, η ένταση του μαγνητικού πεδίου $\mathbf{H}$, και η μαγνητική επαγωγή $\mathbf{B}$ (βλ. ΠΑΡ/ΜΑ 1). Επειδή το σύνολο σχεδόν της βιβλιογραφίας στο επίπεδο των προπτυχιακών γνώσεων αναφέρεται μόνο στις διαταραχές του ηλεκτρικού πεδίου $\mathbf{E}$ – προκειμένου να περιγράψει τη διάδοση του φωτός στους κρυστάλλους – θ' αναπτύξουμε τη θεωρεία με τη βοήθεια αυτού του πεδιακού μεγέθους.

Έτσι λοιπόν, με τη βοήθεια των συμπερασμάτων που προκύπτουν από τη λύση της δ.ε. του Maxwell, στο εσωτερικό του κρυστάλλου και για μια διεύθυνση που σχηματίζει έστω γωνία θ με τον οπτικό άξονα (για μονοάξονες κρυστάλλους), διαδίδονται εν γένει δύο Η/Μ διαταραχές. Τις δύο αυτές διαταραχές τις περιγράφουμε με τη βοήθεια της έντασης $\mathbf{E}$ του ηλεκτρικού πεδίου. Διαδίδονται με διαφορετικές ταχύτητες $u_o, u_e(\theta)$ (με εξαίρεση κατά μήκος του οπτικού άξονα) για μια ορισμένη διεύθυνση, που ονομάζεται ***διεύθυνση ακτίνας (ray direction)***. Οι ταχύτητες αυτές, δεν είναι οι γνωστές ***ταχύτητες φάσης (phase velocities)*** $\upsilon_o, \upsilon_e(\theta)$ δηλ. οι ταχύτητες διάδοσης των μετώπων κύματος κατά τη διεύθυνση $\mathbf{k}$ της κυματοκαθέτου σ' αυτά. Αλλά είναι οι ταχύτητες κατά τη διεύθυνση του διανύσματος Poynting $\mathbf{S}$, κάθετα στο οποίο πάλλεται το διάνυσμα $\mathbf{E}$ της έντασης του ηλεκτρικού πεδίου. Για το λόγο αυτό ονομάζονται ***ταχύτητες ακτίνας (ray velocities)***. Όπως αποδεικνύεται, κατά μήκος της ακτίνας διαδίδεται η ενέργεια των Η/Μ διαταραχών (βλ. ΠΑΡ/ΜΑ 4-Ε).

Σημείωση

Μια γραφική παράσταση του προσανατολισμού των διανυσμάτων $\mathbf{E}, \mathbf{D}, \mathbf{H}, \mathbf{B}$ σε σχέση με την κυματοκάθετο $\mathbf{k}$ (μεταξύ δυο επιφανειών σταθερής φάσης) και τη διεύθυνση του διανύσματος Poynting $\mathbf{S}$ δίνεται στο παρακάτω σχήμα:



Φαίνεται χαρακτηριστικά ότι η καθετότητα ισχύει μεταξύ των $\mathbf{E}, \mathbf{S}$ και $\mathbf{D}, \mathbf{k}$ και τα διανύσματα $\mathbf{D}, \mathbf{E}$ σχηματίζουν μεταξύ τους γωνία. Τα προαναφερόμενα βρί-

σκονται στο ίδιο επίπεδο που είναι κάθετο μεταξύ δύο ισοφασικών επιφανειών. Στο επίπεδο αυτό είναι κάθετα τα διανύσματα $\mathbf{H},\mathbf{B}$. Η ιδιομορφία αυτή είναι συνέπεια του τρόπου διάδοσης των Η/Μ κυμάτων στο εσωτερικό των ανισοτρόπων υλικών.

Οι συγκεκριμένες διαταραχές του $\mathbf{E}$ (δύο τον αριθμό) κατά μήκος της ακτίνας, είναι ορθογώνιες μεταξύ τους και γραμμικά πολωμένες. Η ορθογωνιότητα μεταξύ των πεδίων $\mathbf{E}$ ισχύει μόνο για μονοάξονες και όχι για τους διάξονες κρυστάλλους. Για την περίπτωση των (Σχ. 5.4.1α,β) όπου βλέπουμε μια τομή του κρυστάλλου του Ασβεστίτη (και του α-Χαλαζία αντίστοιχα) που περιλαμβάνει τον οπτικό του άξονα, η μια διαταραχή, είναι πάντοτε κάθετη προς τον οπτικό άξονα και ονομάζεται ***τακτική(ordinary)*** (•). Η άλλη είναι παράλληλη πάνω στο επίπεδο που ορίζουν η διεύθυνση της ακτίνας και ο οπτικός άξονας. Είναι κάθετη επίσης στη διεύθυνση της ακτίνας. Ονομάζεται ***έκτακτη (extra-ordinary)*** ($\leftrightarrow$).

Η ταχύτητα διάδοσης της τακτικής διαταραχής του $\mathbf{E}$ είναι η ίδια προς κάθε κατεύθυνση και δίνεται από τη σχέση:

$$u_o(\theta) = \upsilon_o \tag{5.4.1}$$

όπου υ_o ταχύτητα φάσης της τακτικής διαταραχής. Η ταχύτητα διάδοσης του $\mathbf{E}$ της έκτακτης όμως είναι διαφορετική για διαφορετικές γωνίες θ και αποδεικνύεται ότι ισχύει:

$$\frac{1}{u_e(\theta)^2} = \frac{\sin^2\theta}{\upsilon_e^2} + \frac{\cos^2\theta}{\upsilon_o^2} \tag{5.4.2}$$

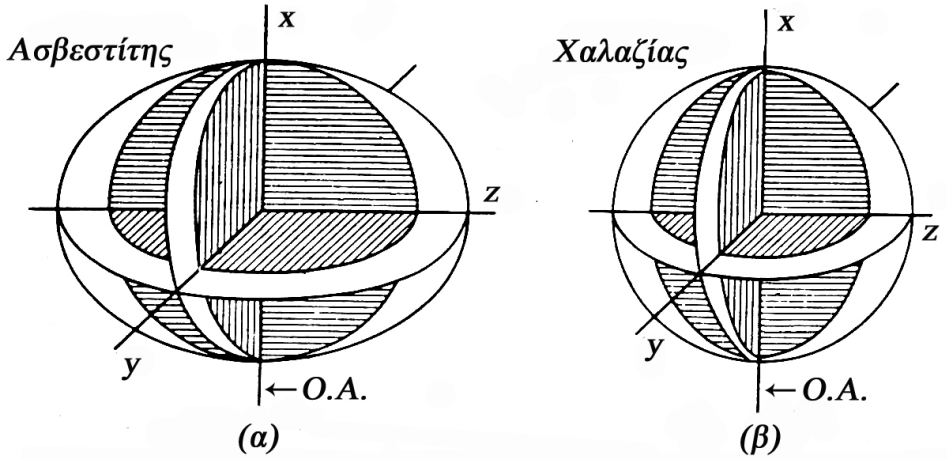
όπου υ_e η ταχύτητα φάσης της έκτακτης διαταραχής και υ_o αυτή που δίνεται από τη (σχ. 5.4.1) δηλ. η ταχύτητα της τακτικής. Διαπιστώνουμε επίσης (σχ. 5.4.2) ότι για διάδοση κατά μήκος του οπτικού άξονα όπου $\theta = 0^0$, $u_e(0^0) = u_o = \upsilon_o$ δηλ. έχουμε σύμπτωση των δύο ταχυτήτων. Επίσης όταν $\theta = 90^0$ $u_e(90^0) = \upsilon_e$. Δηλ. όπως ήδη αναφέραμε κατά τη διεύθυνση του οπτικού άξονα και κάθετα σ' αυτόν οι ταχύτητες ακτίνας u και οι ταχύτητες φάσης υ συμπίπτουν.

Μετά από ένα ορισμένο χρονικό διάστημα t από το σημείο O του κρυστάλλου, οι διαταραχές των $\mathbf{E}$ κατά μήκος της ακτίνας θα βρίσκονται σε αποστάσεις:

$$l_o = u_o(\theta)t = \upsilon_o t \quad \text{και} \quad l_e = u_e(\theta)t \tag{5.4.3}$$

Οι περιβάλλουσες αυτών των διαταραχών είναι αντίστοιχα οι γεωμετρικοί τόποι ενός κύκλου και μιας έλλειψης (Σχ. 5.4.1) οι οποίες όμως εφάπτονται σε διεύθυνση

κατά μήκος του οπτικού άξονα. Για να έχουμε τελικά μια άποψη της μορφής αυτών των επιφανειών για τη διάδοση του φωτός σ' όλο τον όγκο του κρυστάλλου, αρκεί να περιστρέψουμε τον κύκλο και την έλλειψη κατά 360^0 γύρω από τον οπτικό άξονα. Τότε οι επιφάνειες που θα προκύψουν είναι μια σφαίρα και ένα ελλειψοειδές εκ περιστροφής που θα εφάπτονται σε δυο σημεία του οπτικού άξονα (Σχ. 5.4.2). Η σφαιρική επιφάνεια ονομάζεται ***τακτική επιφάνεια κύματος (ordinary wave surface)*** και θ' αφορά κατά τα γνωστά διαταραχές του πεδίου **E** που είναι κατά τη διάδοσή τους πολωμένες κάθετα προς τον οπτικό άξονα του κρυστάλλου. Η άλλη επιφάνεια θ' αφορά διαταραχές του **E** που είναι πολωμένες παράλληλα προς το επίπεδο του κρυστάλλου που εξετάζουμε κάθε φορά(δηλ. το επίπεδο που σχηματίζουν ο οπτικός άξονας και η ακτίνα διάδοσης) και συγχρόνως κάθετες στη διεύθυνση της

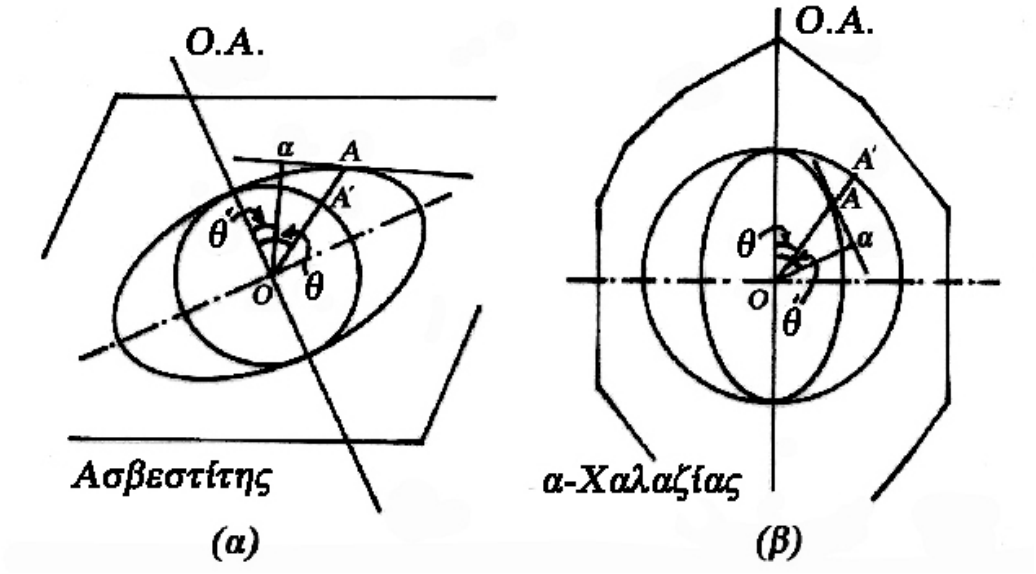


(Σχ. 5.4.2)

ακτίνας του φωτός. Ονομάζεται ***έκτακτη επιφάνεια κύματος (extra-ordinary wave surface)*** (Σχ. 5.4.2α,β).

Θα πρέπει εδώ να διευκρινίσουμε οπωσδήποτε ξανά, ότι οι ταχύτητα διάδοσης της έκτακτης διαταραχής (ταχύτητα ακτίνας), δεν συμπίπτει με την ταχύτητα διάδοσης του αντιστοίχου μετώπου κύματος (ταχύτητα φάσης). Το γεγονός φαίνεται χαρακτηριστικά στα (Σχ. 5.4.3α,β). Πράγματι έστω ότι για μια ορισμένη διεύθυνση διάδοσης θ (ως προς τον οπτικό άξονα) η ακτίνα συναντά την έλλειψη στο σημείο A ($OA \sim u_e(\theta)$). Στο σημείο A φέρνουμε την εφαπτόμενη της έλλειψης (στο χώρο πρόκειται για εφαπτόμενο επίπεδο), η οποία συμπίπτει με το δημιουργούμενο μέτωπο κύματος διάδοσης της έκτακτης διαταραχής. Κατόπιν φέρνουμε την $O\alpha$ που είναι κάθετη στην εφαπτόμενη. Τότε η διεύθυνση της $O\alpha$ θα είναι αυτή της ***κυματοκάθετης (wave normal)*** **k** και κατά συνέπεια το μέτρο του $O\alpha$ θα είναι ανάλογο με την ταχύτητα φάσης του κύματος Μεταξύ των u και υ υφίσταται η σχέση $u = \upsilon/\cos\phi$ όπου $\phi = \theta - \theta'$ η γωνία μεταξύ των διανυσμάτων **k**

και **S** (ΠΑΡ/ΜΑ 4-Ε (σχ. Ε-14)). Η διεύθυνση της κυματοκάθετης βλέπουμε ότι σχηματίζει γωνία θ' με τον οπτικό άξονα. Όσον αφορά τη διάδοση της τακτικής διαταραχής γίνεται φανερό από το (Σχ. 5.4.3) ότι η διεύθυνση της ταχύτητας ακτίνας και της ταχύτητας φάσης συμπίπτουν και αυτό για κάθε γωνία διάδοσης θ, όπως



(Σχ.5.4.3)

συμπίπτουν και τα μέτρα τους. Επίσης βλέπουμε ότι για $\theta = 90^0$ οι ταχύτητες ακτίνας και φάσης συμπίπτουν και για την έκτακτη διαταραχή. Τότε μπορούμε να υπολογίσουμε τους δείκτες διάθλασης για τη συγκεκριμένη διεύθυνση ($\theta = 90^0$) της τακτικής και της έκτακτης διαταραχής από τους γνωστούς τύπους:

$$n_o = \frac{c}{\upsilon_o} \quad \text{και} \quad n_e = \frac{c}{\upsilon_e} \tag{5.4.4}$$

Οι παραπάνω ονομάζονται ***κύριοι δείκτες διάθλασης(main refractive indexes)*** και οι τιμές τους αντιπροσωπεύουν ακραίες τιμές για τον συγκεκριμένο κρύσταλλο.

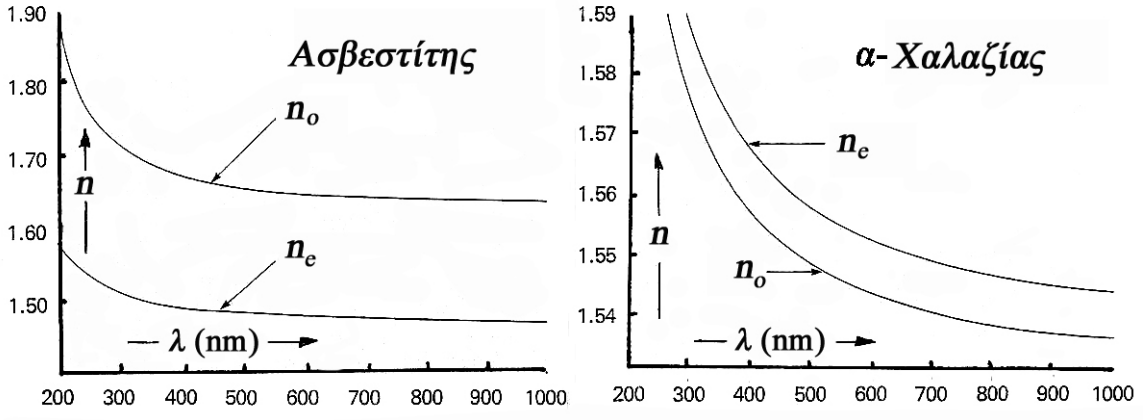
Ανάλογα με τις τιμές των δ.δ., τους μονοάξονες κρυστάλλους τους διακρίνουμε σε ***αρνητικούς(negative)*** όταν $n_e < n_o$ και θετικούς ***(positive)*** όταν $n_e > n_o$. Κλασσικό παράδειγμα αρνητικού κρυστάλλου είναι ο Ασβεστίτης και θετικού ο α-Χαλαζίας. Στην περίπτωση αρνητικού κρυστάλλου η έκτακτη επιφάνεια κύματος (ελλειψοειδές) περιβάλλει την τακτική(σφαίρα). Το αντίθετο συμβαίνει για τους θετικούς κρυστάλλους. Στον (Πιν. 5.4.4) δίνονται οι τιμές των n_e, n_o για τον Ασβεστίτη και τον Χαλαζία σε μ.κ. που αντιστοιχούν στις γραμμές εκπομπής διαφόρων

Κύριοι Δείκτες Διάθλασης Ασβεστίτη και Χαλαζία στους 18° C

Πηγή	Μήκος κύματος Å	Ασβεστίτης n_o	Ασβεστίτης n_e	Χαλαζίας n_o	Χαλαζίας n_e	Τετηγμένος Χαλαζίας
Au	2000.60	1.90302	1.57663	1.64927	1.66227	
Cd	2265.03	1.81300	1.54914	1.61818	1.62992	1.52308
Cd	2573.04	1.76048	1.53013	1.59622	1.60714	1.50379
Cd	2748.67	1.74147	1.52267	1.58752	1.59813	1.49617
Sn	3034.12	1.71956	1.51366	1.57695	1.58720	1.48594
Cd	3403.65	1.70080	1.50561	1.56747	1.57738	1.47867
Hg	4046.56	1.68134	1.49694	1.55716	1.56671	1.46968
H_γ	4340.47	1.67552	1.49552	1.55396	1.56340	1.46690
H_β	4861.33	1.66785	1.49076	1.54968	1.55898	1.46318
Hg	5460.72	1.66168	1.48792	1.54617	1.55535	1.46013
Hg	5790.66	1.65906	1.48674	1.54467	1.55379	
Na	5892.90	1.65836	1.48641	1.54425	1.55336	1.45845
H_α	6562.78	1.65438	1.48461	1.54190	1.55093	1.45640
He	7065.20	1.65207	1.48359	1.54049	1.54947	1.45517
K	7664.94			1.53907	1.54800	
Rb	7947.63			1.53848	1.54739	1.45340
	8007.00	1.64867	1.48212			
O	8446.70			1.53752	1.54640	
	9047.0	1.64579	1.48095			
Hg	10140.6			1.53483	1.54360	
	10417.0	1.64276	1.47982			
Ar^+ Laser	4880	1.66775	1.49084	1.54957	1.55886	
Ar^+ Laser	5145	1.66465	1.48931	1.54789	1.55712	
He-Ne Laser	**6328**	1.65556	1.48508	1.54266	1.55171	

(Πιν. 5.4.4)

στοιχείων. Στον ίδιο πίνακα δίνονται και οι τιμές των δ.δ. του ισοτρόπου τετηγμένου Χαλαζία. Στο (Σχ.5.4.5) παρουσιάζονται οι καμπύλες διασκεδασμού (δ.δ. συναρ-



(Σχ.5.4.5)

τήσει του μ.κ.) για τον Ασβεστίτη και τον α-Χαλαζία μεταξύ $(200-1000\text{nm})$ του Η/Μ φάσματος.

Οι επιφάνειες κύματος όπως προαναφέραμε, ονομάζονται και επιφάνειες ταχύτητας ακτίνας. Πράγματι οι αποστάσεις από το κέντρο των διαταραχών Ο (σημειακή πηγή) στο εσωτερικό του κρυστάλλου έως τις δύο επιφάνειες είναι ανάλογες των ταχυτήτων διάδοσης της ενέργειας του Η/Μ πεδίου στις διευθύνσεις αυτές. Παράλληλα και κάθετα προς τον οπτικό άξονα (όπου διεύθυνση ακτίνας και κυματοκαθέτου συμπίπτουν) θα έχουμε: $n = c/\upsilon = c/u$ οπότε $\upsilon = u \sim 1/n$. Άρα τα μήκη των ημιαξόνων των ελλείψεων θα είναι αντιστρόφως ανάλογα των δ.δ. όπως φαίνεται στα (Σχ. 5.4.6) για αρνητικό και θετικό αντίστοιχα κρύσταλλο. Επίσης λόγω του φαινομένου του διασκεδασμού, το μέγεθος των επιφανειών κύματος θα είναι διαφορετικό για κάθε μ.κ. Η εξίσωση του ελλειψοειδούς της επιφάνειας κύματος στο χώρο δίνεται από τη σχέση:

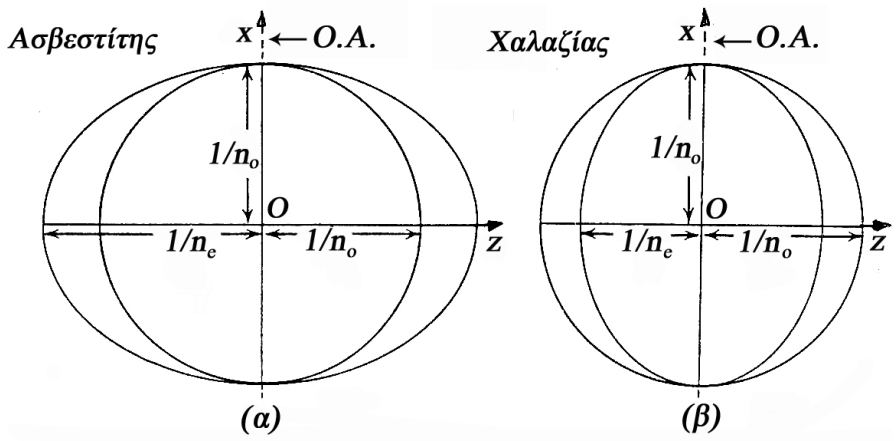
$$\frac{x^2}{(1/n_o)^2} + \frac{y^2 + z^2}{(1/n_e)^2} = 1 \qquad (5.4.5)$$

ενώ της έλλειψης σε ένα κύριο επίπεδο που περιλαμβάνει τον οπτικό άξονα από την:

$$\frac{x^2}{(1/n_o)^2} + \frac{z^2}{(1/n_e)^2} = 1 \qquad (y = 0) \qquad (5.4.6)$$

Για τη σφαιρική επιφάνεια κύματος καθώς και τον κύκλο στο κύριο επίπεδο θα πρέπει απλά ν' αντικαταστήσουμε στις (σχ. 5.4.5,6) όπου $n_e = n_o$.

Θα πρέπει ν' αναφέρουμε ότι στα σχήματα αυτού του κεφαλαίου, η διαφορά μεταξύ κύκλων(σφαιρών) και ελλείψεων (ελλειψοειδών) υπερτονίζονται για εποπτικούς λόγους. Η ελλειπτικότητα της έλλειψης για τον Ασβεστίτη στην πραγματικότητα είναι 11% ενώ για τον Χαλαζία 0.6%. Το γεγονός από φυσική άποψη σημαίνει

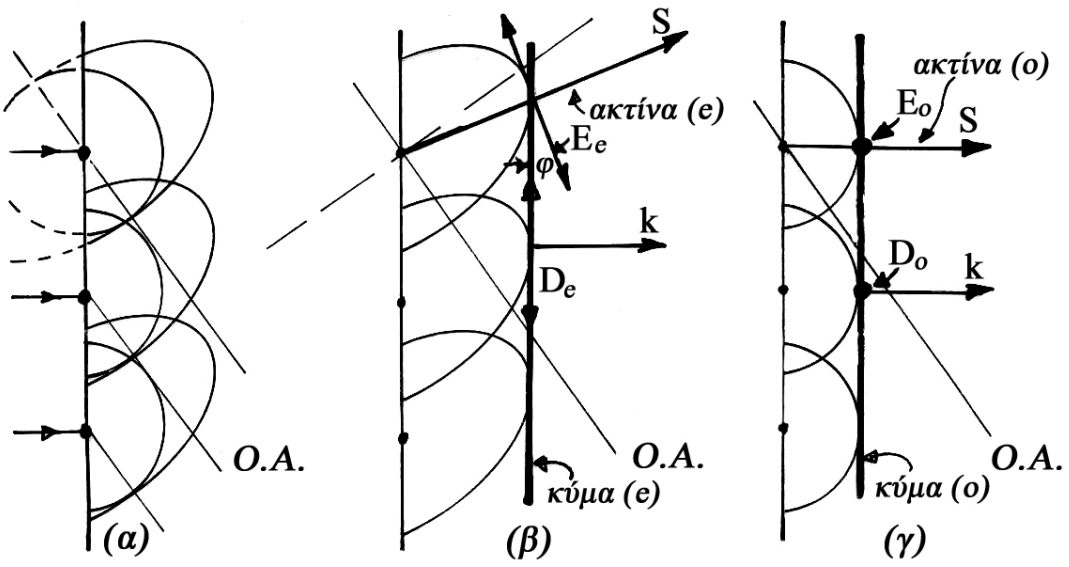


(Σχ.5.4.6)

ότι η ***διπλοθλαστικότητα (birefringence)*** $(n_e - n_o)$ (που αποτελεί όπως θα δούμε στα επόμενα ένα μέτρο διαχωρισμού της έκτακτης από την τακτική ακτίνα κατά τη διαδικασία της διπλής διάθλασης) είναι αρκετά μεγαλύτερη για τον Ασβεστίτη.

Ο προσδιορισμός των διευθύνσεων των ακτίνων και των μετώπων κύματος στο εσωτερικό των κρυστάλλων κατά τη διαδικασία της διπλής διάθλασης του φωτός, μπορεί να γίνει εδώ με τη βοήθεια των αναπτυσσόμενων επιφανειών κύματος με αρχικά κέντρα διέγερσης τα σημεία της επιφάνειας του κρυστάλλου στα οποία προσπίπτει εξωτερικά ένα μέτωπο κύματος φωτός. Στην περίπτωση αυτή ακριβώς φαίνεται η σύμπτωση μεταξύ των επιφανειών κύματος και των κυματιδίων του Huygens (§ 2.3), τα οποία υποθέσαμε ότι διαδίδονται στα ανισότροπα υλικά. Σαν παράδειγμα (Σχ. 5.4.7), θεωρούμε την πρόσπτωση ενός επιπέδου μετώπου κύματος(φυσικού φωτός) κάθετα σε μια φυσική έδρα ενός κρυστάλλου Ασβεστίτη και παράλληλα στο επίπεδο μιας κύριας τομής του (επίπεδο κάθετο σε δύο απέναντι φυσικές έδρες και που περιλαμβάνει τον οπτικό του άξονα). Στο (Σχ. 5.4.7α) θεωρούμε έστω τρία χαρακτηριστικά κέντρα διέγερσης που δημιουργούνται στην επιφάνεια πρόσπτωσης του φωτός. Τότε κατά τα γνωστά οι διαταραχές εν γένει που διαδίδονται προς οποιαδήποτε διεύθυνση στο εσωτερικό του κρυστάλλου θα είναι: α) οι έκτακτες (*e*) (Σχ. 5.4.7β), που στο επίπεδο της κύριας τομής παρίστανται από τομές ελλειψοειδών εκ περιστροφής περί τον οπτικό άξονα και β) οι τακτικές (*o*) (Σχ. 5.4.7γ) που είναι τομές σφαιρών (δηλ. κύκλοι) στο ίδιο επίπεδο. Κατά τα γνωστά

στις δύο περιπτώσεις των (*e*) και (*o*) διαταραχών, το διάνυσμα **E** του ηλεκτρικού πεδίου είναι κάθετο στη διεύθυνση της αντίστοιχης ακτίνας. Η ακτίνα καθορίζεται από ένα σημείο διαταραχής και το αντίστοιχο σημείο επαφής με την έλλειψη (*e*-κύμα) ή του κύκλου (*o*-κύμα), με την περιβάλλουσα των άλλων ελλείψεων ή των



(Σχ.5.4.7)

κύκλων αντίστοιχα. Η διεύθυνση αυτή, είναι του διανύσματος Poynting **S** δηλ. εκείνη της διάδοσης της ενεργείας στο εσωτερικό του κρυστάλλου. Τι ακριβώς όμως συμβαίνει με τα διαδιδόμενα στον κρύσταλλο μέτωπα κύματος (*e*) και (*o*);

Κατ' αρχή για να σχεδιάσουμε τα μέτωπα κύματος των (*e*) και (*o*) διαταραχών, θα πρέπει μετά από ένα χρονικό διάστημα διάδοσής τους, να φέρουμε τις εφαπτόμενες (περιβάλλουσες) των ελλείψεων και των κύκλων, που στην πραγματικότητα αντιστοιχούν σε σημεία ίσης φάσης. Τότε κάθετα σ' αυτές θα βρίσκεται το διάνυσμα **k** της κυματοκαθέτου. Αποδεικνύεται ότι για τις δύο περιπτώσεις των (*e*) και (*o*) διαταραχών το διάνυσμα **D** της ηλεκτρικής μετατόπισης είναι κάθετο στο **k** και κάθετα μεταξύ τους δηλ. ισχύουν οι σχέσεις (Ασκ. 14,15-Λυμένες):

$$\mathbf{D}_e \cdot \mathbf{k} = 0 \qquad \mathbf{D}_o \cdot \mathbf{k} = 0 \qquad \mathbf{D}_o \cdot \mathbf{D}_e = 0 \tag{5.4.7}$$

Όμως (όπως χαρακτηριστικά φαίνεται στα (Σχ. 5.4.7β,γ)) παρά το ότι για το τακτικό κύμα : $\mathbf{E}_o \parallel \mathbf{D}_o$, για το έκτακτο τα διανύσματα $\mathbf{E}_e$ και $\mathbf{D}_e$ δεν είναι παράλληλα δηλ.

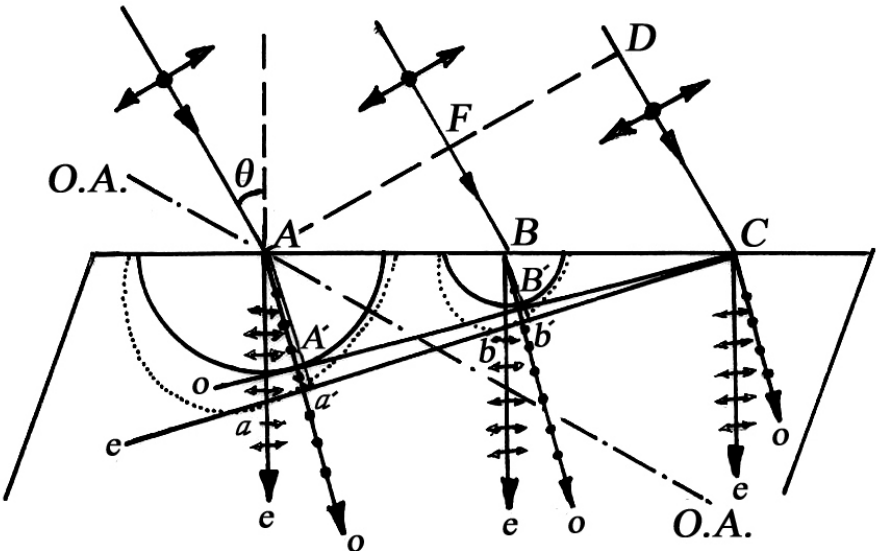
$$|\mathbf{E}_o \times \mathbf{D}_o| = 0 \qquad \text{αλλά} \qquad |\mathbf{E}_e \times \mathbf{D}_e| = |\mathbf{E}_e||\mathbf{D}_e| \sin\phi \neq 0 \tag{5.4.8}$$

Τέλος για τους μονοάξονες κρυστάλλους που εξετάζουμε εδώ, θα ισχύουν οι σχέσεις:

$$\mathbf{D}_e \cdot \mathbf{E}_o = 0 \quad , \quad \mathbf{D}_o \cdot \mathbf{E}_e = 0 \quad , \quad \mathbf{E}_e \cdot \mathbf{E}_o = 0 \tag{5.4.9}$$

5.5 *Ερμηνεία της διάδοσης του φωτός σε ορισμένες διευθύνσεις στο εσωτερικό ενός κρυστάλλου Ασβεστίτη*

Στην (§ 5.2) (Σχ. 5.2.2) έχει περιγραφεί στοιχειωδώς η διπλή διάθλαση για το φως που πέφτει πλάγια ή κάθετα στην επιφάνεια ενός κρυστάλλου Ασβεστίτη. Θα προσπαθήσουμε στα επόμενα να ερμηνεύσουμε τον τρόπο διάδοσης για την γενικότερη περίπτωση της πλάγιας πρόσπτωσης ενός επιπέδου μετώπου κύματος πάνω σε μια κύρια τομή του (Σχ. 5.5.1). Θα βασιστούμε αφ' ενός μεν στη δημιουργία των επιφανειών κύματος (§ 5.4) από τις σημειακές πηγές (κέντρα σκέδασης) στα σημεία πρόσπτωσης του μετώπου κύματος. Αφ' ετέρου θα δεχθούμε την αρχή του Huygens (§ 2.3), του τρόπου δηλ. ανάπτυξης των μετώπων κύματος κατά τη διάδοσή τους όμως σε ανισότροπα υλικά.



(Σχ. 5.5.1)

Θεωρούμε ότι σε μια ορισμένη χρονική στιγμή το επίπεδο μέτωπο κύματος AFD αγγίζει στο σημείο A την επιφάνεια του κρυστάλλου. Κατά το χρονικό διάστημα της διάδοσης του μετώπου από το D στο C, από τα σημεία A και B θα διαδοθούν τα κυματίδια που αντιστοιχούν στις σφαιρικές τακτικές επιφάνειες κύματος καθώς και στις ελλειψοειδείς έκτακτες. Με βάση την αρχή του Huygens τα δύο αυτά μέτωπα κύματος προκύπτουν αν από το σημείο C φέρουμε τις εφαπτόμενες (περι-

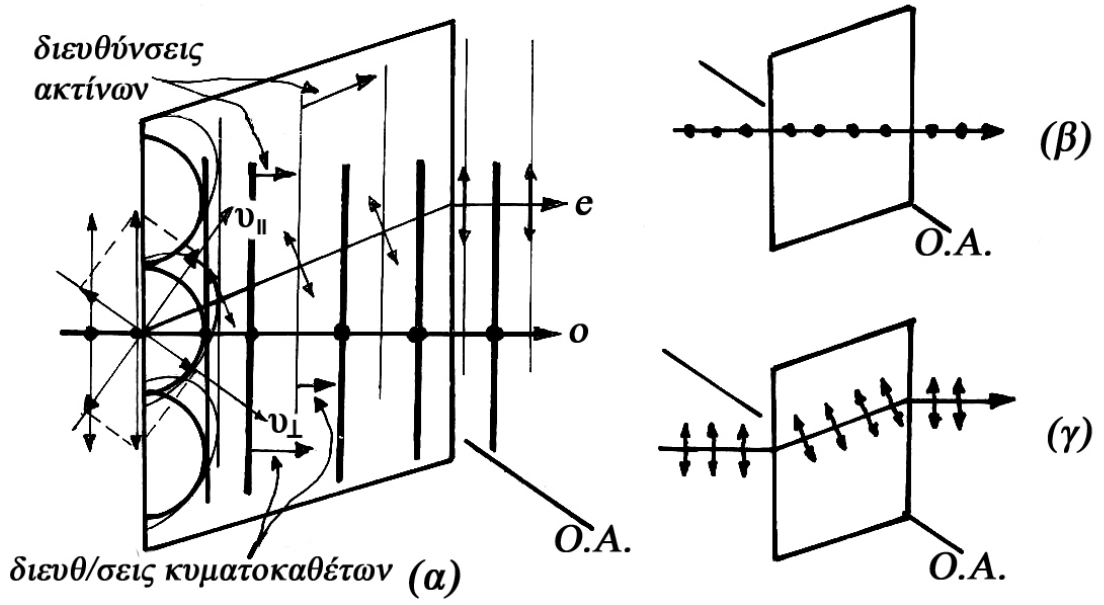
βάλλουσες) των σφαιρών και των ελλειψοειδών. Στα σημεία δηλ. A', B' και a, b αντίστοιχα.

Γνωρίζουμε ότι η ακτίνα AA' της σφαίρας είναι ανάλογη της ταχύτητας της τακτικής ακτίνας. Επίσης το τμήμα Aa της έλλειψης είναι ανάλογο της ταχύτητας της έκτακτης ακτίνας. Το τμήμα Aa' (γραμμή κάθετη στο μέτωπο κύματος της έκτακτης), είναι ανάλογο με την ταχύτητα διάδοσης του μετώπου κύματος της έκτακτης. Και επειδή $Aa' < Aa$ σημαίνει ότι η ταχύτητα της κυματοκαθέτου (δηλ. η ταχύτητα διάδοσης του μετώπου κύματος της έκτακτης διαταραχής), είναι μικρότερη της αντίστοιχης ταχύτητας ακτίνας της έκτακτης (ταχύτητα ανάλογη του Aa).

Οι καταστάσεις πόλωσης στη διεύθυνση τακτικής και έκτακτης ακτίνας φαίνονται στο (Σχ. 5.5.1). Δηλ. το πεδίο **E** για την τακτική ακτίνα ταλαντεύεται κάθετα στον οπτικό άξονα του κρυστάλλου ενώ της έκτακτης παράλληλα στο επίπεδο οπτικού άξονα – διεύθυνσης διάδοσης και κάθετα στη διεύθυνση διάδοσης. Η διεύθυνση διάδοσης της ενέργειας για την έκτακτη διαταραχή, κατά τα γνωστά, είναι αυτή της έκτακτης ακτίνας. Η τακτική ακτίνα ακολουθεί – όπως ήδη αναφέραμε – το νόμο του Snell και από το (Σχ. 5.5.1) με βάση την ανάλυση της (§ 5.1) ο λόγος DC/AA' είναι ο δείκτης διάθλασης της τακτικής διαταραχής (εφόσον η προσπίπτουσα διαδίδεται στον αέρα). Για την περίπτωση που ο οπτικός άξονας του κρυστάλλου δεν βρίσκεται πάνω στο επίπεδο πρόσπτωσης του (Σχ. 5.5.1), τότε προσπίπτουσα και διαθλώμενη (έκτακτη) δεν θα βρίσκονται πάνω στο ίδιο επίπεδο.

Θα θεωρήσουμε τώρα την πρόσπτωση ενός επιπέδου μετώπου κύματος φυσικού φωτός παράλληλα με την κύρια τομή ενός κρυστάλλου Ασβεστίτη και συγχρόνως κάθετα σε μια έδρα του (Σχ. 5.5.2α). Στη συγκεκριμένη περίπτωση, το επίπεδο πρόσπτωσης και αυτό της κύριας τομής συμπίπτουν. Το διάνυσμα **E** του η λεκτρικού πεδίου (τη στιγμή της πρόσπτωσης στην επιφάνεια του κρυστάλλου), έχει τη δυνατότητα ν' αναλυθεί κατά τα γνωστά σε δύο συνιστώσες: α) μια κάθετη (•) προς τον οπτικό άξονα και β) μια παράλληλη (↕) στο επίπεδο της κύριας τομής. Γνωρίζουμε ότι με βάση το γεγονός – της ανάπτυξης από κάθε σημείο στην επιφάνεια πρόσπτωσης – επιφανειών κύματος (κυματιδίων)(§ 5.4) και της εφαρμογής της αρχής του Huygens (§ 2.3), στο εσωτερικό του κρυστάλλου θα διαδίδονται δύο μέτωπα κύματος. Το ένα οριοθετείτε από την περιβάλλουσα των σφαιρικών κυματιδίων(τακτικό) και διαδίδεται στην ίδια διεύθυνση με αυτήν της προσπίπτουσας. Κατά την έξοδό του από τον κρύσταλλο δεν αλλάζει διεύθυνση. Η περιβάλλουσα του δευτέρου, είναι το εφαπτομενικό επίπεδο των ελλειψοειδών κυματιδίων και διαδίδεται παράλληλα με το πρώτο (δηλ. προς τα δεξιά) αλλά προς τα πάνω. Οι διαφορετικές αυτές διευθύνσεις γίνονται εμφανείς μέσω των διευθύνσεων των ακτίνων των αντιστοίχων διαταραχών. Πράγματι με τη βοήθεια των σημείων διέγερσης στην επιφάνεια πρόσπτωσης και τα αντίστοιχα σημεία επαφής των περιβαλλουσών των σφαιρι-

κών και ελλειπτικών κυματίων, μπορούμε να χαράξουμε την τακτική και την έκτακτη ακτίνα. Για την περίπτωση του Ασβεστίτη η γωνία αυτή είναι $\psi = 6.2^0$ για πρόσπτωση φωτός με μήκος κύματος της λυχνίας του Na, $\lambda = 589.29\text{nm}$ (βλ. Άσκ.16-Λυμένη). Τα πεδία **E** του τακτικού και του εκτάκτου κύματος είναι γραμμικά πο-



(Σχ.5.5.2)

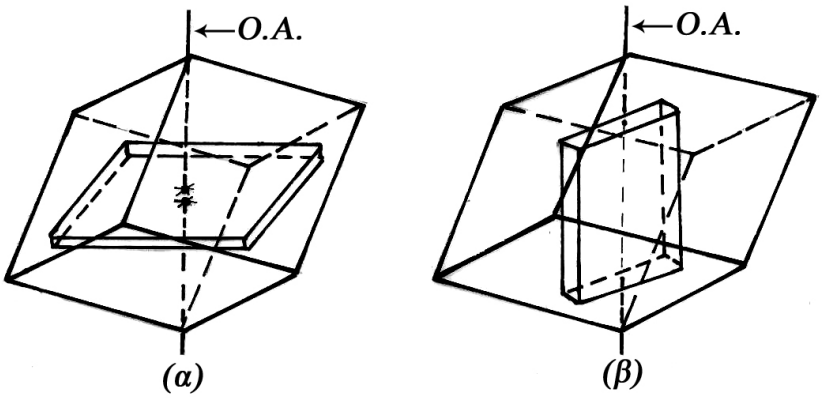
λωμένα και ορθογώνια μεταξύ τους (βλ. Σχ. 5.4.7). Το μεν τακτικό κάθετα στον οπτικό άξονα το δε έκτακτο παράλληλα με το επίπεδο της κύριας τομής και κάθετα προς τη διεύθυνση διάδοσης της έκτακτης ακτίνας.

Θα πρέπει ν' αναφέρουμε ότι το πόσα μέτωπα κύματος θα διαδοθούν μέσα στον κρύσταλλο, θα εξαρτηθεί από τον τρόπο διέγερσής του από την προσπίπτουσα σ' αυτόν διαταραχή. Αν π.χ. το προσπίπτον είναι γραμμικά πολωμένο κάθετα προς τον οπτικό άξονα (Σχ. 5.5.2β), τότε στον κρύσταλλο θα διαδοθεί μόνο το τακτικό μέτωπο κύματος. Στην περίπτωση που το προσπίπτον είναι γραμμικά πολωμένο παράλληλα προς την κύρια τομή (Σχ. 5.5.2γ), τότε θα έχουμε τη διάδοση μόνο του εκτάκτου μετώπου κύματος. Το γεγονός όπως γνωρίζουμε (βλ. § 2.2), οφείλεται για την κάθε περίπτωση στον τρόπο διέγερσης των ατομικών διπόλων του κρυστάλλου. Τέλος θα πρέπει ν' αναφέρουμε ότι η έκτακτη ακτίνα κατά την έξοδό της (Σχ. 5.5.2α,γ) από τον κρύσταλλο γίνεται παράλληλη με την τακτική. Το γεγονός οφείλεται στο ότι τα σημεία διέγερσης της εξωτερικής επιφάνειας του κρυστάλλου εκπέμπουν πλέον σε ισότροπο μέσο (π.χ. τον αέρα), οπότε τα κυμάτια του Huygens είναι σφαιρικά. Κατά συνέπεια η περιβάλλουσά τους θα είναι επίπεδο και οι ακτίνες κάθετες σ' αυτό, άρα παράλληλες με την τακτική.

5.7.6 *Πλακίδια καθυστέρησης (ή καθυστερητές)*

Καθυστερητές (retarders) ονομάζονται τα οπτικά στοιχεία, με την βοήθεια των οποίων είναι δυνατόν να παράγουμε, να μεταβάλλουμε ή ν' ανιχνεύσουμε τις καταστάσεις πόλωσης του φωτός. Ο τρόπος λειτουργίας τους είναι ο εξής: Γνωρίζουμε κατ' αρχή ότι μια κατάσταση πόλωσης αναλύεται σε δύο ορθογώνιες 'σύμφωνες' (συζευγμένες) μεταξύ τους συνιστώσες. Ο καθυστερητής δρα έτσι ώστε κατά τη διέλευση του φωτός από αυτόν, να προκαλεί – μέσω κάποιου μηχανισμού – καθυστέρηση κατά ένα ποσό στη φάση της μιας συνιστώσας διαταραχής σε σχέση με την άλλη. Σαν αποτέλεσμα, το φως κατά την έξοδό του από τον καθυστερητή, να βρίσκεται σε διαφορετική κατάσταση πόλωσης από ότι στην είσοδό του. Όπως θα δούμε από τον τρόπο λειτουργίας τους, τα στοιχεία αυτά εφαρμόζουν επιλεκτικές διαδικασίες προκειμένου να επηρεάσουν τη μία ή και τις δύο από τις διερχόμενες συνιστώσες του φωτός. Άρα είναι εύλογο να συμπεράνουμε, ότι υλικά από τα οποία θα μπορούσαν να κατασκευαστούν καθυστερητές είναι τα ανισότροπα δηλ. οι κρύσταλλοι.

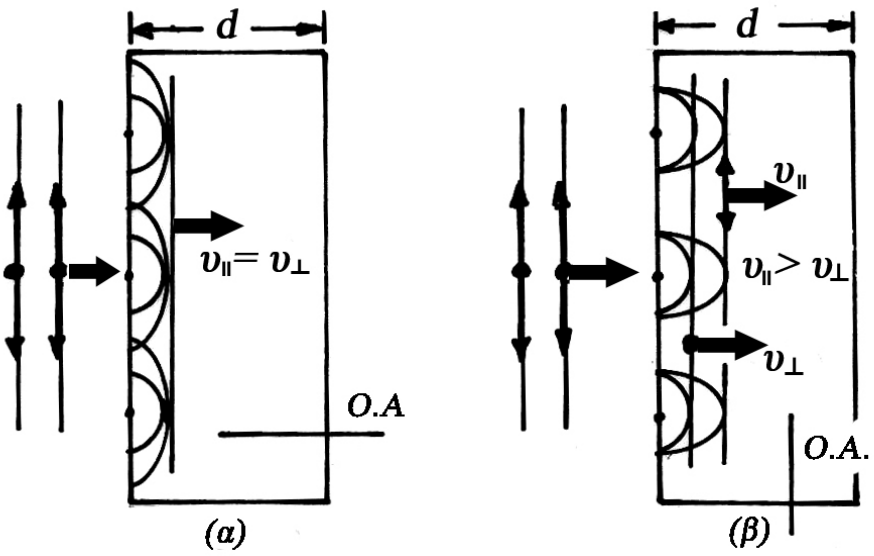
Σ' ότι ακολουθεί, θα δούμε συγκεκριμένα παραδείγματα δημιουργίας καθυστερητών από τον κρύσταλλο του Ασβεστίτη. Για το λόγο, αυτό από ένα τέτοιο κρύσταλλο αποκόπτουμε ένα πλακίδιο με παράλληλες έδρες πάχους d, οι οποίες είναι κάθετες στον οπτικό του άξονα (Σχ. 5.6.1α). Αφού οι δύο του επιφάνειες λεια-



(Σχ. 5.6.1)

ανθούν, αφήνουμε να προσπέσει κάθετα στη μία από αυτές ένα μονοχρωματικό επίπεδο μέτωπο κύματος έστω γραμμικά πολωμένο με οποιοδήποτε αζιμούθιο. Οι δύο συνιστώσες του κύματος θα διεγείρουν τον κρύσταλλο με τον γνωστό τρόπο (Σχ. 5.6.2α). Θα αναπτυχθούν δηλ. δύο ειδών επιφάνειες κύματος (η τακτικές και έκτακτες). Επειδή όμως διαδίδονται στη διεύθυνση του οπτικού άξονα, θα έχουν την ίδια ταχύτητα διάδοσης (φάσης). Κατά την έξοδό τους λοιπόν από το πλακίδιο πά-

χους d, οι δύο συνιστώσες του πεδίου (κάθετες μεταξύ τους) θα έχουν πάλι την ίδια διαφορά φάσης. Άρα λοιπόν συμπεραίνουμε ότι ένα διπλοθλαστικό πλακίδιο κομμένο κάθετα προς τον οπτικό του άξονα δεν μπορεί να χρησιμοποιηθεί σαν στοιχείο καθυστέρησης της μιας συνιστώσας του πεδίου σε σχέση με την άλλη. Υποθέτουμε τώρα ότι αποκόπτουμε από τον κρύσταλλο του Ασβεστίτη ένα πλακίδιο πάχους d με παράλληλες έδρες και παράλληλες συγχρόνως προς τον οπτικό του άξονα (Σχ. 5.6.1β). Αφήνουμε πάλι να προσπέσει στην εμπρός του επιφάνεια ένα επίπεδο γραμμικά πολωμένο μέτωπο κύματος. Τότε μέσα στον κρύσταλλο θ' αναπτυχθούν



(Σχ. 5.6.2)

κατά τα γνωστά οι δύο ειδών επιφάνειες κύματος (τακτικές και έκτακτες). Οι περιβάλλουσές τους θα μας δώσουν τα δύο επίπεδα μέτωπα κύματος, τα διαδιδόμενα στην ίδια διεύθυνση (Σχ. 5.6.2β). Σ' αυτήν όμως την περίπτωση, λόγω της διαφορετικής ταχύτητας διάδοσής τους, ($\upsilon_e > \upsilon_o$) δηλ. ($\upsilon_{\parallel} > \upsilon_{\perp}$) σύντομα θ' αποχωριστούν μέσα στον κρύσταλλο. Διανύοντας την απόσταση d τα δύο μέτωπα κύματος (των οποίων βέβαια τα πεδία είναι ορθογώνια μεταξύ τους) θα φθάσουν στην έξοδο με διαφορά οπτικού δρόμου:

$$L = n_e d - n_o d = d\left|\left(n_e - n_o\right)\right| \qquad (5.6.1)$$

Άρα η διαφορά φάσης μεταξύ των δύο συνιστωσών του πεδίου θα είναι:

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda_0} d\left|\left(n_e - n_o\right)\right| \qquad (5.6.2)$$

όπου λ_0 το μήκος κύματος του φωτός στο κενό. Από τη (σχ. 5.6.2) βλέπουμε ότι η καθυστέρηση φάσης που επιβάλλει ένα διπλοθλαστικό πλακίδιο πάχους d θα εξαρτάται ισχυρά από το μ.κ. της προσπίπτουσας ακτινοβολίας. Επίσης θα εξαρτάται (αν και όχι τόσο ισχυρά) από τους δ.δ. n_e, n_o λόγω του φαινομένου του διασκεδασμού του φωτός (Σχ. 5.4.5).

Για ένα διπλοθλαστικό πλακίδιο καθυστέρησης, η διεύθυνση ταλάντωσης της ταχύτερα διαδιδόμενης συνιστώσας του πεδίου ονομάζεται ***ταχύς άξονας(fast axis)*** ενώ ο κάθετος σ' αυτόν ***βραδύς άξονας(slow axis)***. Στην περίπτωση που το πλακίδιο είναι από Ασβεστίτη ($n_e - n_o < 0$) ο ταχύς άξονας συμπίπτει με τον οπτικό άξονα του κρυστάλλου. Το αντίθετο ακριβώς συμβαίνει με τα πλακίδια καθυστέρησης από Χαλαζία ($n_e - n_o > 0$). Για τα τελευταία η ταχύτερα διαδιδόμενη συνιστώσα είναι η τακτική, άρα ο ταχύς άξονας εδώ είναι κάθετος προς τον οπτικό άξονα του κρυστάλλου. Από τα πλακίδια καθυστέρησης, τα πιο συχνά χρησιμοποιούμενα είναι αυτά του ενός τετάρτου του μήκους κύματος ή ($\lambda/4$) και του ενός δευτέρου του μήκους κύματος ή ($\lambda/2$), τα οποία και περιγράφουμε στα επόμενα.

Πλακίδιο καθυστέρησης του ενός τετάρτου του μήκους κύματος (λ/4) (quarter-wave plate)

Το πλακίδιο αυτό επιβάλλει μεταξύ των δύο ορθογωνίων συνιστωσών ενός προσπίπτοντος επιπέδου μετώπου κύματος διαφορά φάσης $\phi = 90^0$ (ή διαφορά οπτικού δρόμου $\lambda/4$). Για να συμβαίνει αυτό θα πρέπει να ισχύει:

$$d\left|n_e - n_o\right| = (4m+1)\lambda/4 \quad m = 0,1,2,3.... \tag{5.6.3}$$

Για $m = 0$ θα είναι: $d\left|n_e - n_o\right| = \lambda/4$ και θα έχουμε το ονομαζόμενο πλακίδιο $\lambda/4$ ***μηδενικής τάξης(zero order)***. Για $m = 1$, $d\left|n_e - n_o\right| = 5\lambda/4$ οπότε θα έχουμε το πλακίδιο $\lambda/4$ ***πρώτης τάξης(first order)*** κ.ο.κ. Δηλ. βλέπουμε ότι μπορούμε να έχουμε πλακίδια $\lambda/4$ με διαφορετικό πάχος d. Το ίδιο ακριβώς συμβαίνει και με όλα γενικά τα πλακίδια καθυστέρησης.

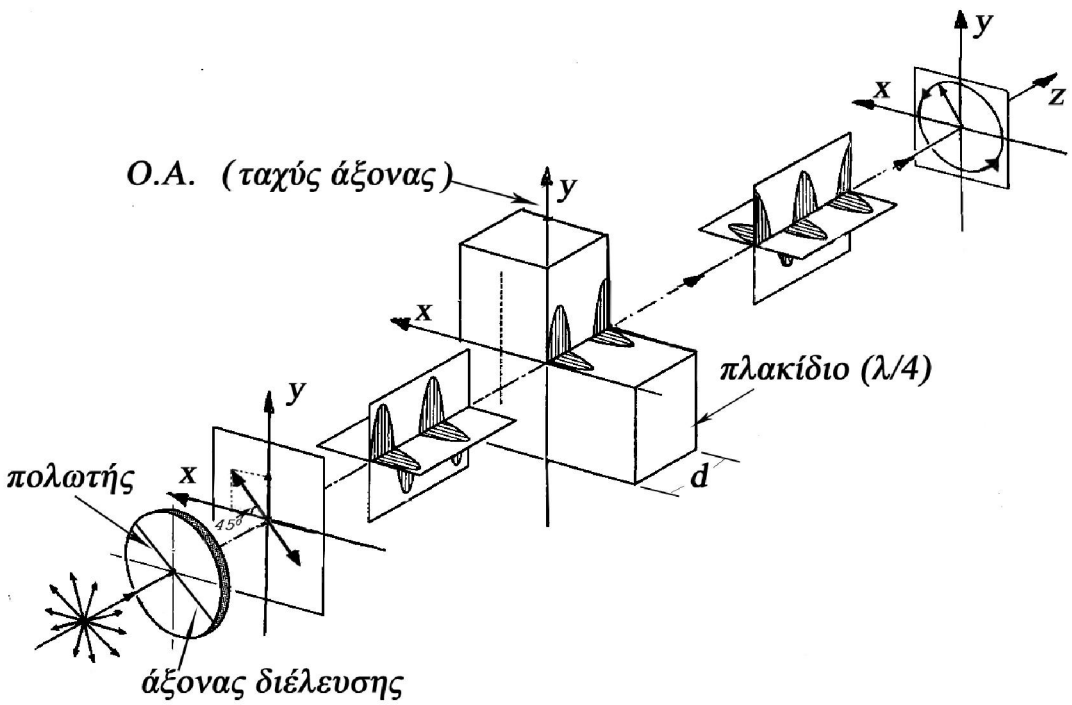
Θεωρούμε την περίπτωση της πρόσπτωσης στο πλακίδιο $\lambda/4$ επιπέδου μέτωπο κύματος (στο μ.κ. για το οποίο έχει κατασκευαστεί). Το τελευταίο, είναι γραμμικά πολωμένο σε ένα ορισμένο αζιμούθιο σε σχέση με τον άξονα x του συστήματος συντεταγμένων και το πλακίδιο έχει τον ταχύ του άξονα στη διεύθυνση y. Τότε θα έχουμε:

Πριν το πλακίδιο: $$\left.\begin{aligned} E_x &= A_x \cos(\omega t - kz) \\ E_y &= A_y \cos(\omega t - kz) \end{aligned}\right\} \quad (\Gamma.\Pi.\Phi.) \tag{5.6.4}$$

Μετά το πλακίδιο: $$\left.\begin{aligned} E_x' &= A_x \cos(\omega t - kz) \\ E_y' &= A_y \cos(\omega t - kz + \pi/2) \end{aligned}\right\} \; (E.\Pi.\Phi.) \qquad (5.6.5)$$

Βλέπουμε δηλ. από τις (σχ. 5.6.5), ότι το εξερχόμενο από το πλακίδιο φως είναι γενικά ελλειπτικά πολωμένο εφόσον $A_x \neq A_y$. Αν το επίπεδο πόλωσης του γραμμικά πολωμένου φωτός στην είσοδο του πλακιδίου είναι σε αζιμούθιο $+45^0$ ως προς τον άξονα x, τότε $A_x = A_y = A$ και το εξερχόμενο από το πλακίδιο ($\lambda/4$) φως θα είναι κυκλικά πολωμένο και μάλιστα δεξιόστροφο.

Έχει ενδιαφέρον να εξετάσουμε βήμα προς βήμα, τον τρόπο με τον οποίο εξελίσσεται το φαινόμενο της καθυστέρησης της φάσης – της μιας σε σχέση με την άλλη – των δύο διαδιδόμενων διαταραχών στο εσωτερικό ενός πλακιδίου ($\lambda/4$). Για το σκοπό αυτό θα θεωρήσουμε ένα τέτοιο πλακίδιο από Ασβεστίτη (Σχ. 5.6.3), του οποίου κατά τα γνωστά ο οπτικός άξονας συμπίπτει με τον ταχύ του άξονα.



(Σχ. 5.6.3)

Το φως το οποίο προσπίπτει στο πλακίδιο είναι γραμμικά πολωμένο σε αζιμούθιο $+45^0$ σε σχέση με τον άξονα x και ο ταχύς του άξονας είναι κατά τη διεύθυνση y. Επειδή για τον Ασβεστίτη $n_e < n_o$, η διαδιδόμενη συνιστώσα η παράλληλη στον ταχύ άξονα (έκτακτη), κινείται στο εσωτερικό του με μεγαλύτερη ταχύτητα σε σχέση με

αυτήν που διαδίδεται κάθετα στον οπτικό του άξονα (τακτική). Επομένως στο συγκεκριμένο πάχος του πλακιδίου ($\lambda/4$) (ορισμένης τάξης) στο σχήμα μας, βλέπουμε ότι έχουν διαδοθεί μία και ένα τέταρτο της περιόδου της έκτακτης διαταραχής αλλά μία και ένα δεύτερο της περιόδου της τακτικής. Το τελευταίο σημαίνει ότι η $o-$ διαταραχή είναι ακριβώς κατά ένα τέταρτο του μήκους κύματος πίσω από την $e-$ διαταραχή κατά την έξοδό τους από το πλακίδιο. Δηλ. η $o-$ διαταραχή καθυστερεί σε σχέση με τη $e-$ διαταραχή λόγω της μικρότερης ταχύτητας διάδοσής της.

Κατά την έξοδό της λοιπόν από το πλακίδιο ($\lambda/4$) η $e-$ διαταραχή (που είναι παράλληλη προς τον y άξονα), θα προπορεύεται κατά φάση ίση με $\pi/2$ σε σχέση με την $o-$ διαταραχή (παράλληλη προς τον x). Επομένως αν οι συνιστώσες του πεδίου στην είσοδο του πλακιδίου είναι:

$$\left.\begin{aligned} E_x &= A\cos(\omega t - kz) \\ E_y &= A\cos(\omega t - kz) \end{aligned}\right\} \qquad (5.6.6)$$

(δηλ. γραμμικά πολωμένο φως σε αζιμούθιο 45^0 σε σχέση με τον x), κατά την έξοδό τους από αυτό θα είναι :

$$\left.\begin{aligned} E_x^{'} &= A\cos(\omega t - kz) \\ E_y^{'} &= A\cos(\omega t - kz + \pi/2) \end{aligned}\right\} \qquad (5.6.7)$$

Δηλ. το φως μετά το πλακίδιο θα είναι δεξιόστροφα κυκλικά πολωμένο.

Σημείωση

Μια περισσότερο λεπτομερής περιγραφή του γεγονότος ότι η διαφορά φάσης των δύο ορθογωνίων διαταραχών (τακτικής και έκτακτης) μετά την έξοδό τους από το πλακίδιο καθυστέρησης $\lambda/4$ θα είναι $\pi/2$, όταν στην είσοδό του η διαφορά φάσης μεταξύ τους είναι ίση με μηδέν, γίνεται στα επόμενα αναφερόμενοι στο (Σχ. 5.6.3).

Επειδή το πλακίδιο είναι εξ' ορισμού $\lambda/4$, τότε η διαφορά οπτικού δρόμου των δύο ορθογωνίων συνιστωσών μετά τη διάνυση από αυτές του πάχους του d θα είναι:

$$\left(n_o - n_e\right)d = \lambda/4 \qquad (1)$$

για αρνητικό κρύσταλλο για τον οποίο $n_e < n_o$ και λ το μ.κ. στο κενό. Ας υποθέσουμε επίσης – όπως φαίνεται στο (Σχ. 5.6.3) – ότι στο εσωτερικό του πλακιδίου:

$$d = \lambda_e + \frac{\lambda_e}{4} = \frac{5\lambda_e}{4} \tag{2}$$

(συνιστώσα κατά τον y παράλληλη με τον ταχύ άξονα του πλακιδίου που είναι συγχρόνως και οπτικός του άξονας). Τότε κατ' αρχή θ' αποδείξουμε ότι μεταξύ των περιόδων που διανύονται κατά τις διευθύνσεις y και x (διεύθυνση του βραδύ άξονα του πλακιδίου καθυστέρησης) ισχύει: $d = \lambda_e + \frac{\lambda_e}{4} = \lambda_o + \frac{\lambda_o}{2}$. Ότι δηλ. 'ένα και ένα τέταρτο μ.κ. της έκτακτης διαταραχής, είναι ίσο με ένα και ένα δεύτερο μ.κ. της τακτικής'.

Πράγματι από τις (σχ. 1,2) θα έχουμε: $(n_o - n_e)d = \frac{\lambda}{4} \Rightarrow (n_o - n_e)\frac{5\lambda_e}{4} = \frac{\lambda}{4} \Rightarrow$

(επειδή: $n_e = \frac{\lambda}{\lambda_e}$, $n_o = \frac{\lambda}{\lambda_o}$) $\Rightarrow \left(\frac{\lambda}{\lambda_o} - \frac{\lambda}{\lambda_e}\right)\frac{5\lambda_e}{4} = \frac{\lambda}{4} \Rightarrow \left(\frac{1}{\lambda_o} - \frac{1}{\lambda_e}\right)5\lambda_e = 1 \Rightarrow$

$$\lambda_e = \lambda_o + \frac{\lambda_o}{5} \tag{3}$$

Οπότε με βάση τη (σχ.3): $\lambda_e + \frac{\lambda_e}{4} = \frac{5\lambda_e}{4} = \frac{5}{4}\left(\lambda_o + \frac{\lambda_o}{5}\right) = \frac{5\lambda_o}{4} + \frac{\lambda_o}{4} = \frac{3\lambda_o}{2} = \lambda_o + \frac{\lambda_o}{2}$

Δηλ. τελικά θα έχουμε:

$$d = \lambda_e + \frac{\lambda_e}{4} = \lambda_o + \frac{\lambda_o}{2} \tag{4}$$

Η σχέση αυτή μεταξύ των μ.κ. τακτικής και έκτακτης διαταραχής γίνεται εμφανής στο (Σχ. 5.6.3) με τη σχεδίασή τους στο εσωτερικό του πλακιδίου καθυστέρησης. Το συμπέρασμα τελικά που προκύπτει από την παραπάνω ανάλυση είναι ότι η διαφορά των διανυόμενων περιόδων μεταξύ τακτικής και έκτακτης είναι ένα τέταρτο. Ο μηχανισμός γένεσης αυτού του γεγονότος οφείλεται στη διπλοθλαστικότητα του υλικού. Δηλ. στις διαφορετικές ταχύτητες φάσης υ_o, υ_e μεταξύ των δύο ορθογωνίων διαταραχών και θα έχει σαν αποτέλεσμα – όπως θ' αποδείξουμε στα επόμενα – η έκτακτη διαταραχή να προπορεύεται της τακτικής κατά την έξοδό τους από το πλακίδιο όπως και η διαφορά φάσης μεταξύ τους να είναι $\pi/2$.

Κατ' αρχή η έκτακτη διαταραχή διανύει το πάχος d του πλακιδίου σε χρόνο:

$$t = d/\upsilon_e \tag{5}$$

Τότε η τακτική διαταραχή στο ίδιο χρόνο, επειδή $\upsilon_o < \upsilon_e$ θα διανύσει στο εσωτερικό του πλακιδίου απόσταση $d' = \upsilon_o t = \upsilon_o \left(d/\upsilon_e\right) = \left(\upsilon_o/\upsilon_e\right) d$, από την οποία συνεπάγεται ότι: $d' < d$. Επίσης η τακτική διαταραχή το πάχος d το διανύει σε χρόνο:

$$t' = d/\upsilon_o \tag{6}$$

Επομένως από τις (σχ. 5,6) θα έχουμε: $t' > t$, δηλ. η έκτακτη διαταραχή προπορεύεται της τακτικής. Άρα όταν η τακτική φθάσει στο άκρο του πλακιδίου (σε χρόνο t'), η έκτακτη θα έχει βγει από το πλακίδιο, διαδιδόμενη σε απόσταση:

$$s = c\left(t' - t\right) \tag{7}$$

Αλλά: $t' - t = \dfrac{d}{\upsilon_o} - \dfrac{d}{\upsilon_e}$ οπότε: $s = c\left(\dfrac{d}{\upsilon_o} - \dfrac{d}{\upsilon_e}\right) = cd\left(\dfrac{1}{\upsilon_o} - \dfrac{1}{\upsilon_e}\right)$ και επειδή κατά τα γνωστά: $\upsilon_o = c/n_o, \upsilon_e = c/n_e$ θα έχουμε: $s = cd\left(\dfrac{n_o}{c} - \dfrac{n_e}{c}\right) \Rightarrow s = d\left(n_o - n_e\right)$. Αλλά από τη (σχ. 1) δεχτήκαμε ότι: $d\left(n_o - n_e\right) = \lambda/4$ (πλακίδιο καθυστέρησης $\lambda/4$). Επομένως:

$$s = \lambda/4 \tag{8}$$

Δηλ. η έκτακτη διαταραχή προπορεύεται της τακτικής κατά τον οπτικό δρόμο $\lambda/4$ ή κατά φάση $\left(2\pi/\lambda\right)\left(\lambda/4\right) = \pi/2$.

Επομένως οι διαδιδόμενες στο κενό ορθογώνιες μεταξύ τους και 'σύμφωνες' (συζευγμένες) διαταραχές τακτική και έκτακτη, μετά την έξοδό τους από το πλακίδιο καθυστέρησης, θα έχουν μόνιμα διαφορά φάσης $\pi/2$ και προπορευόμενη θα είναι η έκτακτη. Για αρνητικούς κρυστάλλους, η έκτακτη κατά τα γνωστά δονείται παράλληλα προς τον οπτικό άξονα. Η διεύθυνση αυτή – όπως ήδη έχει αναφερθεί – είναι ο λεγόμενος ταχύς άξονας του πλακιδίου καθυστέρησης. Άρα πάντοτε από τις δύο συνιστώσες του προσπίπτοντος σ' ένα πλακίδιο καθυστέρησης μετώπου κύματος, την εισαγόμενη από το τελευταίο φάση θα την προσθέτουμε στη συνιστώσα που δονείται παράλληλα προς τον ταχύ του άξονα (ή ισοδύναμα θα την αφαιρούμε από τον βραδύ). Για πλακίδια που κατασκευάζονται από θετικούς διπλοθλαστικούς κρυστάλλους, ο ταχύς άξονας θα είναι κάθετος στον οπτικό τους άξονα.

Στην περίπτωση που το προσπίπτον στο πλακίδιο γραμμικά πολωμένο φως ταλαντεύεται στη διεύθυνση του ταχύ ή του βραδύ άξονα, τότε το πλακίδιο θα διεγερθεί με τέτοιο τρόπο έτσι που στο εσωτερικό του να διαδίδεται ένα μέτωπο κύματος, το τακτικό ή το έκτακτο αντίστοιχα. Άρα στην έξοδο του πλακιδίου θα πάρουμε γραμμικά πολωμένο φως με διεύθυνση πόλωσης αυτήν του ταχύ ή του βραδύ άξονα. Θα δούμε κατόπιν τι ακριβώς συμβαίνει, όταν στο πλακίδιο ($\lambda/4$) ή (λ/x) γενικά προσπέσει φυσικό φως. Στην περίπτωση αυτή κατά τα γνωστά μπορούμε ν' αναλύσουμε το φως σε δύο συνιστώσες κατά τον ταχύ και τον βραδύ άξονα του πλακιδίου, που είναι όμως μεταξύ τους 'ασύμφωνες' (ασύζευκτες). Αν και στη μία από αυτές θα επιβληθεί η εισαγόμενη καθυστέρηση φάσης, εντούτοις στην έξοδό τους (λόγω 'ασυμφωνίας') συνθέτουν και πάλι φυσικό φως. Σαν τελευταίο παράδειγμα θα εξετάσουμε ποια ακριβώς θα είναι η κατάσταση πόλωσης του φωτός που βγαίνει από ένα πλακίδιο ($\lambda/4$), όταν στο τελευταίο προσπέσει δεξιόστροφα κυκλικά πολωμένο φως. Το φως αυτό αναλυόμενο κατά x και y θα μας δώσει:

$$\left.\begin{aligned} E_x &= A\cos(\omega t - kz) \\ E_y &= A\cos(\omega t - kz + \pi/2) \end{aligned}\right\} \qquad (5.6.8)$$

Μετά το πλακίδιο (και εφόσον ο ταχύς άξονας είναι στη διεύθυνση του y) θα έχουμε:

$$\left.\begin{aligned} E_x^{'} &= A\cos(\omega t - kz) \\ E_y^{'} &= A\cos(\omega t - kz + \pi/2 + \pi/2) = -A\cos(\omega t - kz) \end{aligned}\right\} \qquad (5.6.9)$$

δηλ. γραμμικά πολωμένο φως σε αζιμούθιο $\theta = -45^0$ σε σχέση με τον άξονα x.

Πλακίδιο καθυστέρησης του ενός δευτέρου του μήκους κύματος (λ/2) (half-wave plate)

Το πλακίδιο αυτό επιβάλλει μεταξύ των δύο ορθογωνίων συνιστωσών ενός προσπίπτοντος επιπέδου μετώπου κύματος διαφορά φάσης $\phi = 180^0$ (ή διαφορά οπτικού δρόμου $\lambda/2$). Για να συμβαίνει αυτό θα πρέπει να ισχύει:

$$d\left|n_e - n_o\right| = (2m+1)\lambda/2 \quad m = 0,1,2,3.... \qquad (5.6.10)$$

Για $m = 0$ θα είναι: $d\left|n_e - n_o\right| = \lambda/2$ και θα έχουμε το ονομαζόμενο πλακίδιο $\lambda/2$ ***μηδενικής τάξης(zero order)***. Για $m = 1$, $d\left|n_e - n_o\right| = 3\lambda/2$ οπότε θα έχουμε το πλακίδιο $\lambda/2$ ***πρώτης τάξης(first order)*** κ.ο.κ. Δηλ. με γνωστά τα n_e, n_o, λ είμαστε σε

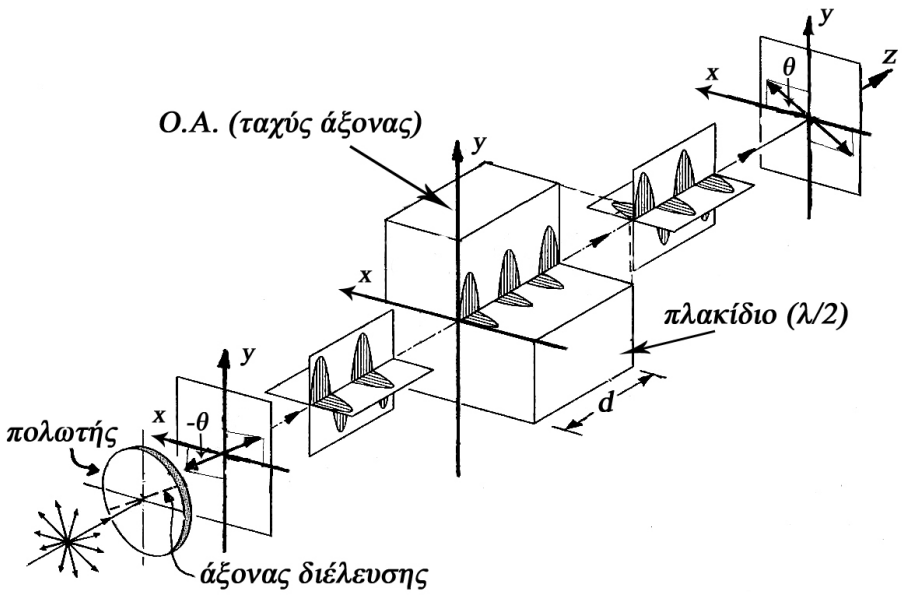
θέση να προσδιορίσουμε τα πάχη των πλακιδίων που θα επιβάλλουν μεταξύ δύο ορθογωνίων συνιστωσών καθυστέρηση φάσης ίση με 180^0.

Θεωρούμε τώρα την περίπτωση όπου στο πλακίδιο ($\lambda/2$) προσπίπτει ένα γραμμικά πολωμένο φως με αζιμούθιο $-\theta$ ως προς τον άξονα x. Ο ταχύς άξονας του πλακιδίου βρίσκεται στη διεύθυνση y. Τότε θα έχουμε:

Πριν το πλακίδιο:
$$\left.\begin{aligned} E_x &= A_x \cos(\omega t - kz) = A_x \cos(\omega t - kz) \\ E_y &= -A_y \cos(\omega t - kz) = A_x \cos(\omega t - kz + \pi) \end{aligned}\right\} \qquad (5.6.11)$$

Μετά το πλακίδιο:
$$\left.\begin{aligned} E_x' &= A_x \cos(\omega t - kz) \\ E_y' &= A_y \cos(\omega t - kz + \pi + \pi) = A_y \cos(\omega t - kz + 2\pi) \\ &= A_y \cos(\omega t - kz) \end{aligned}\right\} \qquad (5.6.12)$$

Βλέπουμε τελικά ότι το φως που βγαίνει από το πλακίδιο είναι πάλι γραμμικά πολωμένο αλλά με αζιμούθιο θ σε σχέση με τον άξονα x.



(Σχ. 5.6.4)

Το φαινόμενο της καθυστέρησης μεταξύ των φάσεων για τις δύο διαδιδόμενες διαταραχές στο εσωτερικό ενός πλακιδίου ($\lambda/2$) από Ασβεστίτη φαίνεται στο (Σχ. 5.6.4). Στο συγκεκριμένο πάχος του πλακιδίου ($\lambda/2$) (ορισμένης τάξης), βλέπουμε ότι έχουν διαδοθεί κατά μήκος του τρεις περίοδοι της $o-$ διαταραχής αλλά δύο και μισή της $e-$ διαταραχής. Αυτό σημαίνει ότι η $o-$ διαταραχή είναι ακριβώς κατά μισό μήκος κύματος πίσω από την $e-$ διαταραχή λόγω της διαφορετικής τα-

χύτητας διάδοσής της ($\upsilon_o < \upsilon_e$). Κατά την έξοδό της λοιπόν από το πλακίδιο η e – διαταραχή (που είναι παράλληλη προς τον άξονα y) θα προπορεύεται κατά φάση ίση με π σε σχέση με την o – διαταραχή που είναι παράλληλη με τον άξονα x.

Ένα άλλο παράδειγμα που αφορά τον τρόπο που λειτουργεί το πλακίδιο ($\lambda/2$), είναι η περίπτωση που το προσπίπτον επίπεδο μέτωπο κύματος είναι αριστερόστροφα κυκλικά πολωμένο. Τότε θα έχουμε:

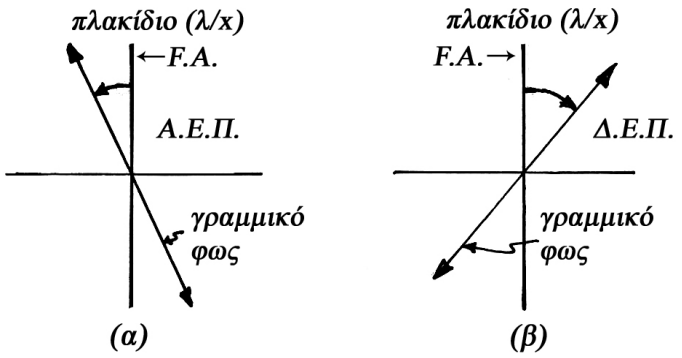
Πριν το πλακίδιο:
$$\left.\begin{aligned} E_x &= A\cos(\omega t - kz) \\ E_y &= A\cos(\omega t - kz - \pi/2 \end{aligned}\right\} \qquad (5.6.13)$$

Μετά το πλακίδιο:
$$\left.\begin{aligned} E_x' &= A\cos(\omega t - kz) \\ E_y' &= A\cos(\omega t - kz - \pi/2 + \pi) = A\cos(\omega t - kz + \pi/2) \end{aligned}\right\} \qquad (5.6.14)$$

Δηλ. το φως που βγαίνει από το πλακίδιο είναι πάλι κυκλικά πολωμένο αλλά δεξιόστροφο.

Σημείωση

Ένας πρακτικός κανόνας άμεσου προσδιορισμού της στροφικότητας του εν γένει ελλειπτικά πολωμένου φωτός, που παίρνουμε όταν ένα γραμμικά πολωμένο φως πέφτει σ' ένα πλακίδιο (λ/x) είναι ο εξής (Σχ. 5.6.5). Η στροφικότητα αυτού του φωτός θα συμπίπτει με τη φορά περιστροφής του ταχύ άξονα του πλακιδί-



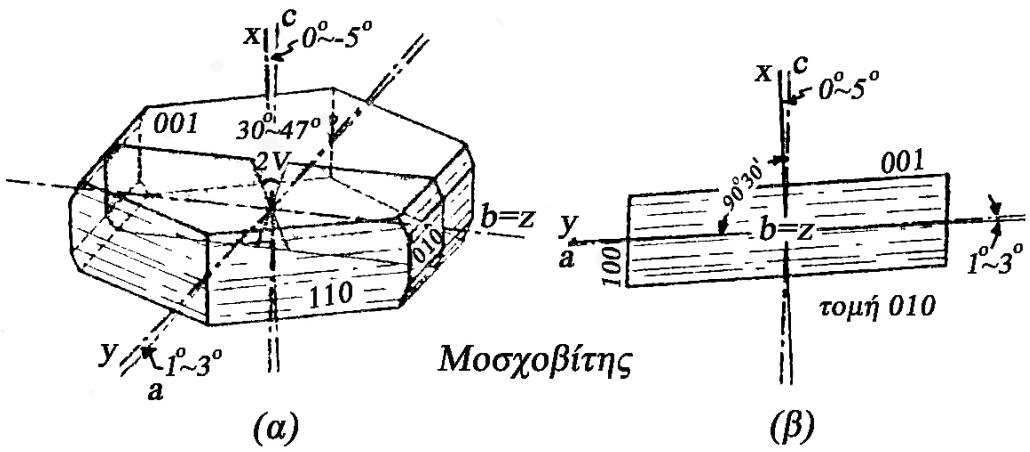
(Σχ. 5.β6.5)

ου (λ/x), καθώς ο τελευταίος τείνει να συμπέσει με τον άξονα διέλευσης του πολωτή, διανύοντας όμως κατά την στροφή του τη μικρότερη γωνία, για φως που διαδίδεται προς εμάς.

Πλακίδια καθυστέρησης από Μίκα (Mica)

Τα πλακίδια καθυστέρησης από Ασβεστίτη ή Χαλαζία θεωρούνται πολύ καλής ποιότητας και είναι διαφανή στην ορατή περιοχή του Η/Μ φάσματος. Παρουσιάζουν όμως μεγάλες κατασκευαστικές δυσκολίες κατά την κοπή και την λείανση, λόγω της λεπτότητας του πάχους τους και της σκληρότητάς των υλικών. Πράγματι το πάχος ενός πλακιδίου ($\lambda/4$) μηδενικής τάξης από Ασβεστίτη για $\lambda = 5892$ Å (φως λυχνίας Na) και $n_o = 1.658$, $n_e = 1.486$ (Πιν.5.4.4) προκύπτει από τη (σχ. 5.6.2) ότι είναι $d \simeq 0.85\,\mu$m, δηλ. περίπου ένα χιλιοστό του χιλιοστού. Αν και στην πράξη χρησιμοποιούνται πλακίδια μεγαλύτερης τάξης από ότι η μηδενική (οπότε και μεγαλύτερου πάχους), εντούτοις οι παραπάνω δυσκολίες επεξεργασίας των υλικών παραμένουν. Για το λόγο αυτό σε πειράματα πόλωσης όχι μεγάλης ακριβείας χρησιμοποιούνται καθυστερητές κατασκευασμένοι από τεχνική ως επί το πλείστον Μίκα.

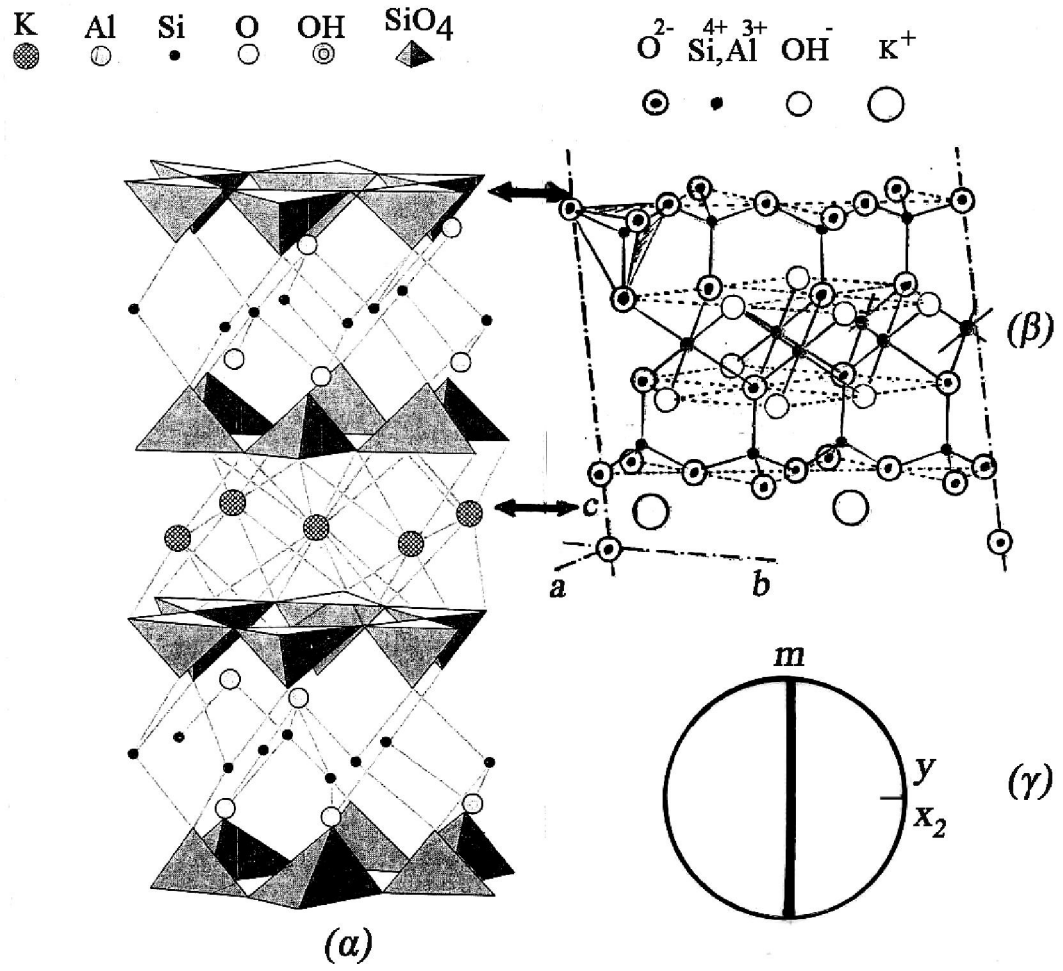
Η χημική σύσταση ενός συγκεκριμένου ορυκτού τύπου Μίκας του ***Μοσχοβίτη(Muscovite)*** είναι: $KAl_2(OH,F)_2[AlSi_3O_{10}]$. Έχει ειδικό βάρος $\rho = 3.2\,\text{gr/cm}^3$ είναι δυσθερμαγωγό υλικό και ισχυρός μονωτής (χρησιμοποιείται ακόμη και σήμερα για μονωτής στα οικιακά ηλεκτρικά σίδερα). Ανήκει στο Μονοκλινές σύστημα και ειδικά στην ομάδα συμμετρίας σημείου (m) (Σχ.5.6.7γ). Δηλ. διαθέτει μόνο ένα επί-



(Σχ. 5.6.6)

πεδο συμμετρίας (Σχ. 5.6.6). Είναι φυλλόμορφο υλικό και οι διαστάσεις των κρυστάλλων του κυμαίνονται από μικροσκοπικοί μέχρις αρκετά τετραγωνικά μέτρα. Το χρώμα του είναι ελαφρά καστανό. Η βασική δομή των μορίων στο χώρο για τη Μίκα αυτή είναι ένα σύνθετο φύλλο στο οποίο ένα στρώμα οκταεδρικά προσανατολισμένων κατιόντων (εδώ ιόντων Καλίου) στοιβάζονται ανάμεσα σε δύο πανομοιότυ-

πα στρώματα ενωμένων μεταξύ τους $(Si,Al)O_4$ τετραέδρων (Σχ. 5.6.7α,β). Εκεί ακριβώς οφείλεται και το γεγονός ότι είναι φυλλόμορφο υλικό οπότε έχουμε τη δυνατότητα ν' αποσπάσουμε από κρύσταλλο μεγάλων διαστάσεων φυλλίδια με παράλληλες έδρες.



(Σχ. 5.6.7)

Ο Μοσχοβίτης είναι αρνητικός διάξονας κρύσταλλος. Όπως είναι γνωστό η διάδοση του φωτός σε διάξονες κρυστάλλους περιγράφεται με τη βοήθεια του μοντέλου του μηχανικού ταλαντωτή του Lorentz όπου τώρα (Σχ. 2.2.1γ), οι σταθερές των ελατηρίων κατά x, y, z έχουν διαφορετικές μεταξύ τους τιμές. Για γραμμικά πολωμένο φως που ταλαντεύεται παράλληλα με τον καθένα από αυτούς τους άξονες αντίστοιχα, προκύπτουν τρεις διαφορετικοί κύριοι δείκτες διάθλασης ($n_\alpha, n_\beta, n_\gamma$) και κατά προέκταση τρεις διαφορετικές ταχύτητες διάδοσης. Οι διάξονες κρύσταλλοι εμφανίζουν δύο οπτικούς άξονες. Επιπλέον συμβαίνει (γεγονός που δίνει τη δυνατότητα στο συγκεκριμένο υλικό να χρησιμοποιηθεί σαν καθυστερητής), οι δύο από τους τρεις κύριους δ.δ. να εντοπίζονται πάνω στα προαναφερόμενα επίπεδα σχι-

σμού. Μια ενδεικτική τιμή των κυρίων δ.δ. πάνω σ' αυτό το επίπεδο για το φως της λυχνίας του Na είναι: $n_\gamma = 1.5977(1.599)$, $n_\beta = 1.5936(1.594)$ $(n_\alpha = 1.5601)$. Το γεγονός σημαίνει ότι για να κατασκευάσουμε από Μοσχοβίτη ένα πλακίδιο $(\lambda/2)$ πρώτης τάξης, θα πρέπει με βάση τη (σχ. 5.6.2) ν' αποσπάσουμε από τον κρύσταλλο φυλλίδιο πάχους περίπου 70μm. Στην (Εικ. 5.6.8) βλέπουμε ένα ορυκτό ανισοπαχές φύλλο Μίκας (Μοσχοβίτη) μέσου πάχους περίπου 1mm και διαστάσεων περίπου $20 \times 20\text{cm}$. Φύλλα Μίκας μπορούν να παρασκευαστούν και τεχνικά και μάλιστα χωρίς παραμορφώσεις και ανωμαλίες δομής που παρουσιάζει η ορυκτή της μορφή. Από αυτά τα φύλλα κατασκευάζονται οι καθυστερητές για εργαστηριακή χρήση. Για

(Εικ. 5.6.8)

λόγους προστασίας βρίσκονται σε πλήρη επαφή με διαφανείς επίπεδες πλάκες από γυαλί. Το όλο σύστημα (με καθορισμένες τις διευθύνσεις των αξόνων ταχύ και βραδύ) είναι δυνατόν να περιστρέφεται κάθετα σε σχέση με τη διεύθυνση μιας προσπίπτουσας δέσμης φωτός, με τη βοήθεια μηχανικού συστήματος στο εσωτερικό πλαισίου που είναι βαθμολογημένο σε μοίρες.

5.7 *Κρυσταλλικοί πολωτές και καθυστερητές*

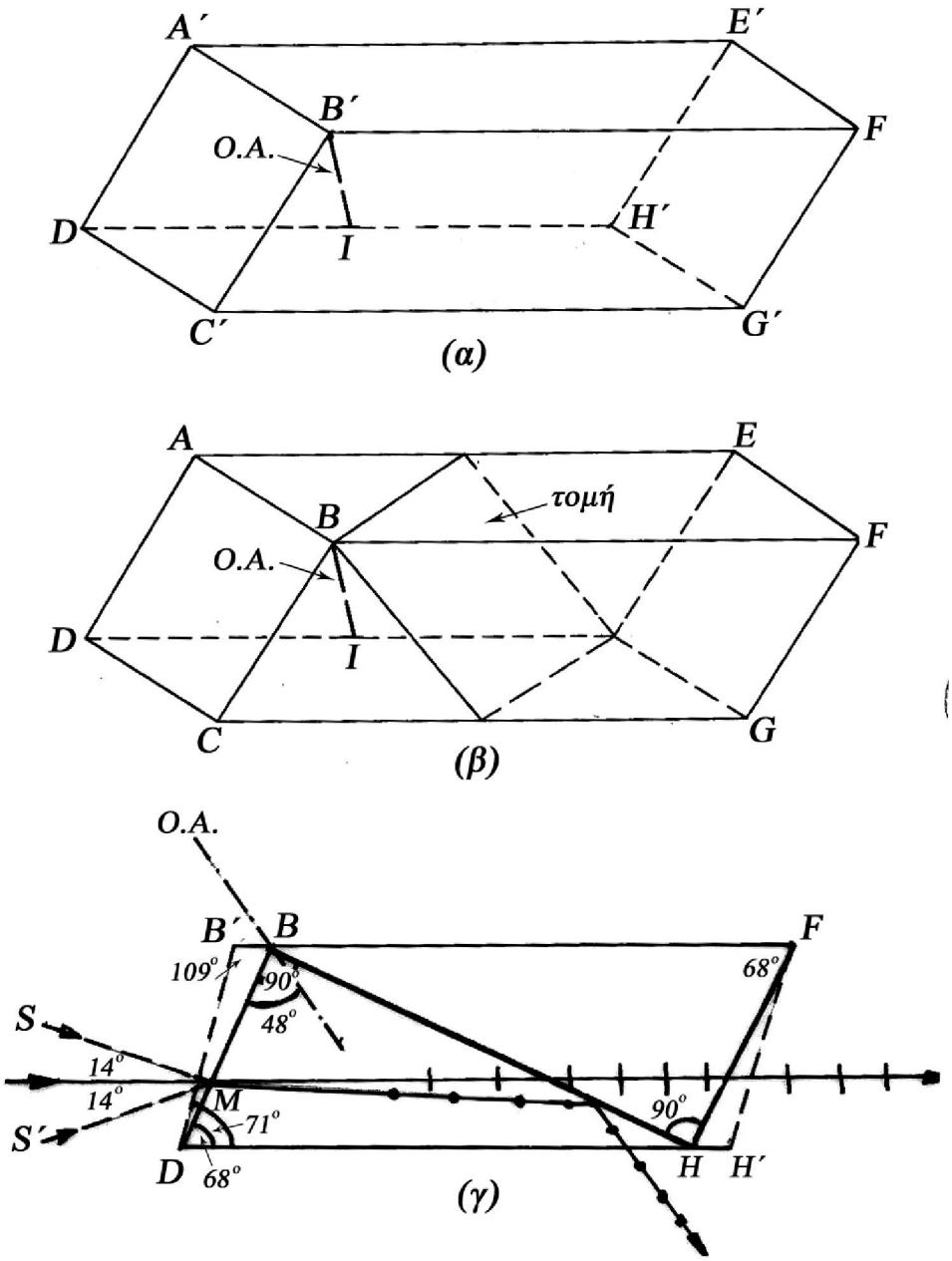
Η βάση κατασκευής αυτών των οπτικών εξαρτημάτων είναι τα ανισότροπα υλικά και κυρίως η Ισλανδική κρύσταλλος (Calcite)$(CaCO_3)$ και ο Χαλαζίας (Quartz)(SiO_2). Η αρχή λειτουργίας τους (τουλάχιστον των πολωτών) στηρίζεται στην ανάπτυξη στο εσωτερικό τους δύο μετώπων κύματος (τακτικού και εκτάκτου) τα οποία είναι γραμμικά πολωμένα και ορθογώνια μεταξύ τους. Διάφορες μέθοδες απάλειψης της μιας των δύο διαταραχών, οδηγεί στο να έχουμε κατά την έξοδο από το αντίστοιχο εξάρτημα μιας δέσμης γραμμικά πολωμένου φωτός. Παρά το ότι η αρχή λειτουργίας αυτού του είδους των πολωτών είναι απλή, η κατασκευή τους είναι πολύ δύσκολη εξ' αιτίας της δυσχέρειας όσον αφορά την κοπή και την λείανση των επιφανειών τους καθώς και της κρυσταλλογραφικής ανάπτυξης ευμεγεθών κρυστάλλων. Πλεονεκτούν όμως τα μέγιστα έναντι των πολωτών Polaroid στην τιμή του λόγου κατάσβεσης (βλ. § 4.3) η οποία είναι μικρότερη κατά δύο τάξεις μεγέθους (10^{-5} έναντι 10^{-3} των πολωτών Polaroid), επειδή είναι τελείως διαφανείς. Λόγω του υψηλού τους κόστους οι κρυσταλλικοί πολωτές χρησιμοποιούνται κυρίως σε οπτικά όργανα όπως πολωσίμετρα, ελλειψόμετρα κ.λ.π.

5.7.1 *Κρυσταλλικοί πολωτές*

1. *Πρίσμα του Nicol*

Ο πολωτής αυτός ιστορικά είναι ο πρώτος κρυσταλλικός πολωτής που κατασκευάστηκε από τον Σκοτσέζο Φυσικό William Nicol το 1828. Σήμερα βέβαια ελάχιστα χρησιμοποιείται εξ' αιτίας της κατασκευής περισσότερο βελτιωμένων εκδοχών του. Η κατασκευή του εκκινεί από ένα κρύσταλλο Ασβεστίτη (στη σχισμογενή του μορφή) που το μήκος του DH' (Σχ. 5.7.1.1α) είναι τρεις φορές μεγαλύτερο από τη διαγώνιο $B'D$ της μικρής του βάσης. Το επίπεδο $B'FH'D$ κατά τα γνωστά είναι κάθετο στης δύο απέναντι μικρές βάσεις και περιλαμβάνει τον οπτικό άξονα. Δηλ. είναι κύρια τομή. Για λόγους που θα γίνουν κατανοητοί στα επόμενα, οι μικρές βάσεις $A'B'C'D$ και $E'FG'H'$ του πρίσματος κόβονται και λειαίνονται με τέτοιο τρόπο έτσι ώστε να προκύψει ένα νέο πρίσμα (Σχ.5.7.1.1β). Για το τελευταίο οι γωνίες $\widehat{BDH}$ και $\widehat{BFH}$ δεν είναι πλέον 71^0 (όπως οι $\widehat{B'DH'}$ και $\widehat{B'FH'}$) αλλά $\simeq 68^0$ (βλ. Σχ. 5.7.1.1γ). Κατόπιν το πρίσμα κόβεται σε δύο τμήματα κατά μήκος της BH και κατά ένα επίπεδο που είναι κάθετο στην κύρια τομή του (Σχ. 5.7.1.1β,γ) (το παραλληλόγραμμο $BFHD$ του (Σχ. 5.7.1.1γ) είναι κύρια τομή). Το επίπεδο κοπής είναι κάθετο στο επίπεδο του σχήματος και κατά μήκος της BH). Κατόπιν αφού οι επιφάνειες κοπής λειανθούν και γίνουν οπτικά επίπεδες επικολλούνται μεταξύ τους με βάλσαμο

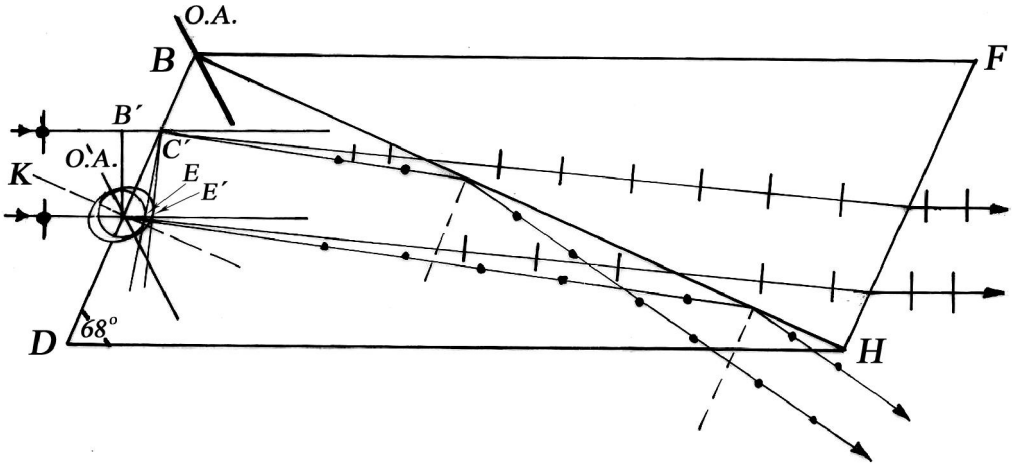
του Καναδά. Το τελευταίο είναι ένα διαφανές υγρό μεγάλου ιξώδους και με τιμή δ.δ. ενδιάμεσο αυτού της τακτικής και της έκτακτης διαταραχής των διαδιδόμενων στο εσωτερικό του κρυστάλλου. Για το φως της λυχνίας του Na με μέσο μ.κ. $\lambda = 589.3\text{nm}$ θα έχουμε: $n_0 = 1.658$, $n_b = 1.55$, $n_e = 1.486$ όπου n_b ο δ.δ. του βάλσαμου του Καναδά και n_o, n_e αυτοί της τακτικής και της έκτακτης (κύριοι δ.δ).



(Σχ. 5.7.1.1)

Ας υποθέσουμε τώρα ότι μια δέσμη φυσικού μονοχρωματικού φωτός (π.χ. από λυχνία Na) προσπίπτει στην επιφάνεια $ABCD$ του πρίσματος Nicol παράλληλα

με τη διεύθυνση DH της κύριας τομής $BFHD$ (Σχ. 5.7.1.2)(επίπεδο μετ. κύματος $B'O$). Κατά τη χρονική διάρκεια της διάδοσής του από το B' στο C', (με αναφορά το κέντρο σκέδασης O), στο εσωτερικό του πρίσματος διαδίδονται δύο διαταραχές, της τακτικής και της έκτακτης (βλ. § 5.5). Οι δύο εφαπτόμενες $C'E$, $C'E'$ από το σημείο C' προς τον κύκλο και την έλλειψη, μας δίνουν τα δύο μέτωπα κύματος (της τακτικής και της έκτακτης) που διαδίδονται στο εσωτερικό του πρίσματος και οδεύουν προς την διαχωριστική επιφάνεια της τομής. Το αν οι δύο δέσμες διαπεράσουν τις επιφάνειες τομής που διαχωρίζονται από το βάλσαμο του Καναδά, ανακλαστούν ολικά σ' αυτό ή έστω η μία από αυτές, εξαρτάται από τη γωνία $\widehat{BDH}$ καθώς και το μήκος DH σε σχέση με την BD. Αυτός ακριβώς είναι ο λόγος για τον οποίο η φυσική γωνία των 71^0 της κύριας τομής της σχισμογενούς μορφής του κρυστάλλου τροποποιήθηκε στις 68^0 και το μήκος του DH έχει επιλέγει να είναι τριπλάσιο της BD . Οι επιλογές αυτές καθιστούν ικανό το μετ. κύματος της τακτικής



(Σχ. 5.7.1.2)

διαταραχής (που είναι γραμμικά πολωμένο κάθετα στο επίπεδο της κύριας τομής) να προσπέσει στη διαχωριστική επιφάνεια με γωνία συνήθως που είναι μεγαλύτερη της ***ορικής γωνίας (critical angle)*** (βλ. ΕΡΓΑΣΤ/ΚΗ ΟΠΤΙΚΗ [3]: Ε.Σ.Σ.Φ. (ΠΑΡ/ΜΑ 3γ)). Κάτω από αυτές τις συνθήκες θα υποστεί ολική ανάκλαση και μπορεί να απορροφηθεί από τα τοιχώματα του πρίσματος, τα οποία για το λόγο αυτό είναι αμαυρωμένα. Δεν συμβαίνει όμως το ίδιο με το μέτ. κύματος της έκτακτης διαταραχής στην οποία αντιστοιχεί δ.δ. μικρότερος από αυτόν του βαλσάμου του Καναδά. Σαν συνέπεια, αν εξαιρέσουμε μια πολύ μικρή παράλληλη μετατόπιση, το τελευταίο εξέρχεται του πρίσματος γραμμικά πολωμένο παράλληλα με το επίπεδο της κύριας τομής. Μ'αυτόν τον τρόπο το πρίσμα Nicol λειτουργεί σαν γραμμικός πολωτής.

Η ορική γωνία στην περίπτωση της τακτικής διαταραχής θα δίνεται από τη γνωστή σχέση: $\sin\theta = 1.55/1.658$ (για φως της λυχνίας Na) και επομένως $\theta \simeq 69^0$. Το μήκος του πρίσματος και ο τρόπος κοπής του, επιτρέπουν να λειτουργήσει σαν πολωτής με την προϋπόθεση ότι η κλίση των προσπιπτόντων μετ. κύματος ως προς την DH (δηλ. η γωνία $\widehat{SMS'}$ (Σχ. (Σχ. 5.7.1.1γ)) θα είναι περίπου όπως υπολογίζεται ίση ή μικρότερη των 28^0. Τότε μόνο το μέτ. κύματος της τακτικής διαταραχής θα προσπίπτει – ολικά ανακλώμενο – στο υμένιο του βάλσαμου του Καναδά. Η γωνία αυτή ονομάζεται ***γωνιακό πεδίο πόλωσης (angular polarized field, angular field of view)***. Επομένως το πρίσμα Nicol θα πρέπει να χρησιμοποιείται με προσοχή όταν θέλουμε να πολώσουμε συγκλίνουσες ή αποκλίνουσες δέσμες φωτός.

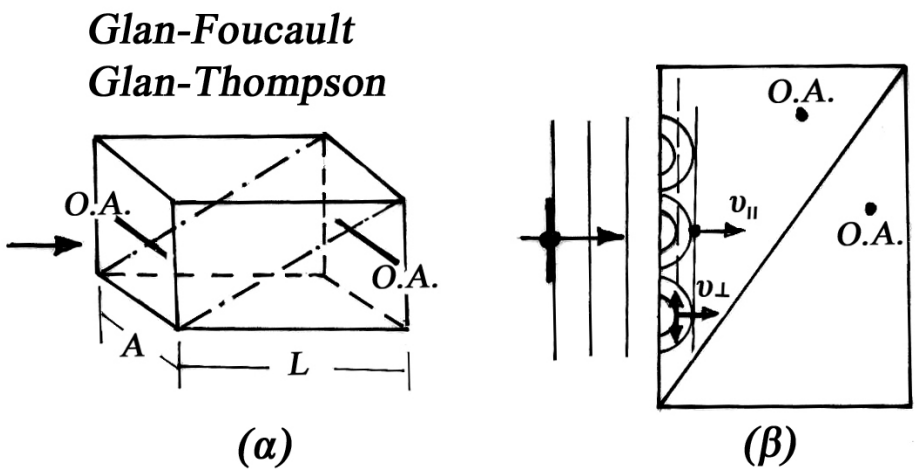
Γνωρίζουμε επίσης ότι ο δ.δ. που αφορά το μετ. κύματος της έκτακτης διαταραχής εξαρτάται από τη γωνία μεταξύ της διεύθυνσης διάδοσής του και του Ο.Α. (βλ. § 5.4). Κατά μήκος του ($\theta = 0^0$) $n_e = n_o = 1.658$ και για διάδοση κάθετα σ' αυτόν ($\theta = 90^0$) $n_e = 1.486$. Αν λοιπόν για μια γωνία διάδοσης (που θα εξαρτάται από την εξωτερικά προσπίπτουσα στο πρίσμα) η έκτακτη διαταραχή προσπίπτει με γωνία μεγαλύτερη της ορικής θα ανακλάται και αυτή ολικά από το διαχωριστικό υμένιο. Άρα από το πρίσμα δεν πρόκειται να βγει φως. Αποδεικνύεται ότι με βάση τον τρόπο κοπής και το μήκος του πρίσματος, το εύρος των γωνιών πρόσπτωσης προκειμένου να συμβεί το τελευταίο είναι: $\widehat{SMS'} > 28^0$.

2. *Πρίσματα τύπου Glan*

Το σύνολο σχεδόν των γραμμικών πολωτών που χρησιμοποιούνται σήμερα σε πειραματικές διατάξεις ακριβείας και όργανα, είναι αυτοί του τύπου Glan. Παρά το ότι για την κατασκευή τους απαιτούνται μεγαλύτεροι κρύσταλλοι Ασβεστίτη από ότι για ένα πρίσμα Nicol συγκρίσιμου μεγέθους, υπερέχουν οπτικά για πολλούς λόγους: α) Επειδή ο οπτικός τους άξονας είναι κάθετος ως προς τον άξονα διάδοσης του πρίσματος, ο δ.δ. της τακτικής διαφέρει κατά το μέγιστο ποσοστό σε σχέση με αυτόν της τακτικής διαταραχής (ακραίοι δ.δ.). Για το λόγο αυτό πετυχαίνουμε μεγαλύτερο γωνιακό πεδίο πόλωσης για προσπίπτουσες στο πρίσμα δέσμες, καθώς και μικρότερο λόγο L/A. Όπου L το μήκος του πρίσματος και A το πλάτος του (η μέγιστη από τις δύο διαστάσεις της επιφάνειας εισόδου του πρίσματος). β) Το φως είναι σχεδόν ομοιόμορφα πολωμένο υπεράνω του γωνιακού πεδίου, γεγονός που δεν ισχύει για το πρίσμα Nicol. γ) Δεν υφίσταται ουσιαστικά παράλληλη μετατόπιση, για τη διάδοση των δεσμών δια μέσου τους σε αντιδιαστολή με αυτό του πρίσματος Nicol.

Πρίσματα: Glan-Thompson, Glan-Foucault, Glan-Taylor

Τα πρίσματα τύπου Glan είναι της μορφής του (Σχ. 5.7.1.3α ή 5.7.1.8α). Συνίστανται από ένα μονοκρύσταλλο Ασβεστίτη μορφής ορθού πρίσματος μήκους L και πλάτους A, ο οποίος είναι κομμένος διαγώνια. Οι Ο.Α. των δύο τμημάτων είναι παράλληλοι προς την διεύθυνση της A (για τους Glan-Foucault, Glan-Thompson (Σχ. 5.7.1.3α)) και κάθετος προς την A (για τον Glan-Taylor (Σχ. 5.7.1.8α)).



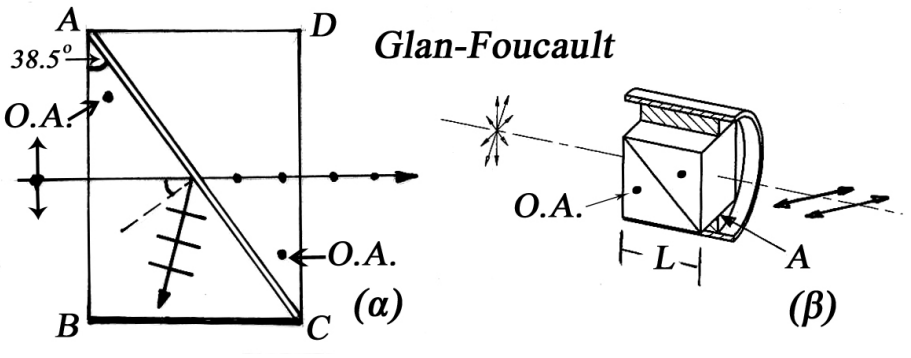
(Σχ. 5.7.1.3)

Για πρώτη φορά είχε περιγραφεί πολωτής του (Σχ. 5.7.1.3α) από τον P.Glan το 1880 όπου η ενδοεπιφάνεια μεταξύ των δύο τμημάτων του αποτελούνταν από αέρα (air- spaced). Τέτοιου είδους πολωτές ονομάζονται Glan-Foucault. Το 1882 ο S. P. Thompson πρότεινε τον ίδιο πολωτή, με μόνη τη διαφορά ότι οι επιφάνειες των δύο τμημάτων του ήταν επικολλημένες (cemented). Τέτοιου είδους πολωτές ονομάζονται Glan-Thompson.

Πρίσμα Glan-Foucault

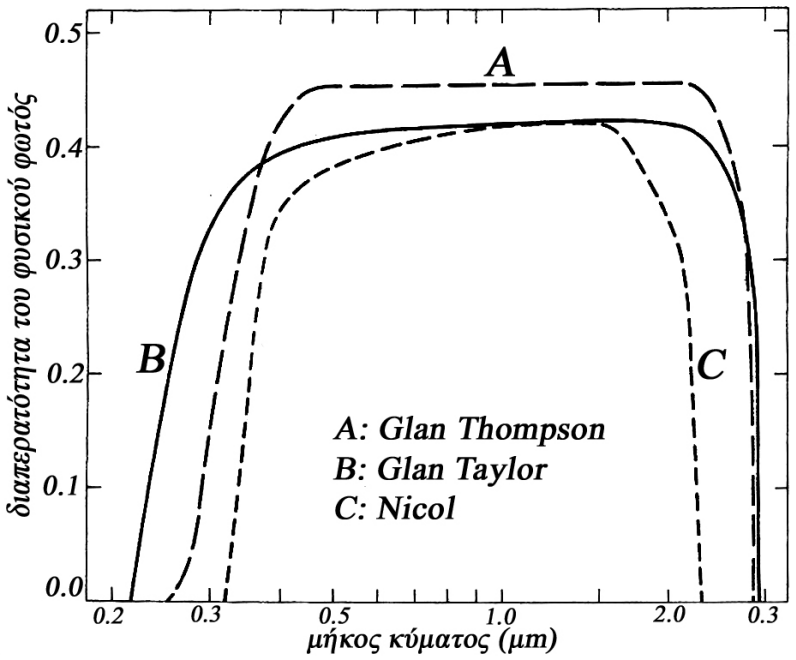
Στο (Σχ. 5.7.1.4α) φαίνεται ένα πρίσμα Glan-Foucault κομμένο σε συγκεκριμένες γωνίες. Θεωρούμε ότι στην έδρα AB προσπίπτει κάθετα μια παράλληλη δέσμη φυσικού φωτός. Κόβουμε τον κρύσταλλο έτσι ώστε η γωνία πρόσπτωσης της τακτικής διαταραχής για την ενδοεπιφάνεια του αέρα να είναι 38.5^0. Η ορική γωνία για την πρόσπτωση αυτή θα είναι $\phi = \arcsin(1/1.658) \simeq 37.1^0$. Επομένως η τακτική διαταραχή θα υποστεί ολική ανάκλαση και θα διαδοθεί προς την επιφάνεια BC όπου θ' απορροφηθεί αν η τελευταία είναι αμαυρωμένη. Επίσης θα μπορούσε να διαθλαστεί προς τα έξω, αν στην περιοχή εκείνη σε επαφή βρισκόταν μια πλάκα από

κοινό γυαλί (π.χ. $n \simeq 1.52$), λόγο της μικρής γωνίας πρόσπτωσης σ' αυτή την ενδοεπιφάνεια. Επομένως από την επιφάνεια DC του πρίσματος θα διαδοθεί μόνο η έκτακτη διαταραχή που θα είναι γραμμικά πολωμένη παράλληλα με τον οπτικό άξονα του κρυστάλλου. Η παράλληλη μετατόπιση σε σχέση με την αρχικά προσ-



(Σχ. 5.7.1.4)

πίπτουσα θα είναι ουσιαστικά απειροελάχιστη. Τα πρίσματα Glan-Foucault (ή Glan-Laser) λόγω της ενδοεπιφάνειας από αέρα χρησιμοποιούνται για την πόλωση ισ-



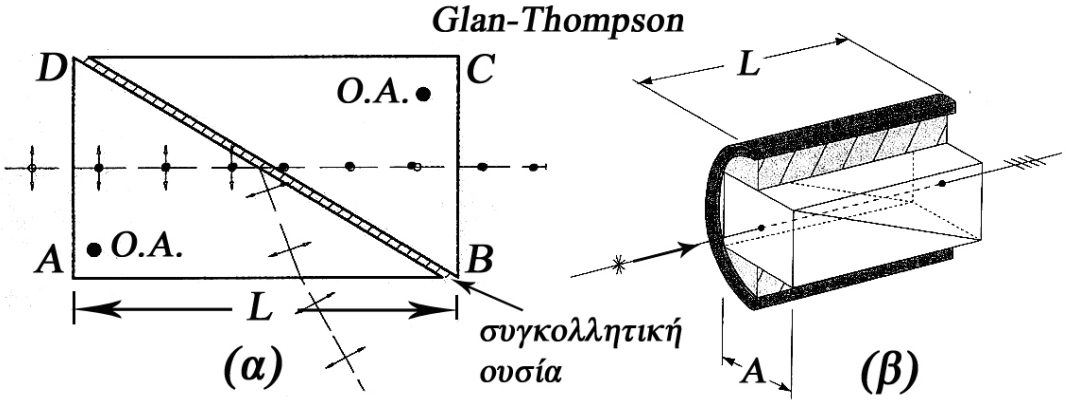
(Σχ. 5.7.1.5)

χυρών δεσμών φωτός όπως είναι τα Lasers. Ένας τυπικός πολωτής αυτού του είδους με ενεργό διάμετρο $\simeq 15\text{mm}$ κατασκευασμένος από Ασβεστίτη, μπορεί να πολώσει δέσμες Laser μέχρις και $100\,\text{W/cm}^2$ cw (συνεχούς λειτουργίας). Όσο για

παλμικής λειτουργίας Laser (pulsed), μπορούν μα πολωθούν δέσμες μεταξύ $400-600\,\mathrm{MW/cm^2}$ διάρκειας παλμών $20\mathrm{ns}$ στα $1064\mathrm{nm}$. Είναι διαπερατοί μεταξύ των μ.κ. από $350-2300\mathrm{nm}$ (Σχ. 5.7.1.5). Η απόκλιση των δεσμών εξόδου είναι $\simeq 3'$ και ο λόγος κατάσβεσής τους $\simeq 5\times10^{-5}$.

Πρίσμα Glan-Thompson

Η βασική διαφορά αυτού του πολωτή από τον προαναφερόμενο Glan-Foucault (Glan-air), είναι ότι τα δύο επί μέρους πρίσματά του είναι επικολλημένα με διαφανή ουσία (Σχ. 5.7.1.6α,β). Το γεγονός αυτό διαφοροποιεί ορισμένες από τις χαρακτηριστικές ιδιότητες του πολωτή που θα τις εντοπίσουμε περιγράφοντας



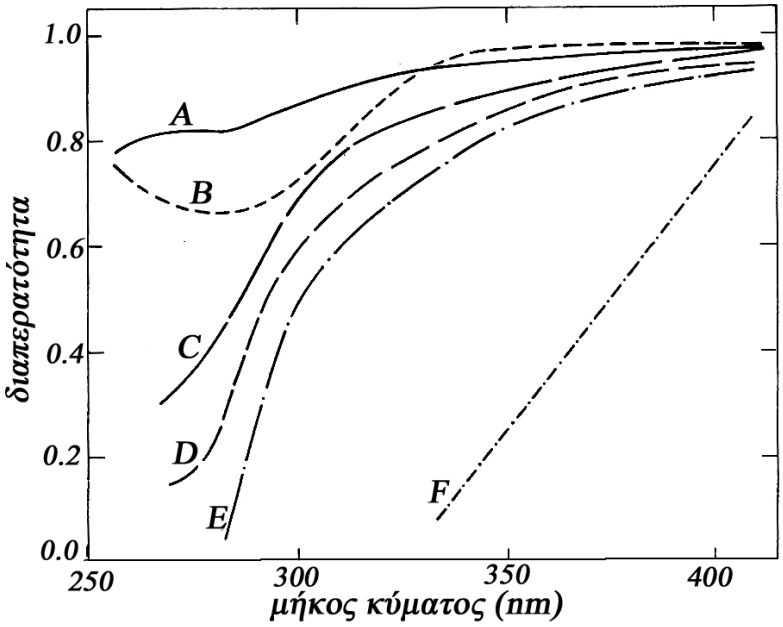
(Σχ. 5.7.1.6)

ένα τυπικό δείγμα του. Κατ' αρχή στο (Σχ. 5.7.1.7) δίνονται οι καμπύλες διαπερατότητας για ένα χιλιοστό πάχους των εξής συγκολλητικών ουσιών: A – Κρυσταλλική γλυκόζη (crystalline glucose), B – Γλυκερίνη (glycerin), C – gédamine (urea formaldehyd vesin in butyl alcohol), D – Rhodopas N60A (πολυμερισμένο Βινυλικό οξύ σε αλκοόλη), E – Ουρική φορμαλδεΰδη (urea formaldehyde) και F – Βάλσαμο του Καναδά (Canada balsam). Οι καμπύλες αυτές δίνονται για τις περιοχές μ.κ. από $250-400\mathrm{nm}$ επειδή για μεγαλύτερα μ.κ. (μέχρι περίπου το μέσο υπέρυθρο) η διαπερατότητά τους θεωρείται επαρκής και τείνει προς τη μονάδα.*

Αν υποθέσουμε τώρα ότι η συγκόλληση των δύο τμημάτων του πρίσματος Glan-Thompson γίνεται με βάλσαμο του Καναδά για το οποίο γνωρίζουμε ότι $n_b = 1.55\ (\lambda = 589.3\mathrm{nm})$, τότε η ορική γωνία για την τακτική διαταραχή θα είναι $\phi = \arctan(1.55/1.658) \simeq 69^0$. Επομένως για να έχουμε ολική ανάκλαση της τακτι-

* 'Handbook of Optics' Sec.10 Polarization J. M. Bennet and H. E. Bennet.

κής (Σχ. 5.7.1.6α) θα πρέπει η υποτείνουσα DB του πρώτου τμήματος του κρυστάλλου να έχει μεγάλη κλίση ως προς τη διεύθυνση της προσπίπτουσας της καθέτου προς την πλευρά AD. Το γεγονός αυτό έχει σαν αποτέλεσμα ο λόγος L/A για τα πρίσματα Glan-Thompson να είναι αρκετά μεγαλύτερος από αυτά των Glan-Foucault. Υπερτερεί όσον αφορά το γωνιακό πεδίο πόλωσης, αλλά μειονεκτεί όσον αφορά την ένταση της διερχόμενης από αυτόν δέσμης λόγω του ότι στο συγκολλητικό στρώμα προκαλείται έκλυση θερμότητας, με αποτέλεσμα την υπερθέρμανσή και την καταστροφή του.



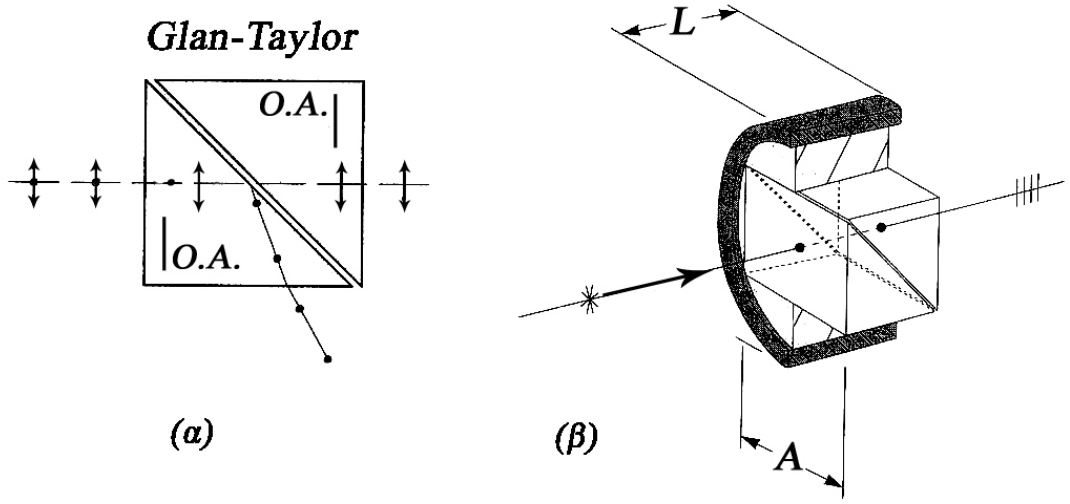
(Σχ. 5.7.1.7)

Ένας τυπικός πολωτής αυτού του είδους με ενεργό διάμετρο $\simeq 15\text{mm}$ (διάμετρος διερχόμενης δέσμης) κατασκευασμένος από Ασβεστίτη μπορεί να πολώσει δέσμες έντασης 1W/cm^2 (συνεχούς κύματος) και $5\,\text{W/cm}^2$ για παλμικούς Laser. Είναι διαπερατός για μ.κ. από $320-2300\text{nm}$ (βλ.(Σχ. 5.7.1.5)). Έχει απόκλιση πολωμένης δέσμης στην έξοδό του $1'-3'$ και ο λόγος κατάσβεσης στα $2/3$ του πεδίου του είναι $\sigma_p \simeq 1\times10^{-5}$. Έχει λόγο $L/A \simeq 2{,}5-3$ και γωνιακό πεδίο πόλωσης 14^0-16^0. Η μέγιστη θερμοκρασία λειτουργίας του είναι οι $60\,^0\text{C}$.

Πρίσμα Glan-Taylor

Ο πρισματικός πολωτής Glan-Taylor είναι της μορφής του (Σχ. 5.7.1.8α). Συνίσταται από ένα κρύσταλλο Ασβεστίτη μορφής ορθού πρίσματος μήκους L και

πλάτους A, ο οποίος είναι κομμένος διαγώνια. Οι οπτικοί άξονες των δύο τμημάτων του είναι κάθετοι προς την A. Η ενδοεπιφάνεια μεταξύ των δύο τμημάτων του είναι από αέρα (air-spaced). Η γωνία πρόσπτωσης της εισερχόμενης σ' αυτήν δέσμης για



(Σχ. 5.7.1.8)

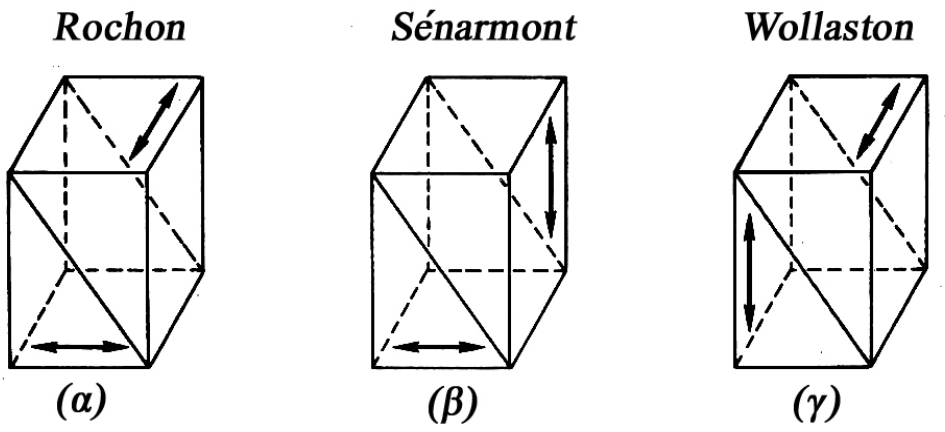
την έκτακτη διαταραχή είναι αυτή του Brewster $\left(n_e = 1.486 \Rightarrow \theta_B \simeq 56^0\right)$, προκειμένου να μειωθεί το ποσοστό της ανακλώμένης της. Η ορική γωνία για την τακτική (την οποία θέλουμε να απαλείψουμε μέσω ολικής ανάκλασης) θα είναι για $n_o = 1.658$, $\theta \simeq 37^0$. Επομένως γι' αυτές τις συνθήκες πρόσπτωσης έχουμε ολική ανάκλαση της τακτικής διαταραχής και διέλευση της έκτακτης, χωρίς ουσιαστικά παράλληλη μετατόπιση.

Ένας τυπικός πολωτής αυτού του είδους, με ενεργό διάμετρο διερχομένης δέσμης $\simeq 15\text{mm}$ κατασκευασμένος από Ασβεστίτη, μπορεί να πολώσει δέσμες Laser έντασης μέχρις και $100\,\text{W/cm}^2$ (συνεχούς κύματος) και $100\,\text{MW/cm}^2$ (παλμικής λειτουργίας). Είναι διαπερατός για μ.κ. $230 - 2700\text{nm}$ (βλ. Σχ. 5.7.1.7). Έχει απόκλιση πολωμένης δέσμης εξόδου $\simeq 3'$ και ο λόγος κατάσβεσης στα $2/3$ του πεδίου είναι $\sigma_p \simeq 1 \times 10^{-5}$. Έχει λόγο $L/A \simeq 0.85$ και γωνιακό πεδίο πόλωσης $\simeq 5^0$.

3. *Πρισματικοί πολωτικοί διαχωριστές δέσμης*

Πρισματικοί ***πολωτικοί διαχωριστές δέσμης (polarizing beam-splitters)*** είναι τα οπτικά εξαρτήματα τα οποία μια προσπίπτουσα σ' αυτούς δέσμη φυσικού φωτός, την διαχωρίζουν σε δύο ορθογώνιες γραμμικά πολωμένες υπό μια κλίση μεταξύ τους. Οι συνήθεις διαχωριστές οι οποίοι κυκλοφορούν και στο εμπόριο, είναι

αυτοί των Rochon, Sénarmont και Wollaston (Σχ. 5.7.1.9). Αποτελούν ορθογώνια ορθά πρίσματα τα οποία είναι διαχωρισμένα σ' ένα από τα διαγώνιά τους επίπεδα. Μπορούν να κατασκευασθούν από Ασβεστίτη ή κρυσταλλικό Χαλαζία. Σε αντί-



(Σχ. 5.7.1.9)

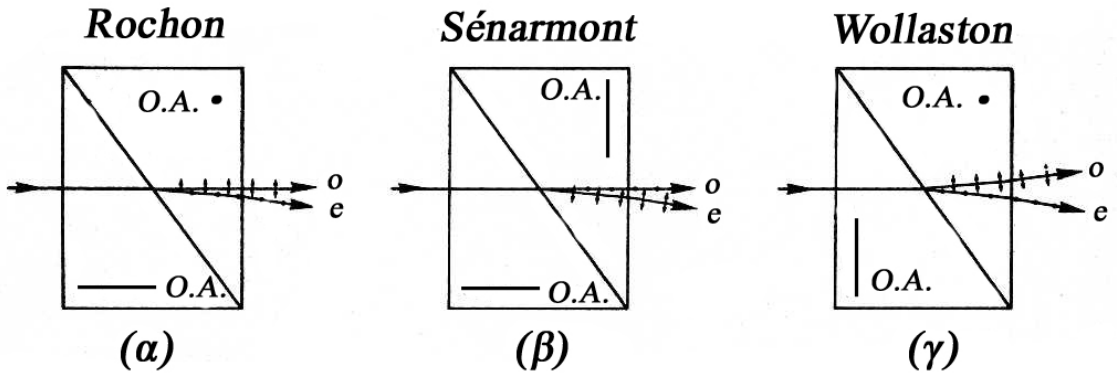
θεση με τους πρισματικούς πολωτές, οι οπτικοί άξονες των δύο τμημάτων τους είναι ορθογώνιοι μεταξύ τους. Η κατασκευή από κρυσταλλικό Χαλαζία, επιτρέπει τη χρήση τους και σε περιοχές του φάσματος με μ.κ. κάτω της περιοχής του υπεριώδους του κενού $(<190\text{nm})$. Για εφαρμογές που δεν απαιτούνται τόσο μικρά μ.κ. οι διαχωριστές κατασκευάζονται από Ασβεστίτη. Σαν αποτέλεσμα θα έχουμε γωνιακό διαχωρισμό $\simeq 10^0$, σε αντίθεση με αυτήν των πρισμάτων από Χαλαζία που είναι $\simeq 0.5^0$.

Διαχωριστής Rochon

Ανακαλύφθηκε το 1883 και αποτελεί έναν από τους πιο συχνά χρησιμοποιούμενους σε φωτομετρικές εφαρμογές, όπου απαιτείται διαχωρισμός μιας αρχικής δέσμης σε δύο. Η πορεία των διαταραχών στο εσωτερικό του φαίνεται στο (Σχ. 5.7.1.10α). Μια δέσμη φωτός προσπίπτει κάθετα στην μπρος επιφάνεια του πρίσματος και διαδίδεται στο πρώτο τμήμα του, παράλληλα με τον οπτικό του άξονα. Επομένως τακτική και έκτακτη διαδίδονται με την ίδια ταχύτητα και χωρίς εκτροπή ($n_e = n_o$). Στο δεύτερο τμήμα του πρίσματος, ο Ο.Α. είναι κάθετος σε σχέση με αυτόν του πρώτου. Επομένως η διαταραχή που το πεδίο της είναι κάθετο σ' αυτόν (η τακτική διαταραχή στο δεύτερο τμήμα του πρίσματος) συνεχίζει τη διάδοσή της χωρίς να εκτρέπεται (έχει τον ίδιο δ.δ. n_o). Αυτή όμως που το πεδίο της είναι παράλληλο (η έκτακτη διαταραχή στο δεύτερο τμήμα του πρίσματος), θα έχει δ.δ.

$n_e \neq n_o$. Επομένως με βάση τον νόμο του Snell θα εκτραπεί κατά μία γωνία. Η γωνία αυτή μάλιστα αυξάνεται όταν βγει από την δεύτερη επιφάνεια του διαχωριστή.

Ο διαχωριστής Rochon είναι αχρωματικός για την τακτική διαταραχή αλλά χρωματικός (δηλ. εμφανίζονται φαινόμενα διασκεδασμού) για την έκτακτη. Επομένως η τελευταία θ' αναλύεται εφόσον στην είσοδο έχουμε πρόσπτωση πολυχρωματικού φωτός. Πράγματι το γεγονός αυτό συνεπάγεται από το ότι η γωνία διαχωρισμού μεταξύ των δύο δεσμών εξαρτάται από το λόγο n_o/n_e όπου κατά τα γνωστά



(Σχ. 5.7.1.10)

$n_o = n_o(\lambda)$, $n_e = n_e(\lambda)$. Από το αν η ενδοεπιφάνεια μεταξύ των δύο πρισμάτων είναι ο αέρας ή κάποια συγκολλητική ουσία, εξαρτάται σε ποια φασματική περιοχή θα χρησιμοποιηθεί ο διαχωριστής. Συνήθως για την υπεριώδη περιοχή, η ενδοεπιφάνεια είναι αέρας. Οι ίδιοι χρησιμοποιούνται και για εφαρμογές με δέσμες Laser μεγάλης ισχύος.

Διαχωριστής Sénarmont

Ο διαχωριστής αυτός φαίνεται στο (Σχ. 5.9.1.9β) και είναι παρόμοιος με αυτόν του Rochon εκτός του ότι ο οπτικός άξονας στο δεύτερο τμήμα του πρίσματος, είναι ομοεπίπεδος με αυτόν του πρώτου. Ο τρόπος διάδοσης μιας κάθετα προσπίπτουσας δέσμης φωτός (επιπέδου μετώπου κύματος) στο εσωτερικό των δύο τμημάτων του διαχωριστή φαίνεται στο (Σχ. 5.9.1.10β). Και εδώ στο πρώτο τμήμα του πρίσματος οι διαταραχές διαδίδονται αδιαχώριστες. Στο δεύτερο, η οριζόντια ως προς τη βάση του πρίσματος (στο πρώτο) γραμμικά πολωμένη (δ.δ. n_0) συνιστά τακτική για το δεύτερο τμήμα του πρίσματος και συνεχίζει διαδιδόμενη χωρίς να εκτραπεί. Η κατακόρυφα όμως γραμμικά πολωμένη (στο πρώτο) (δ.δ. και αυτή n_0), για το δεύτερο συνιστά έκτακτη με συνέπεια να εκτραπεί με βάση το νόμο του Snell. Η συνολική γωνία εκτροπής (στην έξοδο του δευτέρου τμήματος του πρίσματος) για

το διαχωριστή Sénarmont είναι κατά τι μικρότερη αυτής του Rochon για τον Ασβεστίτη.

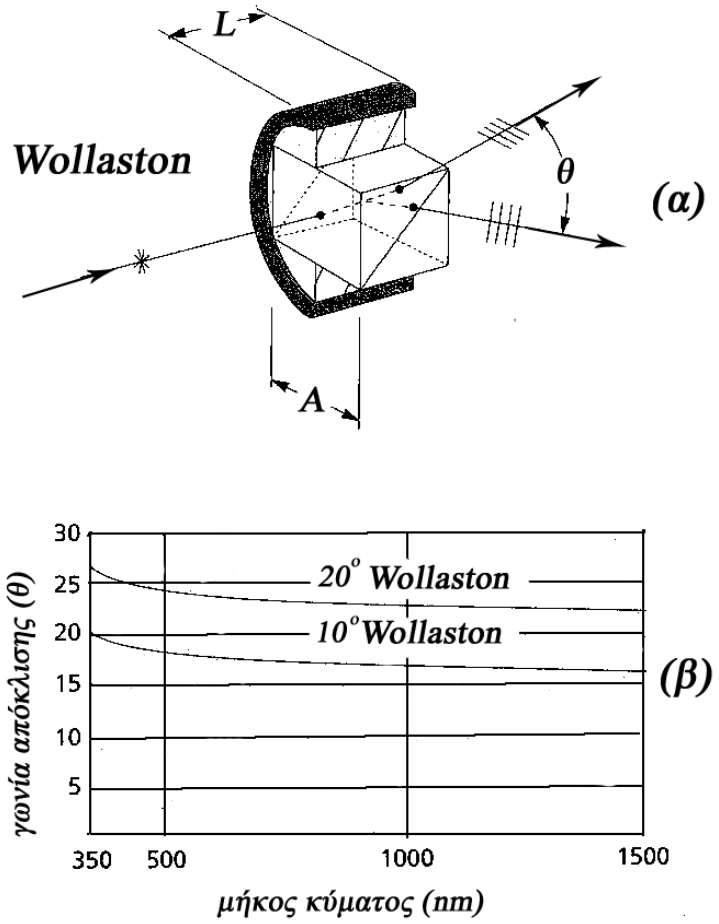
Διαχωριστής Wollaston

Ο διαχωριστής αυτός, καθώς και οι διευθύνσεις των οπτικών αξόνων των δύο τμημάτων το φαίνονται στο (Σχ. 5.7.1.9γ). Οι διευθύνσεις που σχηματίζουν το γωνιακό άνοιγμα των δύο διαχωρισμένων δεσμών κατά την έξοδό τους από το δεύτερο τμήμα του πρίσματος, είναι περίπου συμμετρικές ως προς την κάθετη (βλ. Άσκ.7-Λυμένη). Το γωνιακό αυτό άνοιγμα είναι διπλάσιο από ότι αυτό το οποίο επιτυγχάνεται μέσω των διαχωριστών Rochon ή Sénarmont. Έτσι λοιπόν μια δέσμη φωτός που προσπίπτει κάθετα στην επιφάνεια εισόδου του πρίσματος, διαδίδεται στο εσωτερικό του (μέχρις την διαχωριστική του επιφάνεια) χωρίς να εκτραπεί, παρά το ότι η έκτακτη διαταραχή προπορεύεται της τακτικής (για τον Ασβεστίτη $n_e < n_o \Rightarrow \upsilon_e > \upsilon_o$). Φθάνοντας στη διαχωριστική επιφάνεια, η τακτική διαταραχή (στο πρώτο τμήμα) καθίσταται έκτακτη για τη διάδοσή της στο δεύτερο λόγω του προσανατολισμού του Ο.Α. Σαν συνέπεια επειδή $n_o > n_e$ με βάση τον νόμο του Snell (ο οποίος ισχύει και για τις δύο διαδιδόμενες διαταραχές στο δεύτερο τμήμα του πρίσματος), η διαδιδόμενη έκτακτη διαταραχή απομακρύνεται από την κάθετη στη διαχωριστική επιφάνεια. Η έκτακτη διαταραχή (στο πρώτο τμήμα), καθίσταται τακτική για το δεύτερο και επειδή $n_e < n_o$, κατά τη διάδοσή της πλησιάζει προς την κάθετη. Κατά την έξοδό τους από το δεύτερο τμήμα του πρίσματος οι δύο διαταραχές υπόκεινται σε νέα διάθλαση προς τον αέρα διαμορφώνοντας την τελική γωνία εξόδου τους.

Εφόσον η εκτροπή των δύο δεσμών στη διαχωριστική επιφάνεια του πρίσματος εξαρτάται από τους λόγους n_e/n_o , n_o/n_e (λόγω του νόμου του Snell) και οι δύο τους θα είναι χρωματικές για την περίπτωση που το προσπίπτον φως θα είναι πολυχρωματικό. Όταν το πρίσμα κατασκευάζεται από κρυσταλλικό Χαλαζία και ο λόγος $L/A \simeq 1$ τότε πετυχαίνουμε γωνιακό διαχωρισμό $\theta \simeq 1^0$. Αν $L/A \simeq 4$ τότε $\theta \simeq 3^0 30'$. Με πρίσματα Ασβεστίτη πετυχαίνουμε σαφώς μεγαλύτερο διαχωρισμό δεσμών. Π.χ. για $L/A \simeq 1$ τότε $\theta \simeq 19^0$ αν και σ' αυτήν την περίπτωση εμφανίζονται σφάλματα απεικόνισης. Προκειμένου να μην συμβαίνει αυτό, έχουν κατασκευαστεί πρίσματα περισσοτέρων στοιχείων.

Ένας τυπικός διαχωριστής Wollaston, κατασκευασμένος από Ασβεστίτη (Σχ. 5.7.1.11α) με $L/A \simeq 1$ και διαστάσεις εισόδου $A \times A = 10 \times 10\text{mm}$ ή $20 \times 20\text{mm}$ θα έχει τα εξής χαρακτηριστικά. Γωνία εκτροπής μεταξύ των δεσμών στην έξοδο $\theta \simeq 15^0$ ή 20^0. Λόγω του ότι όμως οι δέσμες είναι χρωματικές, η εκτροπή τους θα

είναι συνάρτηση του μ.κ. όπως αυτό φαίνεται στο (Σχ. 5.7.1.11β). Η φασματική περιοχή που μπορούμε να τους χρησιμοποιήσουμε είναι από $350-2300\text{nm}$. Οι δύο δέσμες θα έχουν λόγο κατάσβεσης $\sigma_p \simeq 1\times10^{-5}$. Επειδή τα δύο τμήματα που τους απαρτίζουν είναι συγκολλημένα, η μέγιστη θερμοκρασία λειτουργίας τους περιορίζεται στους $60\,^0\text{C}$.

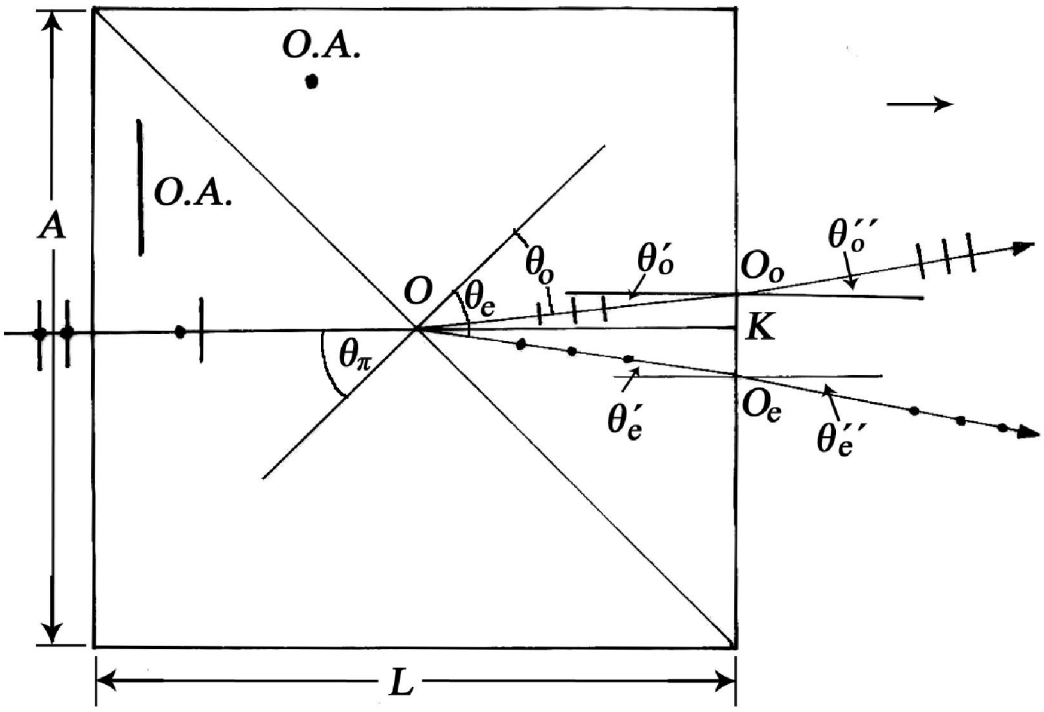


(Σχ. 5.7.1.11)

Παράδειγμα

Να σχεδιαστεί διαχωριστής δέσμης Wollaston από ασβεστίτη για τον οποίο: $n_0 = 1.658$, $n_e = 1.486$ και για φως που προέρχεται από λυχνία Na($\overline{\lambda} = 589\text{nm}$).Ο λόγος $L/A \simeq 1$ και η εμπρός επιφάνεια του πρίσματος είναι διαστάσεων $A\times A$. Η ενδοεπιφάνεια μεταξύ των δύο τμημάτων του πρίσματος επικολλάται με βάλσαμο του Καναδά $\left(n_b = 1.55\right)$.

• Κατ' αρχή, λόγω της τιμής του δ.δ. του βάλσαμου του Καναδά, δεν θα έχουμε ολική ανάκλαση καμίας από τις διαταραχές της τακτικής και της έκτακτης κατά την πρόσπτωσή τους στη διαχωριστική επιφάνεια (Σχ.1) με γωνία θ_π. Εμφανίζεται μόνο μια μικρή παράλληλη μετατόπιση, η οποία δεν είναι εμφανής στο σχήμα. Η κάθε



(Σχ. 1)

μια από αυτές, διαθλάται στο άλλο τμήμα του πρίσματος με γωνίες θ_o, θ_e. Για $\theta_\pi = 45^0$ θα έχουμε:

$$n_o \sin\theta_\pi = n_e \sin\theta_e \Rightarrow \theta_e = \arcsin\left(\frac{n_o}{n_e}\sin\theta_\pi\right) = 52.08^0$$

$$n_e \sin\theta_\pi = n_o \sin\theta_o \Rightarrow \theta_o = \arcsin\left(\frac{n_e}{n_o}\sin\theta_\pi\right) = 39.32^0$$

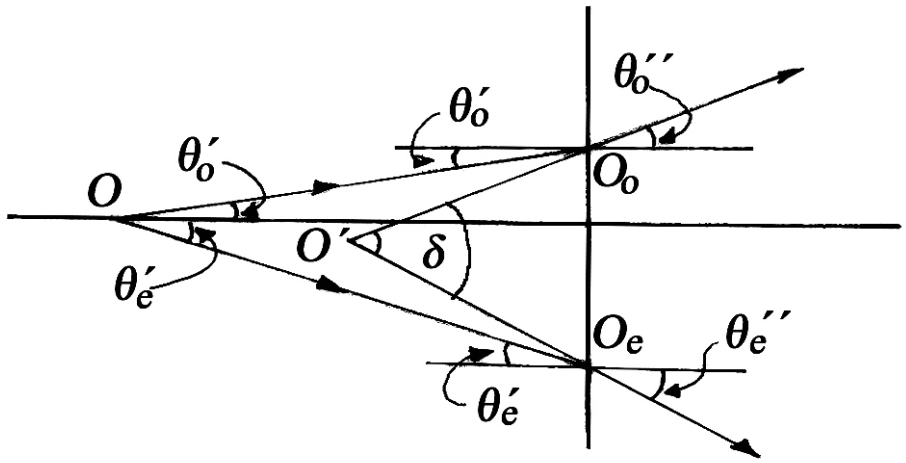
Τότε οι γωνίες πρόσπτωσης των διαταραχών στη δεξιά πλευρά του δευτέρου τμήματος του πρίσματος θα είναι:

$$\theta_o' = 45^0 - \theta_o = 45^0 - 39.32^0 = 5.68^0 \quad \text{και} \quad \theta_e' = \theta_e - 45^0 = 52.08^0 - 45^0 = 7.08^0$$

Και οι γωνίες διάθλασής τους θ_o'', θ_e'' θα δίνονται από τις σχέσεις:

$$n_o \sin\theta_o' = \sin\theta_o'' \Rightarrow \theta_o'' = \arcsin\left(n_o \sin\theta_o'\right) = 9.44^0$$
$$n_e \sin\theta_e' = \sin\theta_e'' \Rightarrow \theta_e'' = \arcsin\left(n_e \sin\theta_e'\right) = 10.55^0$$

Τότε από το τρίγωνο $O'O_oO_e$ (Σχ. 2) θα έχουμε:



(Σχ. 2)

$\delta + \left(90^0 - \theta_o''\right) + \left(90^0 - \theta_e''\right) = 180^0 \;\Rightarrow\; \delta = \theta_o'' + \theta_e'' = 9.44^0 + 10.55^0 = 19.99^0 \simeq 20^0$.Η απόκλιση δηλ. μεταξύ τακτικής και έκτακτης κατά την έξοδό τους από το πρίσμα Wollaston θα είναι $\delta \simeq 20^0$. Οι πραγματικές διαστάσεις με τις οποίες εμφανίζεται στο εμπόριο ένα τέτοιο πρίσμα τυπικά είναι:

$$L: 18.0\,\text{mm}, A \times A: 15 \times 15\,\text{mm} \text{ ή } L: 13.0\,\text{mm}, A \times A: 10 \times 10\,\text{mm}$$

Τέλος μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι η γωνία απόκλισης δ των δύο δεσμών, δεν είναι συμμετρική ως προς την κάθετη στην επιφάνεια εξόδου από το πρίσμα.

5.7.2 *Κρυσταλλικοί καθυστερητές*

Οι διπλοθλαστικοί κρύσταλλοι δεν είναι τα μόνα μέσα με τα οποία μπορούμε να πετύχουμε μεταβολή στη φάση μεταξύ δύο ορθογωνίων μεταξύ τους και συμφώνων διαταραχών. Μια άλλη μέθοδος είναι με τη βοήθεια του φαινομένου της ολικής (εσωτερικής) ανάκλασης η οποία μπορεί να συμβεί μεταξύ ενός πυκνού οπτικού μέσου (π.χ. του γυαλιού) και του αέρα (βλ. ΕΡΓΑΣΤ/ΚΗ ΟΠΤΙΚΗ [3]: Ε.Σ.Σ.Φ. (ΠΑΡ/ΜΑ 3/δ)). Τέτοιου είδους εξαρτήματα αποτελούνται από διαφανή ισότροπα υλικά, κομμένα σε ρομβοειδή σχήματα και συντίθενται από ένα ή περισσότερα στοιχεία. Τα τελευταία είναι μεταξύ τους συγκολλημένα (cemented) ή το ενδιάμεσο μεταξύ τους στοιχείο είναι το κενό ή ο αέρας (air-spaced). Ως επί το πλείστον μπορούν να χρησιμοποιηθούν σε ευρεία φασματική περιοχή, δηλ. είναι αχρωματικά με μικρά

συνήθως σφάλματα όσον αφορά την επιβαλλόμενη καθυστέρηση φάσης λόγω του διασκεδασμού που εμφανίζουν τα υλικά κατασκευής τους.

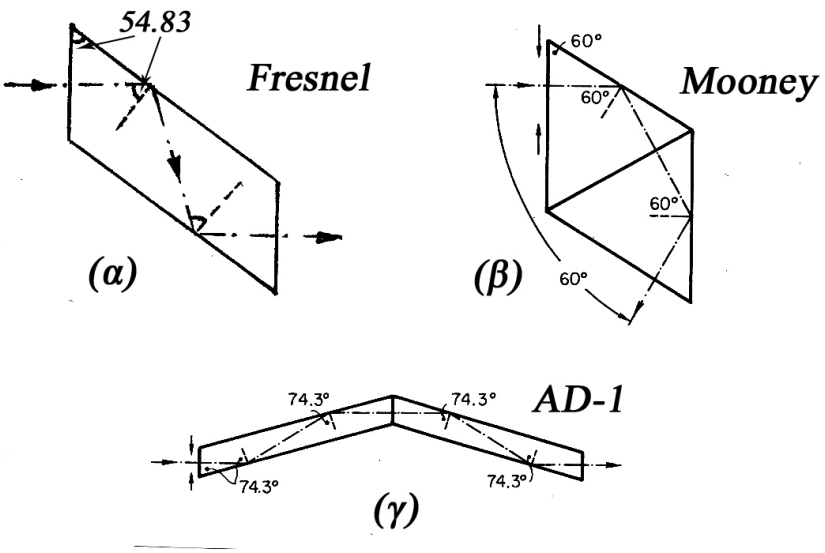
Η διαφορά φάσης $\Delta\phi = \Delta\phi_\pi - \Delta\phi_\sigma$ που επιβάλλεται μεταξύ της παράλληλης (π) και της κάθετης (σ) προς το επίπεδο πρόσπτωσης διαταραχής κατά την ολική εσωτερική ανάκλαση μιας δέσμης φωτός (επιπέδου μετ. κύματος), δίνεται σε όλες τις περιπτώσεις από τη σχέση (βλ. επόμενο παράδειγμα):

$$\tan\frac{\Delta\phi}{2} \equiv \tan\left(\frac{\Delta\phi_\pi - \Delta\phi_\sigma}{2}\right) = \frac{\cos\sqrt{n^2\sin^2\theta - 1}}{n\sin^2\theta} \qquad (5.7.2.1)$$

όπου θ η γωνία πρόσπτωσης και n ο δ.δ. στο μέσο που διαδίδεται η δέσμη. Εξυπακούεται ότι η (σχ. 5.7.2.1) ισχύει για την περίπτωση που οι ρόμβοι (τα πρίσματα) βρίσκονται στον αέρα. Η συνολική βέβαια καθυστέρηση μεταξύ των ορθογωνίων διαταραχών π και σ εφόσον έχουμε λόγω κατασκευής περισσότερες των μιας ανακλάσεις, θα είναι το άθροισμά τους.

Ρομβοειδείς καθυστερητές λ/4

Στο (Σχ. 5.7.2.1) παρουσιάζονται τριών ειδών ρομβοειδείς καθυστερητές $\lambda/4$ με τις εξής ονομασίες: α) ***Ρόμβος Fresnel (Fresnel rhomb)***, β) ***Ρόμβος Mooney***

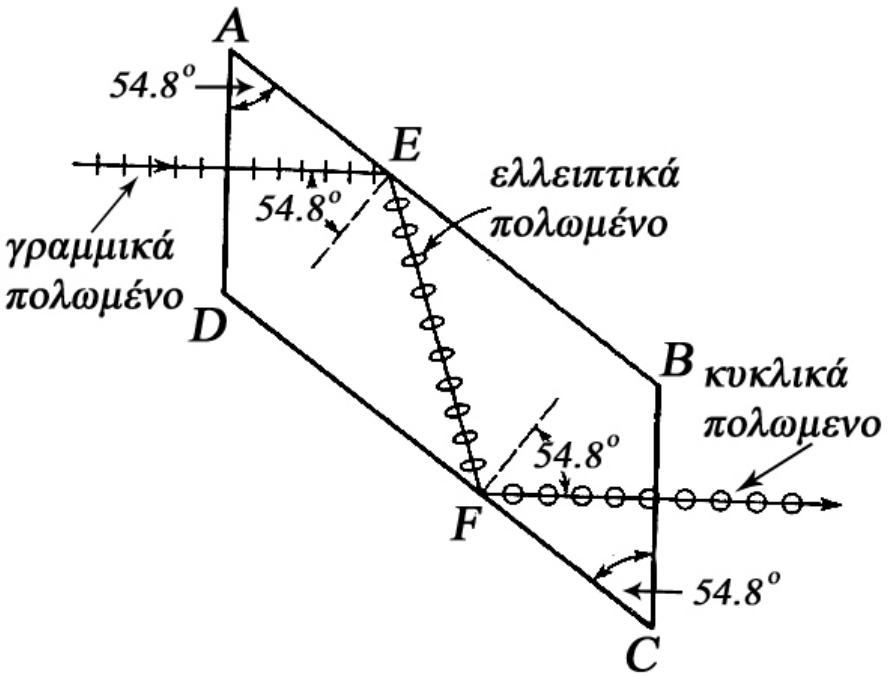


(Σχ. 5.7.2.1)

(Mooney rhomb) γ) ***Αχρωματικό εξάρτημα (AD-1) (achromatic device-1)***. Με κάποια σχετική λεπτομέρεια θα περιγράψουμε το ρόμβο του Fresnel επειδή είναι και ο μόνος που διατίθεται στο εμπόριο, ενώ οι άλλοι απαιτούν ειδική παραγγελία.

Ρόμβος Fresnel

Ο συνήθης ρόμβος Fresnel (Σχ. 5.7.2.1α) κατασκευάζεται από στεφανύαλο με $n_D = 1.51$. Κόβεται με τέτοιο τρόπο ώστε να έχουμε δύο ολικές εσωτερικές ανακλάσεις η κάθε μια με διαφορά φάσης $\Delta\phi = 45^0$ προκειμένου στην έξοδο η συνολική διαφορά να είναι ίση με $\Delta\phi = 90^0$ (πλακίδιο $\lambda/4$). Όπως αποδεικνύεται (βλ. επόμενο παράδειγμα) οι γωνίες πρόσπτωσης μπορεί να είναι $\theta_1 = 54.83^0$ ή $\theta_2 = 48.48^0$. Για την κατασκευή του ρόμβου επιλέγεται η πρώτη επειδή μας δίνει καλύτερα αχρωματικά αποτελέσματα. Δηλ. η διαφορά φάσης μεταξύ των δύο ορθογωνίων διαταραχών θα είναι $\Delta\phi = 90^0$ σε όλο το χρησιμοποιούμενο φασματικό εύρος. Ένα παράδειγμα λειτουργίας του ρόμβου είναι π.χ. όταν το προσπίπτον φως κάθετα στην πρώτη του επιφάνεια (τετραγωνικού προφίλ) είναι επίπεδο και γραμ-

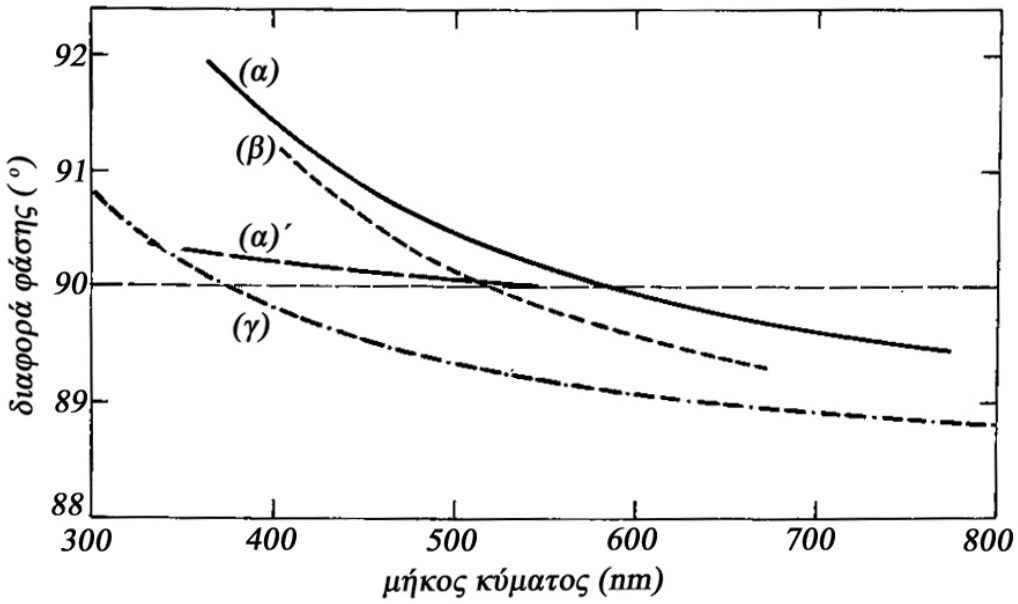


(Σχ.5.7.2.2)

μικά πολωμένο κατά τη διαγώνιό του. Τότε οι ίσου πλάτους π και σ συνιστώσες διαδίδονται στο εσωτερικό του κρυστάλλου με διαφορά φάσης $\Delta\phi = 0^0$ λόγω της κάθετης πρόσπτωσης της δέσμης στην AD (Σχ. 5.7.2.2). Κατόπιν προσπίπτει στη θέση E της AB με $\theta = 54.83^0$ υπόκειται σε ολική ανάκλαση επειδή η ορική γωνία για την ενδοεπιφάνεια γυαλί-αέρας ($n_\gamma \simeq 1{,}51$, $n_\alpha \simeq 1$) είναι $\theta_c \simeq 41.47^0$. Το φως το

οποίο ανακλάται στο E είναι ελλειπτικά πολωμένο, επειδή τα πλάτη των δύο ορθογωνίων διαταραχών είναι ίσα μεταξύ τους έχουν όμως ήδη αποκτήσει διαφορά φάσης $\Delta\phi = 45^0$ (η γωνία πρόσπτωσης $\theta = 54.83^0$ έχει υπολογιστεί από τη (σχ. 5.7.2.1) για $n \simeq 1,51$ και $\Delta\phi = 45^0$). Κατά τη δεύτερη εσωτερική ανάκλαση στο σημείο F της επιφάνειας CD οι δύο ορθογώνιες συνιστώσες του πεδίου δεν μεταβάλλουν τα πλάτη τους αλλά μεταξύ τους θ' αναπτυχθεί όπως προηγούμενα μια επιπλέον διαφορά φάσης 45^0. Άρα τελικά οι συνιστώσες του φωτός κατά την έξοδό του από την επιφάνεια BC θα έχουν ίδια πλάτη και συνολική διαφορά φάσης $\Delta\phi = 90^0$. Επομένως το φως θα είναι κυκλικά πολωμένο.

Για το ρόμβο Fresnel οι δέσμες εισόδου-εξόδου είναι μεταξύ τους παράλληλες αλλά σε μεγάλο βαθμό μετατοπισμένες. Η επικάλυψη των περιοχών όπου γίνεται η ολική ανάκλαση, με διαφόρων ειδών και πάχους υμένια, βελτιώνει κατά πολύ την αχρωματικότητά τους. Στο (Σχ. 5.7.2.3) μας δίνεται (καμπύλες (α) και (α΄))



(Σχ. 5.7.2.3)

η μεταβολή της καθυστέρησης φάσης συναρτήσει του λ μεταξύ $300-800\text{nm}$ για τον κλασσικό (α) και τον επικαλυμμένο (α΄) ρόμβο Fresnel. Τα τυπικά χαρακτηριστικά ενός τέτοιου ρόμβου που κυκλοφορεί στο εμπόριο είναι: α) Ενεργός διάμετρος δέσμης 10mm, β) Σφάλμα 2% στην εισαγομένη διαφορά φάσης μεταξύ $330-1000\text{nm}$, γ) Μέσο μ.κ. σωστής λειτουργίας 580nm, δ) Υλικό κατασκευής γυαλί BK-7, ε) $L = 26.7\text{mm}$, $A = 10\text{mm}$, στ) Παράλληλη μετατόπιση 18.3mm.

Παράδειγμα

Να σχεδιαστεί αχρωματικός καθυστερητής $\lambda/4$ από Βοριοπυριτική στεφανύαλο (BK-7) (ρόμβος Fresnel) με μέσο δ.δ. $n = 1.51$.

- Μας είναι γνωστό (βλ. ΕΡΓΑΣΤ/ΚΗ ΟΠΤΙΚΗ [3]: Ε.Σ.Σ.Φ. (ΠΑΡ/ΜΑ 3, (§ δ))) ότι κατά την ολική εσωτερική ανάκλαση μιας δέσμης φωτός (στην ενδοεπιφάνεια από οπτικά πυκνότερο σε οπτικά αραιότερο υλικό), υφίσταται διαφορά φάσης $\Delta\phi = \Delta\phi_\pi - \Delta\phi_\sigma$ μεταξύ της παράλληλης και της κάθετης ως προς το επίπεδο πρόσπτωσης συνιστώσας της έντασης του ηλεκτρικού πεδίου. Η τελευταία δίνεται από τη σχέση:

$$\tan\frac{\Delta\phi}{2} \equiv \tan\left(\frac{\Delta\phi_\pi}{2} - \frac{\Delta\phi_\sigma}{2}\right) = \frac{\cos\theta\sqrt{n^2\sin^2\theta - 1}}{n\sin^2\theta} \qquad (1)$$

όταν η πρόσπτωση γίνεται από υλικό δ.δ. $n_i = n$ στον αέρα με $n_t = 1$ και $\theta_i = \theta$ η γωνία πρόσπτωσης. Πράγματι επειδή:

$$\tan\frac{\Delta\phi_\pi}{2} = \frac{n_i^2}{n_t^2}\gamma \qquad (2) \qquad\qquad \tan\frac{\Delta\phi_\sigma}{2} = \gamma \qquad (3)$$

και
$$\gamma = \frac{\left(n_i^2\sin^2\theta_i - n_t^2\right)^{1/2}}{n_i\cos\theta_i} \qquad (4)$$

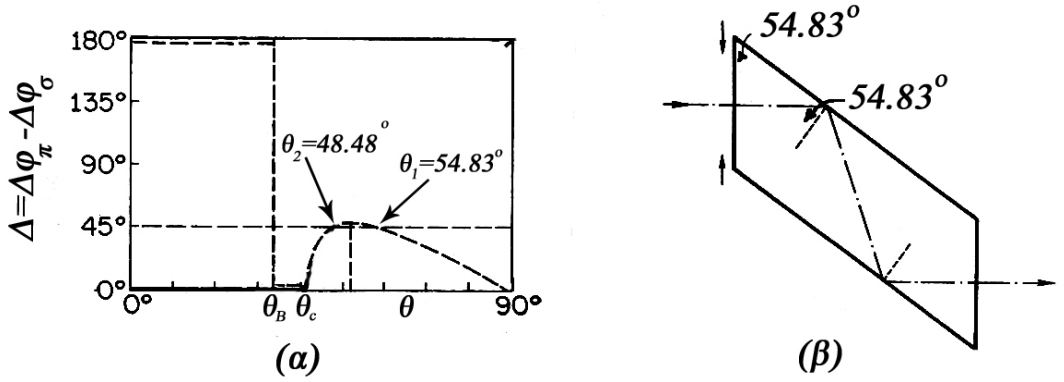
θα έχουμε: $\tan\frac{\Delta\phi_\pi}{2} = \frac{n\left(n^2\sin^2\theta - 1\right)^{1/2}}{\cos\theta}$ (5), $\tan\frac{\Delta\phi_\sigma}{2} = \frac{\left(n^2 - \sin^2\theta - 1\right)^{1/2}}{n\cos\theta}$ (6)

Τότε με τη βοήθεια της τριγωνομετρικής σχέσης: $\tan(a-b) = \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a\tan b}$:

$$\tan\frac{\Delta\phi}{2} \equiv \tan\left(\frac{\Delta\phi_\pi}{2} - \frac{\Delta\phi_\sigma}{2}\right) = \frac{\tan\frac{\Delta\phi_\pi}{2} - \tan\frac{\Delta\phi_\sigma}{2}}{1 + \tan\frac{\Delta\phi_\pi}{2}\tan\frac{\Delta\phi_\sigma}{2}} \qquad (7)$$

Αντικαθιστώντας τις (σχ. 5,6) στη (σχ. 7), μετά τις πράξεις βρίσκουμε ότι ισχύει η (σχ. 1).

Το επόμενο βήμα είναι να υπολογίσουμε τη γωνία πρόσπτωσης (και κατά προέκταση τη γωνία κοπής) του ρόμβου Fresnel (Σχ. 1β), έτσι ώστε κατά τις δύο ολικές εσωτερικές ανακλάσεις η συνολική διαφορά φάσης μεταξύ της π και της σ συνιστώσας του πεδίου να είναι ίση με $\pi/2\left(90^0\right)$(καθυστερητής $\lambda/4$). Το υλικό από το οποίο πρόκειται να κατασκευαστεί είναι το γυαλί BK-7 στην περιοχή της καμπύλης διασκεδασμού (βλ. ΕΡΓΑΣΤ/ΚΗ ΟΠΤΙΚΗ [5]: Π.Α.Α.Φ. (Σχ. 4.2.3(2)) και (Πιν. 4.2.3(1))) για την οποία ο δ.δ. είναι $n = 1.51$. Επομένως για μια εσωτερική ολική ανάκλαση θα πρέπει να είναι $\Delta\phi = 45^0\left(\Delta\phi/2 = 22.5^0\right)$ οπότε από τη (σχ. 1) για $n = 1.51$ θα έχουμε:



(Σχ. 1)

$$0.4142 = \frac{\cos\theta\sqrt{2.28\sin^2\theta - 1}}{1.51\sin^2\theta} \tag{8}$$

Μετά από την ύψωση στο τετράγωνο και την απλοποίηση της σχέσης παίρνουμε τελικά:

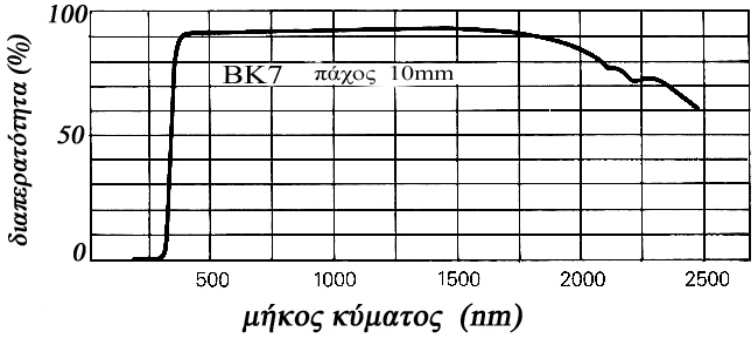
$$2.669\sin^4\theta - 3.28\sin^2\theta + 1 = 0 \tag{9}$$

η οποία είναι εξίσωση δευτέρου βαθμού ως προς $x = \sin^2\theta$. Οι λύσεις της τελικά μας δίνει:

$$x_1 = \sin^2\theta_1 = 0.66823 \text{ και } x_2 = \sin^2\theta_2 = 0.56068$$

και τελικά: $\theta_1 = 54.83^0$ και $\theta_2 = 48.48^0$

Στο (Σχ. 1α) φαίνεται η γραφική επίλυση του προβλήματος. Εκεί φαίνεται η $\Delta\phi(\theta) = \Delta\phi_\pi - \Delta\phi_\sigma$ για γωνίες πρόσπτωσης $\theta\left(0^0 - 90^0\right)$. Η τελευταία έχει τιμές: $\Delta\phi = 180^0\left(0^0 \le \theta \le \theta_B\right)$, $\Delta\phi = 0^0\left(\theta_B < \theta < \theta_C\right)$ και ακολουθεί το καμπύλο μέρος της συνάρτησης $\Delta\phi(\theta)$ για $\left(\theta_C < \theta < 90^0\right)$. Οι δύο τιμές θ_1, θ_2 είναι οι τετμημένες των σημείων της τομής της καμπύλης από την ευθεία την παράλληλη προς τον άξονα των θ με την τιμή $\Delta\phi = 45^0$.



(Σχ. 2)

Επιλέγουμε την τιμή $\theta = \theta_1 = 54.83^0$ επειδή μας δίνει μεγαλύτερο βαθμό αχρωματικότητας κατά τη διέλευση του φωτός από το εσωτερικό του ρόμβου. Ο τελευταίος μπορεί να χρησιμοποιηθεί σαν καθυστερητής σε ευρεία φασματική περιοχή όπως μπορούμε να δούμε από την καμπύλη διαπερατότητας του υλικού κατασκευής του που είναι το γυαλί BK-7 (Σχ. 2).

Ρόμβος Mooney

Φαίνεται στο (Σχ. 5.7.2.1β) και συνίσταται από δυο ορθά τριγωνικά πρίσματα των 60^0 που είναι συγκολλημένα στη μια τους πλευρά. Το υλικό κατασκευής των πρισμάτων είναι η πυκνή πυριτύαλος (dense flint glass). Το φως προσπίπτει κάθετα σε μια έδρα του ρόμβου και διαδιδόμενο στο εσωτερικό του υφίσταται δύο εσωτερικές ολικές ανακλάσεις με γωνία πρόσπτωσης $\theta = 60^0$, όπως υπολογίζονται για ένα συγκεκριμένο δ.δ. του υλικού και για μ.κ. λ στη μέση περιοχή του φάσματος, μεταξύ των ορίων του οποίου θα χρησιμοποιηθεί ο ρόμβος. Η προσπίπτουσα με την τελικά εξερχόμενη τέμνονται σε γωνία 60^0 όπως είναι εύκολο να διαπιστωθεί, γεγονός που καθιστά απαγορευτική τη χρησιμοποίησή τους σε διατάξεις που τα στοιχεία τους πρέπει να βρίσκονται πάνω σε ένα άξονα. Λόγω της κατασκευής του όμως έχει το μικρότερο λόγο L/A όπου L το συνολικό μήκος του και $A \times A$ το παράθυρο ει-

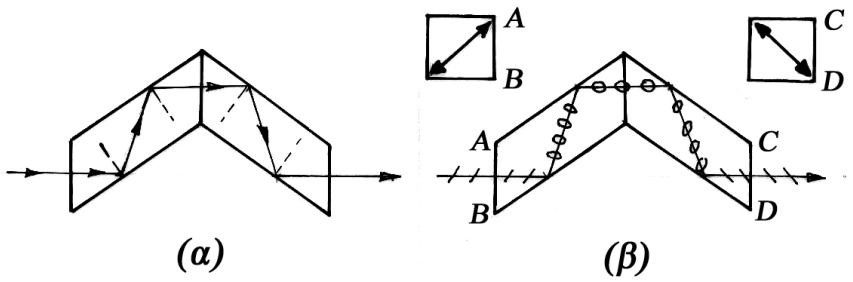
σόδου του. Τα σφάλματα της χρωματικότητάς του φαίνονται στο (Σχ. 5.7.2.3) καμπύλη (β) και είναι αρκετά μεγάλο λόγω της μεγάλης κλίσης της καμπύλης διασκεδασμού για τις πυκνές πυριτυάλους (βλ. ΕΡΓΑΣΤ/ΚΗ ΟΠΤΙΚΗ [5]: Π.Α.Α.Φ. (Σχ. 4.2.3(2)) καμπύλη (1) – πυριτύαλος με κωδικό LaSF9).

Ρόμβος AD-1

Φαίνεται στο (Σχ. 5.7.2.1γ) και συνίσταται από δυο ρόμβους τετηγμένου Χαλαζία (ομογενές και ισότροπο υλικό), συγκολλημένους σε σειρά. Στην προκειμένη περίπτωση για να προκύψει μεταβολή στη φάση μεταξύ των δύο ορθογωνίων συνιστωσών του προσπίπτοντος (κάθετα στην πρώτη του επιφάνεια) μετ. κύματος ίση με 90^0, θα πρέπει στο εσωτερικό του συστήματος να έχουμε τέσσερεις εσωτερικές ολικές ανακλάσεις. Για το συγκεκριμένο υλικό και για τιμή δ.δ. που αντιστοιχεί στη μέση φασματική περιοχή του ορατού, οι εσωτερικές γωνίες πρόσπτωσης είναι $\theta = 74.3^0$. Ο ρόμβος AD-1 έχει το πλεονέκτημα ότι η δέσμη εισόδου και εξόδου να βρίσκονται στην ίδια διεύθυνση. Όμως λόγω των τεσσάρων εσωτερικών ανακλάσεων έχει λόγο $L/A \simeq 17$ με συνέπεια να υπάρχουν κατασκευαστικές δυσκολίες που οφείλονται κυρίως στην ομοιογένεια των χρησιμοποιούμενων υλικών. Η αχρωματικότητά τους είναι αρκετά καλή όπως φαίνεται στο (Σχ. 5.7.2.3 - καμπύλη γ).

Ρομβοειδείς καθυστερητές λ/2

Από την κατηγορία των πρισματικών καθυστερητών $\lambda/2$ θα περιγράψουμε μόνο αυτόν που συντίθεται από δύο ρόμβους Fresnel σε σειρά (Σχ. 5.7.2.4α). Οι εν-



(Σχ. 5.7.2.4)

δοεπιφάνειές τους μπορεί να είναι επικολλημένες ή το μεταξύ τους διάκενο να είναι ο αέρας για εφαρμογές που οι ίσχυες των διερχομένων δεσμών είναι πολύ υψηλές. Όπως διαπιστώνουμε από τα προηγούμενα σχήματα, προκειμένου η συνολική μεταβολή στη διαφορά φάσης μεταξύ των δύο ορθογωνίων συνιστωσών διαταραχών

στην έξοδο του πρίσματος να είναι $\Delta\phi = 180^0$, θα πρέπει (με βάση τα στοιχεία που χρησιμοποιήσαμε για τον ένα ρόμβο Fresnel), να έχουμε τέσσερεις εσωτερικές ολκές ανακλάσεις.

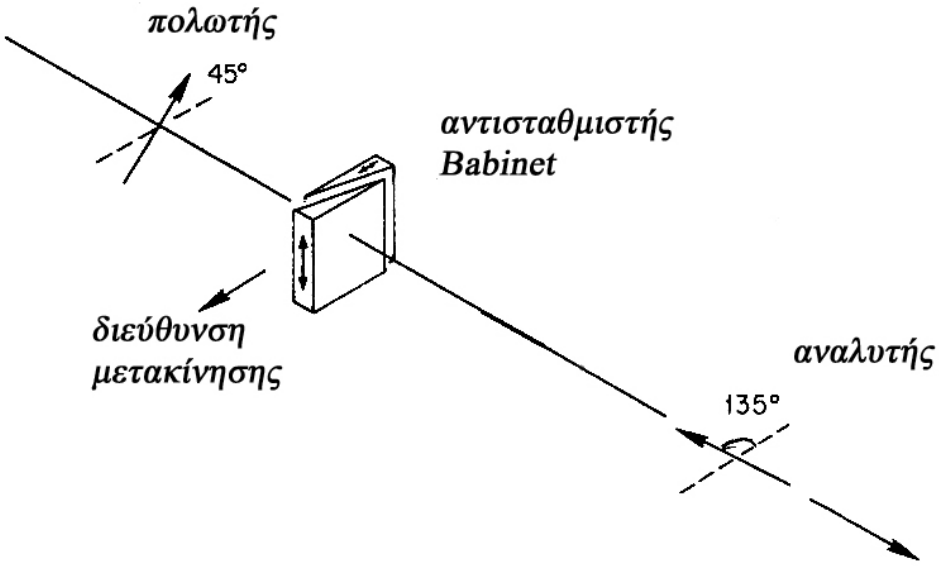
Θεωρούμε την περίπτωση που έχουμε πρόσπτωση γραμμικά πολωμένου φωτός με αζιμούθιο $\phi = 45^0$ ως προς τους άξονες x, y που είναι παράλληλοι με το τετράγωνικο άνοιγμα της εισόδου του συστήματος. Όπως περιγράψαμε προηγουμένως, μετά την πρώτη εσωτερική ανάκλαση (Σχ. 5.7.2.4β) θα έχουμε ελλειπτικά πολωμένο φως και μετά τη δεύτερη κυκλικά πολωμένο. Η τρίτη τώρα ανάκλαση μετατρέπει το κυκλικό σε ελλειπτικό και ή τέταρτη (με συνολική τελικά διαφορά φάσης μεταξύ των δύο συνιστωσών $\Delta\phi = 180^0$) σε γραμμικά πολωμένο με αζιμούθιο όμως $\phi = -45^0$. Με τον ίδιο τρόπο, για πρόσπτωση στην είσοδο του πρίσματος Γ.Π.Φ. με αζιμούθιο ϕ, στην έξοδο θα πάρουμε και πάλι Γ.Π.Φ. αλλά σε αζιμούθιο $-\phi$. Ένα τέτοιο σύστημα π.χ. με δυνατότητα περιστροφής κατά 360^0 περί την διεύθυνση πρόσπτωσης μιας δέσμης Γ.Π.Φ. , χρησιμοποιείται για να στρέφει το αζιμούθιό του ανάλογα με την επιλογή μας. Το τελευταίο αποτελεί εξάρτημα εξόδου των Lasers ισχύος που παράγουν Γ.Π.Φ..

Μεταβαλλόμενοι καθυστερητές (αντισταθμιστές).

Τέτοιου είδους συστήματα χρησιμοποιούνται γενικότερα για να μεταβάλλουν την κατάσταση πόλωσης μιας δέσμης φωτός. Επίσης με τη βοήθειά τους μπορούμε να μετρήσουμε τη διπλοθλαστικότητα ενός κρυσταλλικού πλακιδίου, όπως και τα στοιχεία που αφορούν την κατάσταση πόλωσης μιας δέσμης φωτός. Δηλ. την διαφορά φάσης μεταξύ των δύο συνιστωσών της, την ελλειπτικότητά της (τον λόγο b/a των αξόνων της) καθώς και το αζιμούθιο του μεγάλου της άξονα. Χρησιμοποιούνται επίσης στην φωτοελαστική ανάλυση (βλ. § 8.2), όπως και για την ανάδειξη της διπλοθλαστικότητας εξαιτίας της ροής διαφανών ρευστών. Κοινοί τύποι αντισταθμιστών είναι αυτοί των Babinet και Soleil. Κύριο χαρακτηριστικό τους είναι ότι: Το συνολικό πάχος του διπλοθλαστικού υλικού από το οποίο συντίθενται – κατά μήκος της διαδιδόμενης σ'αυτό δέσμης φωτός – μπορεί να μεταβληθεί. Σαν μεταβαλλόμενοι καθυστερητές (κρυσταλλικοί), είναι δυνατόν να χρησιμοποιηθούν οι ***ηλεκτροοπτικοί (electro-optic)*** (βλ. §8.3) και οι ***πιεζοηλεκτρικοί (piezo-optic)*** διαμορφωτές. Για τους προαναφερόμενους η διπλοθλαστικότητά τους είναι δυνατόν ν' αλλάξει, μεταβάλλοντας το εφαρμοζόμενο σ' αυτούς ηλεκτρικό πεδίο ή τη μηχανική τάση.

Αντισταθμιστής Babinet

Προτάθηκε από τον Babinet το 1837 και τροποποιήθηκε από τον Jamin. Φαίνεται σχηματικά στη διάταξη του (Σχ. 5.7.2.5). Συνίσταται από δύο τριγωνικές σφήνες από κρυσταλλικό Χαλαζία με διαθλαστικές γωνίες της τάξης των $30'$. Οι οπτικοί τους άξονες είναι πάνω στο επίπεδο της αντίστοιχης σφήνας. Για την πρώτη σφήνα που είναι ακίνητη ο οπτικός της άξονας είναι κάθετος στην ακμή της. Επίσης στην πρώτη της επιφάνεια και κατακόρυφα στο κέντρο του πεδίου της υπάρχει μία εγχάρακτη γραμμή, η οποία χρησιμοποιείται σαν γραμμή αναφοράς κατά τις πειραματικές διεργασίες που θα αναπτύξουμε στα επόμενα. Η δεύτερη κατά σειρά σφήνα έχει τη δυνατότητα να μετακινηθεί (σε επαφή πάντα με την πρώτη στη διεύ-



(Σχ .5.7.2.5)

θυνση που φαίνεται στο σχήμα) και ο οπτικός της άξονας είναι παράλληλος με την ακμή της. Επομένως οι Ο.Α. μεταξύ τους σχηματίζουν γωνία 90^0. Η κίνηση της δεύτερης σφήνας γίνεται με τη βοήθεια ενός μικρομετρικού κοχλία έτσι ώστε το συνολικό πάχος που διανύετε από το φως όταν το τελευταίο περνάει από τον αντισταθμιστή να είναι το ίδιο σ' όλο το εύρος του.

Διατρέχοντας την πρώτη σφήνα η έκτακτη διαταραχή (που δονείται παράλληλα με τον Ο.Α.), καθυστερεί σε σχέση με την τακτική δεδομένου ότι ο κρύσταλλος του Χαλαζία είναι θετικός. Όταν όμως η διαταραχή περάσει στη δεύτερη σφήνα, λόγω του προσανατολισμού του οπτικού της άξονα αλλάζει ρόλο με συνέπεια η έκτακτη να καθίσταται τακτική και αντίστροφα. Το γεγονός αυτό θα έχει σαν συνέπεια η συνολική καθυστέρηση μεταξύ των δύο συνιστωσών προσπίπτοντος φωτός

σ' ένα σημείο του συστήματος, να είναι ανάλογη της διαφοράς πάχους των σφηνών στο σημείο αυτό. Δηλ.

$$N\lambda = (d_1 - d_2)(n_e - n_o) \qquad (5.7.2.2)$$

όπου N: ακέραιος ή κλασματικός αριθμός, λ: το μ.κ. , d_1, d_2: τα διανυόμενα από την διαταραχή πάχη στην πρώτη και την δεύτερη σφήνα και n_e, n_o: οι κύριοι δ.δ. του Χαλαζία για ένα ορισμένο μήκος κύματος.

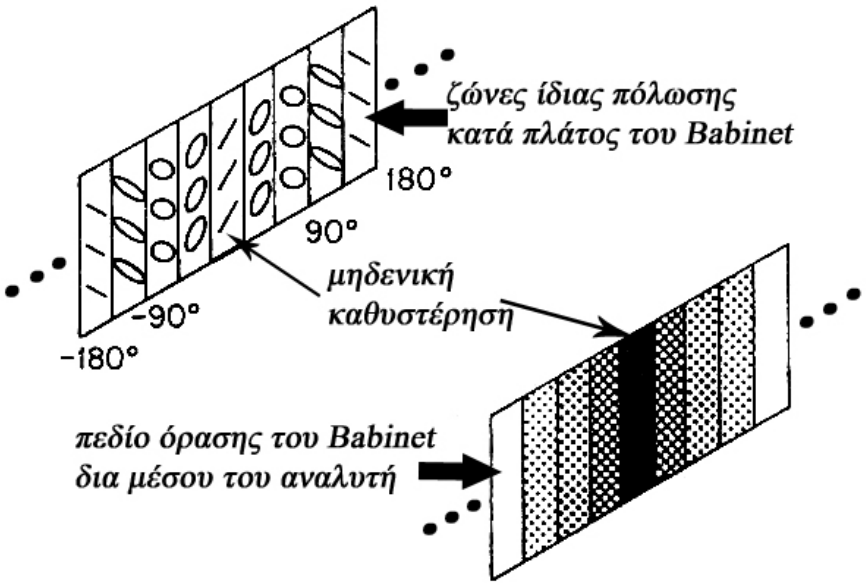
Θεωρούμε τώρα ότι στον αντισταθμιστή προσπίπτει ένα επίπεδο μονοχρωματικό μετ. κύματος γραμμικά πολωμένο στις 45^0 σε σχέση με τους οπτικούς του άξονες όπως φαίνεται στο (Σχ. 5.7.2.5). Εάν οι σφήνες του βρίσκονται σε μια συγκεκριμένη θέση, τότε σε όλο το εύρος του (το ενεργό 'παράθυρό' του), θα κατανέμονται 'κατακόρυφες ζώνες' που η κάθε μια τους θα διακρίνεται από μια κατάσταση πόλωσης όπως αυτό σχεδιαγραφείται στο αριστερό και πάνω μέρος του (Σχ. 5.7.2.6). Οι ζώνες αυτές (με την διαφορετική κατάσταση πόλωσης) είναι δυνατόν ν' αποκαλυφθούν οπτικά (δηλ. να τις δούμε με το μάτι μας) με τον εξής τρόπο. Μετά τον αντισταθμιστή τοποθετούμε έναν αναλυτή με τον άξονα διέλευσης του σε αζιμούθιο 135^0 (Σχ. 5.7.2.5). Δηλ. πολωτής και αναλυτής βρίσκονται σε θέση κατάσβεσης. Τότε αν παρατηρήσουμε δια μέσου του αναλυτή τον αντισταθμιστή, θα δούμε στο οπτικό πεδίο κατακόρυφες ζώνες διαφορετικής φωτοαντίθεσης, από μέγιστη φωτεινότητα έως μηδενική. Μια τέτοια 'περιοδικότητα' (μέγιστο – μηδενικό ελάχιστο – μέγιστο) μπορούμε να δούμε στο κάτω και δεξιά μέρος του (Σχ. 5.7.2.6).

Στην πραγματικότητα το πεδίο του καθυστερητή, θα καλύπτεται από πολλές τέτοιες περιόδους και όχι μόνον από μια. Είναι δυνατόν τώρα περιστρέφοντας μικρομετρικά τον κοχλία του αντισταθμιστή, να μετακινήσουμε τη δεύτερη σφήνα με τέτοιο τρόπο έτσι ώστε να έχουμε μηδενική καθυστέρηση (σκοτεινή ζώνη) πάνω στην εγχάρακτη κατακόρυφη γραμμή της πρώτης σφήνας. Το τελευταίο σημαίνει ότι το φως που βγαίνει από την περιοχή αυτή, είναι γραμμικά πολωμένο στην ίδια διεύθυνση με το προσπίπτον (αζιμούθιο 45^0), με συνέπεια να κατασβένυται από τον αναλύτη (αζιμούθιο 135^0).

Εάν φωτίσουμε τη διάταξη με λευκό φως, τότε μπορούμε να πετύχουμε μόνο ένα μηδενικό ελάχιστο ($d_1 = d_2$). Πράγματι σε μια οποιαδήποτε άλλη διπλανή θέση (ένθεν και ένθεν της σκοτεινής ζώνης) που αντιστοιχεί σε ακέραια περίοδο για ένα π.χ. μ.κ. λ (και θα έπρεπε ν' αντιστοιχεί σε σκοτεινή ζώνη) δεν μπορεί να συμβεί. Όντως επειδή στη θέση αυτή, δεν είναι δυνατόν ν' αντιστοιχούν σκοτεινές ζώνες για τα υπόλοιπα μήκη κύματος του φάσματος. Επομένως οι περιοχές αυτές θα εμφανί-

ζονται έγχρωμες για όλο το πεδίο του αντισταθμιστή. Γενικά η μετακίνηση της δεύτερης σφήνας με τη βοήθεια του κοχλία, επιφέρει μετακίνηση του όλου φάσματος των ζωνών λόγω των αλλαγών των καταστάσεων πόλωσης εξ' αιτίας των διαφορετικών εισερχομένων καθυστερήσεων φάσεως.

Προκειμένου να διαπιστώσουμε ότι ο καθυστερητής λειτουργεί σωστά σ' όλο το εύρος της επιφάνειάς του, αρκεί να τον περιστρέψουμε περί τον άξονα της διάταξης μέχρις ότου οι Ο.Α. των σφηνών του ταυτιστούν με τους άξονες διέλευσης πολωτή και αναλυτή. Τότε θα πρέπει να υφίσταται κατάσβεση σ' όλο το εύρος του. Πράγματι γι' αυτή τη διάταξη των στοιχείων το φως που εξέρχεται από την δεύτερη

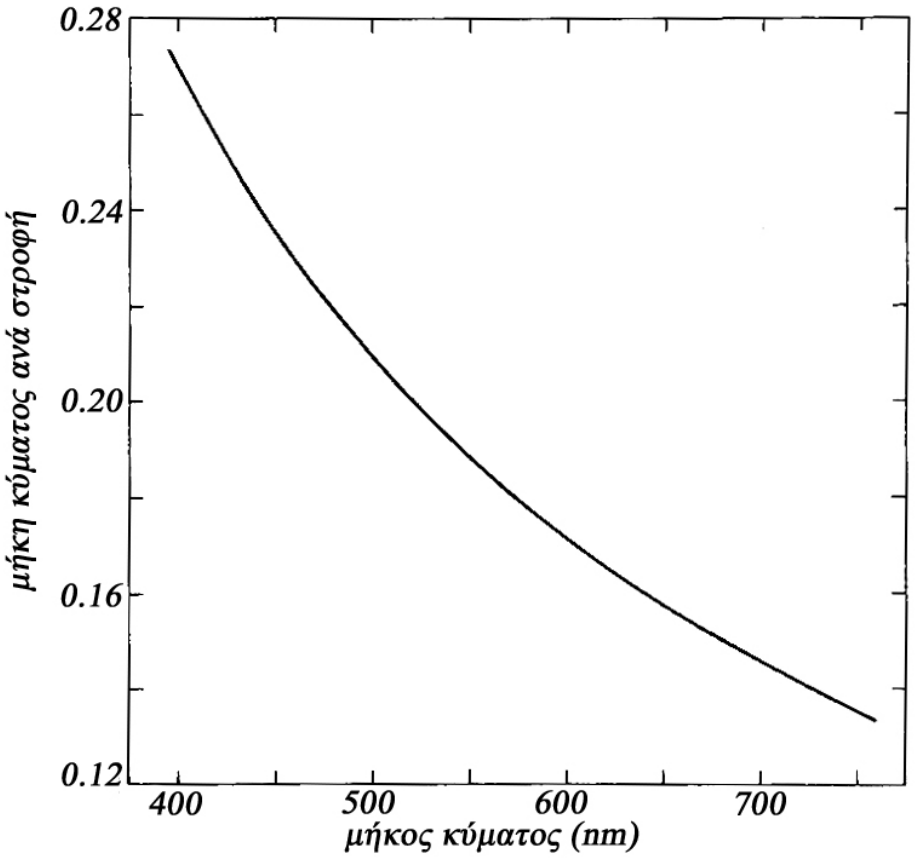


(Σχ. 5.7.2.6)

σφήνα θα είναι γραμμικά πολωμένο κάθετα στον οπτικό της άξονα. Επομένως θα κατασβήνεται από τον αναλυτή. Σε διαφορετική περίπτωση θα υφίσταται θέμα καλής επαφής των σφηνών ή ορθογωνιότητας των Ο.Α. των σφηνών.

Ένας αντισταθμιστής τέλος θα πρέπει να λειτουργεί για κάθε μ.κ. δηλ. για ένα ευρύ φάσμα ακτινοβολιών. Που σημαίνει ότι θα πρέπει να είναι γνωστό για οποιοδήποτε μ.κ. πόση ακριβώς περιστροφή του κοχλία απαιτείται προκειμένου η συνολική διαφορά δρόμου (ή φάσης) μεταξύ των δύο συνιστωσών στην έξοδο του αντισταθμιστή να είναι ίση με λ (ή 2π). Η διαδικασία αυτή είναι δυνατόν να επιτευχθεί πειραματικά ως εξής. Για φως ενός ορισμένου μ.κ. περιστρέφουμε τον κοχλία έτσι ώστε μια ζώνη μηδενικού ελάχιστου να συμπέσει με την κατακόρυφη εγχάρακτη γραμμή στο κέντρο του πεδίου της πρώτης σφήνας. Σημειώνουμε στο τύμπανο του κοχλία αυτή την ένδειξη και τον περιστρέφουμε μέχρις ότου η γραμμή καταληφθεί από την αμέσως επόμενη ζώνη μηδενικού ελάχιστου. Τότε η διαφορά

των ενδείξεων του τυμπάνου του κοχλία περιστροφής μας δίνει το πόσο θα πρέπει να τον περιστρέψουμε, για να πετύχουμε διαφορά δρόμου λ (ή φάσης 2π) για τις δύο ορθογώνιες συνιστώσες του προσπίπτοντος γραμμικά πολωμένου φωτός. Στο (Σχ. 5.7.2.7) δίνεται για ένα συγκεκριμένο αντισταθμιστή Babinet το διάγραμμα ρύθμισής του για τα διάφορα μ.κ. στην ορατή περιοχή του Η/Μ φάσματος. Π.χ. για ακτινοβολία, $\lambda = 500\text{nm}$ προκειμένου να εισάγουμε μεταξύ των δύο συνιστωσών του προσπίπτοντος φωτός διαφορά φάσης ίση με 2π θα πρέπει να εκτελέσουμε περίπου 5 πλήρεις περιστροφές του τυμπάνου του κοχλία ($5\text{στρ.} \times 0.20\lambda/\text{στρ.} = \lambda$).



(Σχ. 5.7.2.7)

Χρήση του αντισταθμιστή Babinet

α) Μέτρηση της καθυστέρησης που εισάγει ένα πλακίδιο, του οποίου είναι γνωστός ο προσανατολισμός του ταχύ ή του βραδύ του άξονα

Προσανατολίζουμε πολωτή, αντισταθμιστή και αναλυτή με τον τρόπο που φαίνεται στο (Σχ. 5.7.2.5). Αφήνουμε στον πολωτή να προσπέσει λευκό φως και με την βοήθεια του κοχλία του αντισταθμιστή, ρυθμίζουμε ούτως ώστε η (μηδενικού ελαχίστου) ζώνη μηδενικής καθυστέρησης να ταυτιστεί με την εγχάρακτη γραμμή στο κέντρο του πεδίου του οργάνου. Φωτίζουμε κατόπιν τον πολωτή με φως επιθυμητού μ.κ. και παρεμβάλλουμε μετά τον αντισταθμιστή το προς μέτρηση πλακίδιο με τους άξονές του ταχύ-βραδύ παράλληλους με αυτούς των Ο.Α. των σφηνών.

Τότε παρατηρώντας μέσω του αναλυτή βλέπουμε ότι η ζώνη μηδενικής καθυστέρησης μετακινήθηκε κατά μια ορισμένη απόσταση από τη θέση της κατακόρυφης γραμμής την οποία κατείχε, με διεύθυνση προς τα αριστερά της ή δεξιά. Το γεγονός αυτό βέβαια θα οφείλεται στην επί πλέον καθυστέρηση φάσης που επιβάλει το πλακίδιο μεταξύ των δύο συνιστωσών της ακτινοβολίας. Σε δεύτερη φάση περιστρέφοντας τον κοχλία, επαναφέρουμε τη ζώνη μηδενικής καθυστέρησης στην αρχική της θέση, ταυτίζοντάς την με την εγχάρακτη γραμμή μετρώντας τον αριθμό N' των περιστροφών που μεσολαβούν γι' αυτή τη διαδικασία. Ο αριθμός αυτός βέβαια δεν είναι τις περισσότερες φορές ακέραιος. Όμως κατά τα γνωστά, για το συγκεκριμένο μ.κ. απαιτούνται N περιστροφές του κοχλία για επιβολή καθυστέρησης φάσης ίσης με 2π (βλ. (Σχ. 5.7.2.7)) μεταξύ των δύο συνιστωσών. Επομένως η διαφορά φάσης που επιβάλει το προς μέτρηση πλακίδιο θα δίνεται από τη σχέση: $\Delta\phi = 2\pi\left(N'/N\right)$. Όσον αφορά τέλος τον προσδιορισμό του πρόσημου της διπλοθλαστικότητας (αρνητικός ή θετικός κρύσταλλος), μπορεί να καθοριστεί από τη φορά περιστροφής του κοχλία, κατά τη διαδικασία επαναφοράς της ζώνης μηδενικής καθυστέρησης στην αρχική της θέση.

β) Προσδιορισμός παραμέτρων ελλειπτικά πολωμένου φωτός

Κατ' αρχή και πάλι αφήνουμε στον πολωτή να προσπέσει λευκό φως και με την βοήθεια του κοχλία του αντισταθμιστή, ρυθμίζουμε ούτως ώστε η (μηδενικού ελαχίστου) ζώνη μηδενικής καθυστέρησης να ταυτιστεί με την εγχάρακτη γραμμή στο κέντρο του πεδίου του οργάνου. Κατόπιν φωτίζουμε τη διάταξη με ένα επίπεδο μετ. κύματος ελλειπτικά πολωμένου φωτός ορισμένου μ.κ. Τότε παρατηρώντας δια μέσου του αναλυτή, βλέπουμε ότι η ζώνη μηδενικής καθυστέρησης, έχει μετατοπιστεί από τη θέση της εγχάρακτης γραμμής που βρίσκεται κατά τα γνωστά στο κέντρο του πεδίου του οργάνου. Πράγματι λόγω της διαφοράς φάσης μεταξύ των δύο συνιστωσών του ελλειπτικά πολωμένου φωτός η μηδενική αντιστάθμιση μέσω του αντισταθμιστή επιτυγχάνεται σε διαφορετική θέση.

1) *Προσδιορισμός της διαφοράς φάσης μεταξύ των δύο συνιστωσών του ελλειπτικά πολωμένου φωτός*

Περιστρέφοντας τον κοχλία, επαναφέρουμε τη ζώνη μηδενικής καθυστέρησης στην αρχική της θέση, ταυτίζοντάς την με την εγχάρακτη γραμμή μετρώντας τον αριθμό N' των περιστροφών που μεσολαβούν γι' αυτή τη διαδικασία. Οι ενδείξεις βέβαια συνήθως είναι δεκαδικοί αριθμοί. Όμως κατά τα γνωστά, για το συγκεκριμένο μ.κ. απαιτούνται N περιστροφές του κοχλία για επιβολή καθυστέρησης φάσης ίσης με 2π (βλ. (Σχ. 5.7.2.7)) μεταξύ των δύο συνιστωσών. Επομένως η διαφορά φάσης $\phi = \phi_y - \phi_x$ μεταξύ των δύο συνιστωσών θα δίνεται από τη σχέση: $\phi = 2\pi\left(N'/N\right)$.

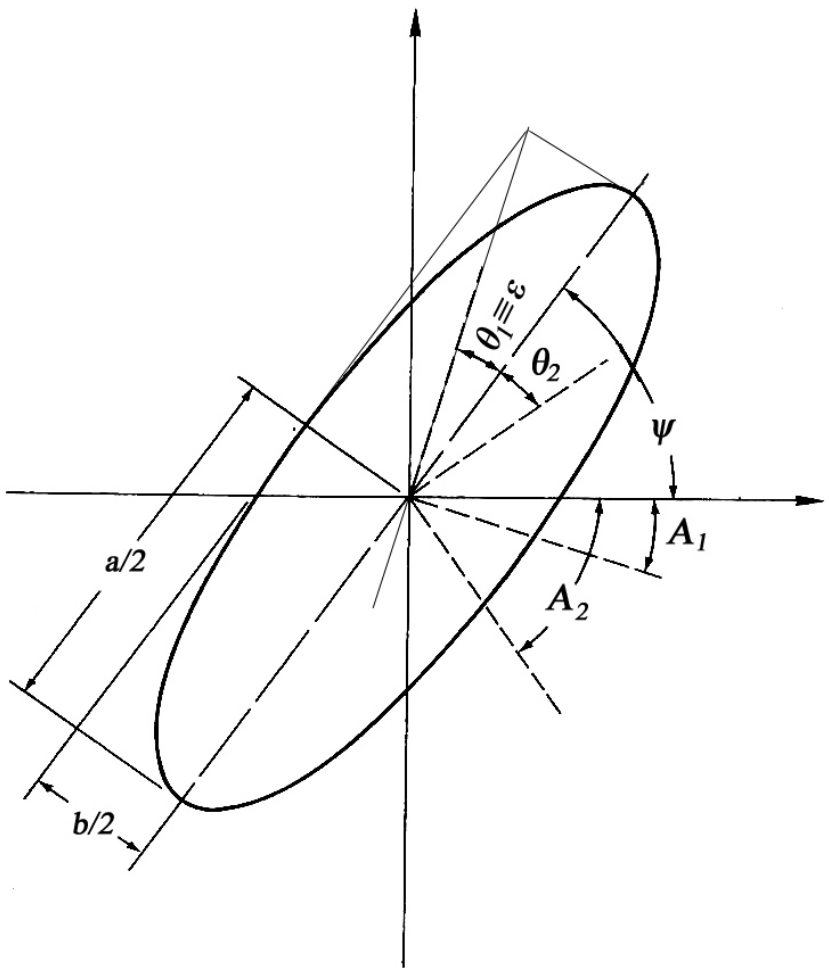
2) *Προσδιορισμός της διεύθυνσης των αξόνων της έλλειψης (αζιμούθιο ψ του μεγάλου άξονα της έλλειψης)*

Φωτίζουμε τη διάταξη του (Σχ. 5.7.2.5) κατ' αρχήν με γραμμικά πολωμένο φως του ιδίου μ.κ. όπως και το προς μελέτη ελλειπτικά πολωμένο φως (με αζιμούθιο πολωτή/αναλυτή, 45º/135º). Κατόπιν με τη βοήθεια του κοχλία του αντισταθμιστή φέρουμε την μηδενική ζώνη καθυστέρησης (την πλησιέστερη) να ταυτιστεί με την εγχάρακτη γραμμή στο κέντρο του πεδίου. Αμέσως μετά με τη βοήθεια και πάλι του κοχλία μετακινούμε τη ζώνη κατά $N/4$ όπου N ο αριθμός των περιστροφών για επιβολή διαφοράς φάσης μεταξύ των δύο συνιστωσών κατά 2π. Το γεγονός αυτό σημαίνει ότι η ζώνη που αντιστοιχεί στο κέντρο της εγχάρακτης γραμμής θ' αποτελεί τώρα πλακίδιο $\lambda/4$ (δηλ. ο αντισταθμιστής σ' αυτήν την περιοχή συμπεριφέρεται σαν πλακίδιο $\lambda/4$). Αντικαθιστούμε κατόπιν το προσπίπτον γραμμικά πολωμένο φως με το προς εξέταση ελλειπτικά πολωμένο. Τότε παρατηρώντας μέσω του αναλυτή τον αντισταθμιστή και περιστρέφοντάς τους (ανεξάρτητα) περί άξονα που ορίζει η διεύθυνση διάδοσης του φωτός, μετακινούμε (μ' αυτόν τον τρόπο) τη ζώνη μηδενικής καθυστέρησης έως ότου ταυτιστεί με την εγχάρακτη γραμμή στο κέντρο του πεδίου. Τότε από τη ζώνη αυτή διέρχεται γραμμικά πολωμένο φως, το οποίο κατασβένει ο αναλυτής. Αυτό σημαίνει (βλ. ΠΕΙΡΑΜΑ 5 φάση Γ΄) ότι η διεύθυνση (που έχει λάβει μετά την περιστροφή του) ο ταχύς άξονας του αντισταθμιστή (κατακόρυφος αρχικά σε σχέση με τη διάταξη), είναι παράλληλη με τη διεύθυνση του μεγάλου άξονα της έλλειψης του προσπίπτοντος ελλειπτικά πολωμένου φωτός. Πράγματι μόνο όταν ένα πλακίδιο $\lambda/4$ παρεμβληθεί σε Ε.Π.Φ. με τον ταχύ του άξονα στη διεύθυνση του μεγάλου άξονα της έλλειψης, τότε θα προκύψει Γ.Π.Φ. σ' ένα ορισμένο

αζιμούθιο ως προς τους άξονες της διάταξης. Οι διευθύνσεις λοιπόν ταχύ – βραδύ άξονα του αντισταθμιστή σ' αυτές τις συνθήκες (μετά την περιστροφή του), καθορίζει και τις διευθύνσεις μεγάλου και μικρού άξονα της έλλειψης του προσπίπτοντος ελλειπτικά πολωμένου φωτός.

3) Προσδιορισμός του λόγου b/a (ελλειπτικότητας) του ελλειπτικά πολωμένου φωτός

Στην πραγματικότητα υπάρχουν τέσσερεις σχετικές θέσεις μεταξύ αντισταθμιστή (εδώ σε χρήση πλακιδίου $\lambda/4$) και αναλυτή για τις οποίες μπορούμε να ταυτίσουμε τη ζώνη μηδενικής καθυστέρησης με την εγχάρακτη γραμμή στο κέντρο του πεδίου. Οι τελευταίες προκύπτουν από τις διευθετήσεις ταχύ και βραδύ άξονα



(Σχ. 5.7.2.8)

του αντισταθμιστή με τον μεγάλο ή τον μικρό άξονα αντίστοιχα της έλλειψης. Π.χ. ας υποθέσουμε ότι στο (Σχ. 5.7.2.8) παράλληλα με τον μεγάλο άξονα της έλλειψης

διευθετούνται εναλλάξ παράλληλα ο ταχύς και ο βραδύς άξονας του αντισταθμιστή. Τότε θα προκύψει Γ.Π.Φ. σε γωνίες $\theta_1 = \theta_2 = \varepsilon$ αντίστοιχα με γωνίες κατάσβεσης του αναλυτή A_1 , A_2. Από το ίδιο όμως το σχήμα βλέπουμε ότι $A_2 - A_1 = 2\varepsilon$. Και επειδή από τη θεωρία είναι γνωστό ότι $\tan\varepsilon = b/a$ τότε μπορούμε να προσδιορίσουμε το λόγο b/a δηλ. την ελλειπτικότητα του προσπίπτοντος ελλειπτικά πολωμένου φωτός.

6 *Πόλωση του φωτός μέσω ανάκλασης και διάθλασης. Διχρωϊσμός. Πόλωση από σκέδαση του φωτός*

6.1 *Πόλωση του φωτός μέσω ανάκλασης και διάθλασης σε διηλεκτρικά υλικά. Νόμος του Brewster*

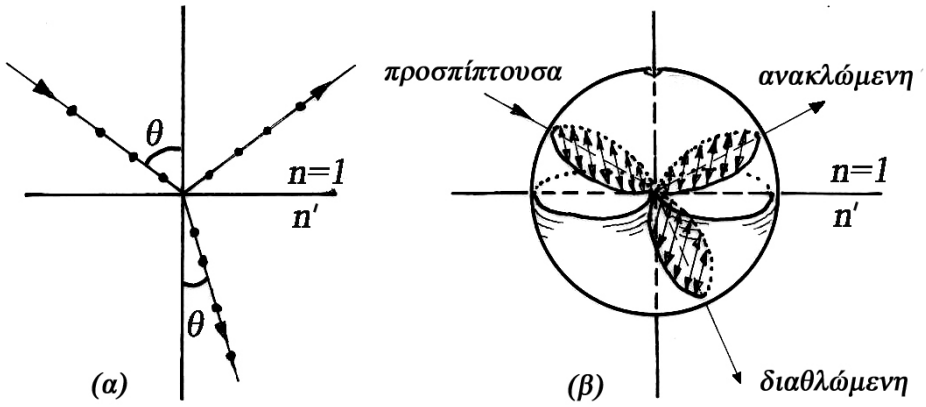
Στην (§ 2.2) περιγράψαμε συνοπτικά με τη βοήθεια του ηλεκτρικού διπόλου και του μοντέλου του γραμμικού ταλαντωτή του Lorentz, τον τρόπο με τον οποίο διαδίδονται τα Η/Μ κύματα στο κενό και την ύλη σε ομογενή, ισότροπα και ανισότροπα υλικά. Τα υλικά αυτά (όπως π.χ. ο αέρας, το νερό, τα διάφορα είδη γυαλιών και οι κρύσταλλοι τους οποίους αναφέραμε), ανήκουν στην κατηγορία των ***διηλεκτρικών(dielectrics)***.Τα διηλεκτρικά (ή μονωτές), είναι υλικά τα οποία δεν είναι ικανά να άγουν το ηλεκτρικό ρεύμα. Βέβαια στη φύση δεν υπάρχουν ιδανικοί μονωτές. Όλα γενικά τα υλικά διαθέτουν μια ορισμένη αγωγιμότητα. Για την περίπτωση όμως των διηλεκτρικών, η αγωγιμότητά τους είναι 15 έως 20 τάξεις μεγέθους μικρότερη από ότι αυτή των ***αγωγών(contactors)*** (όπως π.χ. είναι ο Χαλκός, ο Άργυρος ο Χρυσός κ.τ.λ.).

Σ' αυτά που ακολουθούν και αφορούν την πόλωση από ανάκλαση και διάθλαση στα διηλεκτρικά, θα χρησιμοποιήσουμε ξανά το μοντέλο των ταλαντούμενων ηλεκτρικών διπόλων με τα οποία παριστάνουμε τα μόρια του διηλεκτρικού. Με τη βοήθειά του θα προκύψουν συμπεράσματα (έστω ποιοτικά) γι' αυτά τα φαινόμενα. Ποσοτικά συμπεράσματα προέρχονται από τη χρησιμοποίηση των ***εξισώσεων Fresnel*** (βλ. ΕΡΓΑΣΤ/ΚΗ ΟΠΤΙΚΗ [3]: Ε.Σ.Σ.Φ. (ΠΑΡ/ΜΑ 3)) Οι προαναφερόμενες εξισώσεις προκύπτουν από την εφαρμογή της Η/Μ θεωρίας για τις περιπτώσεις που τα κύματα ανακλώνται ή διαθλώνται μεταξύ των ενδοεπιφανειών διαφορετικών διηλεκτρικών.

Στη γενική περίπτωση όπου φυσικό φως προσπίπτει σε επιφάνεια διηλεκτρικού, η ανακλώμενη θα είναι μερικά γραμμικά πολωμένη. Το ίδιο θα συμβεί και για τη διαθλώμενη μέσα στο υλικό δέσμη. Με κατάλληλες συνθήκες είναι δυνατόν – όπως θα δούμε – η ανακλώμενη και η διαθλώμενη να καταστούν γραμμικά πολωμένες. Τα οπτικά στοιχεία που χρησιμοποιούσαν αυτές τις τεχνικές, αποτελούσαν τους γραμμικούς πολωτές μέχρις την ανακάλυψη των πολωτών Polaroid, οι οποίοι και τα αντικατέστησαν.

Θεωρούμε αρχικά ότι γραμμικά πολωμένο φως πέφτει με γωνία πρόσπτωσης θ πάνω σε επίπεδη επιφάνεια γυαλιού (Σχ. 6.1.1α). Θεωρούμε επίσης ότι το επίπεδο ταλάντωσης της έντασης του ηλεκτ. πεδίου **E** είναι κάθετο στο επίπεδο πρόσπτωσης. Τότε το ταλαντούμενο πεδίο θ' αναγκάζει τα εξωτερικά ηλεκτρόνια των

ατόμων των μορίων που βρίσκονται στην επιφάνεια του γυαλιού να ταλαντεύονται κάθετα προς το επίπεδο πρόσπτωσης. Θα εκπέμπεται επομένως ακτινοβολία σύμφωνα με το μοντέλο εκπομπής που μελετήσαμε στην ((§ 2.1) (Σχ. 2.1.6,7)). Το μοντέλο έχει τη μορφή τοροειδούς (Σχ. 6.1.1β), του οποίου ο άξονας είναι κάθετος στο επίπεδο πρόσπτωσης. Βλέπουμε κατ' αρχή ότι η εκπομπή των διπόλων είναι μηδενική κατά τη διεύθυνση ταλάντωσής τους δηλ. κάθετα προς το επίπεδο πρόσπτωσης. Πάνω όμως στο επίπεδο πρόσπτωσης και συγκεκριμένα στις διευθύνσεις της ανακλώμενης και της διαθλώμενης η τιμή του πεδίου είναι σημαντική. (Στο (Σχ. 6.1.1β) φαίνεται η εκπομπή ενός μόνο διπόλου). Επίσης βλέπουμε ότι οι διαταραχές στις διευθύνσεις αυτές είναι γραμμικά πολωμένες.



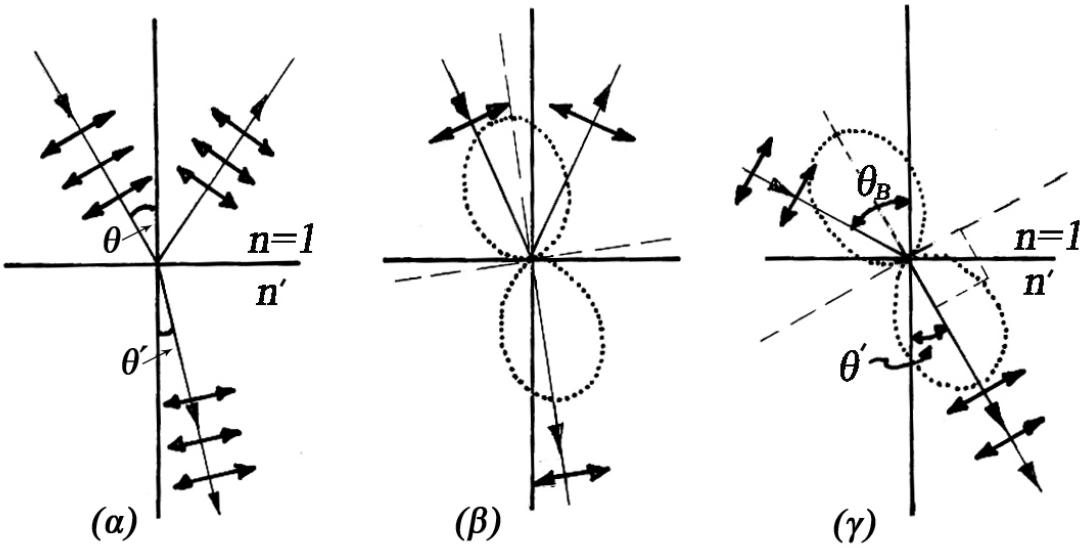
(Σχ. 6.1.1)

Εξετάζουμε κατόπιν την περίπτωση που η προσπίπτουσα δέσμη είναι γραμμικά πολωμένη παράλληλα με το επίπεδο πρόσπτωσης (Σχ. 6.1.2α). Με τον ίδιο ακριβώς τρόπο όπως προηγουμένως, τα εξωτερικά ηλεκτρόνια των μορίων οδηγούνται σε ταλάντωση από το ηλεκτρ. πεδίο **E** τη στιγμή ακριβώς που η δέσμη αρχίζει να διαθλάται. Στο (Σχ. 6.1.2β) βλέπουμε σε τομή (πάνω στο επίπεδο πρόσπτωσης), τους λοβούς του τοροειδούς της εκπεμπόμενης από το δίπολο ακτινοβολίας. Η ανακλώμενη στη συγκεκριμένη περίπτωση έχει σαφώς μικρότερη ένταση από ότι η διαθλώμενη. Επίσης με τη βοήθεια του (Σχ. 2.1.6) διαπιστώνουμε ότι είναι γραμμικά πολωμένες παράλληλα με το επίπεδο πρόσπτωσης.

Νόμος του Brewster

Μια χαρακτηριστική διεύθυνση πρόσπτωσης – για την περίπτωση που εξετάσαμε προηγουμένως – είναι εκείνη όπου ανακλώμενη και διαθλώμενη σχηματίζουν γωνία 90^0. Τότε η διεύθυνση ταλάντωσης των διπόλων (Σχ. 6.1.2γ) συμπίπτει με αυτήν της ανακλώμενης. Το τελευταίο θα έχει σαν αποτέλεσμα, στη διεύ-

θυνση αυτή, η ένταση της ακτινοβολίας για την παράλληλα πολωμένη στο επίπεδο πρόσπτωσης ανακλώμενη δέσμη να είναι μηδενική. Δηλ. δεν υφίσταται ανακλώ-



(Σχ. 6.1.2)

μενη δέσμη. Τη γωνία πρόσπτωσης στην περίπτωση αυτή την ονομάζουμε ***γωνία Brewster*** και συμβολίζεται με θ_B. Η προηγούμενη διαδικασία μπορεί να χρησιμοποιηθεί προκειμένου να πάρουμε γραμμικά πολωμένο φως από ανάκλαση φυσικού φωτός πάνω σ' επίπεδη επιφάνεια διηλεκτρικού.

Πράγματι αναλύουμε το φυσικό φως σε δύο συνιστώσες, κάθετη και παράλληλη προς το επίπεδο πρόσπτωσης. Φροντίζουμε επίσης η δέσμη του φυσικού φωτός ν' ανακλάται στην επιφάνεια του διηλεκτρικού με τη γωνία Brewster. Στην περίπτωσή μας σαν ανακλώμενη θα έχουμε μόνο αυτή που είναι γραμμικά πολωμένη κάθετα στο επίπεδο πρόσπτωσης επειδή η παράλληλη δεν υφίσταται. Τότε με τη βοήθεια του νόμου του Snell (§ 5.1) βρίσκουμε:

$$n \sin\theta_B = n' \sin\theta' \quad \text{και} \quad \theta_B + \theta' = 90^0$$

Οπότε επειδή $n = 1$: $\sin\theta_B = n' \sin(90^0 - \theta_B) = n' \cos\theta_B$

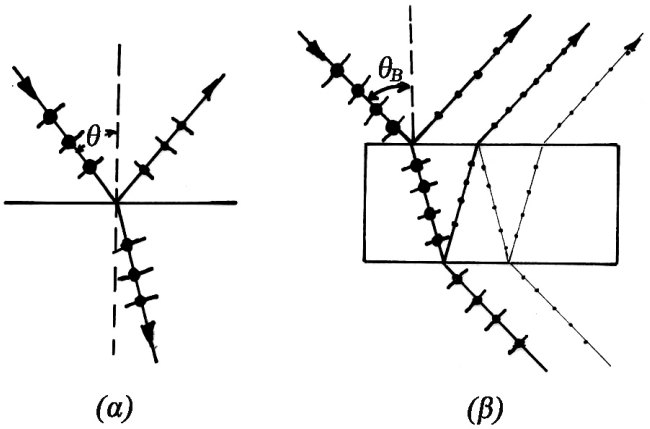
Άρα: $$n' = \tan\theta_B \qquad (6.1.1)$$

Η τελευταία σχέση αποτελεί τη μαθηματική έκφραση του νόμου του Brewster και μας οδηγεί στον υπολογισμό του δείκτη διάθλασης ενός διηλεκτρικού υλικού, εφόσον κατά κάποιο τρόπο προσδιορίσουμε τη γωνία θ_B. Αυτό γίνεται με σχετικά εύ-

κολο τρόπο, επειδή κατά την πρόσπτωση του φωτός με γωνία Brewster η ανακλώμενη είναι γραμμικά πολωμένη. Περιστρέφοντας λοιπόν έναν αναλυτή κάθε φορά κάθετα σε σχέση με την διεύθυνση διάδοσης της εκάστοτε ανακλώμενης, προσδιορίζουμε τη γωνία θ_B ακριβώς στη θέση που θα έχουμε κατάσβεση. Για το νερό και το κοινό γυαλί οι γωνίες Brewster βρίσκονται περίπου 53^0 και 56^0, οπότε οι δ.δ. αντίστοιχα (σχ. 6.1.1) θα είναι: $n' = 1.33$ και $n' = 1.5$. Στη γενικότερη περίπτωση που η γωνία πρόσπτωσης είναι διαφορετική από την θ_B, το ανακλώμενο φως θα είναι μερικά γραμμικά πολωμένο δηλ. θα συνυπάρχουν και οι δύο 'ασύμφωνες' (ασύζευκτες) μεταξύ τους συνιστώσες (κάθετη και παράλληλη), με προεξάρχουσα την κάθετη (όπου και η γραμμικά πολωμένη). Θα έχουμε δηλ. ένα μίγμα φυσικού φωτός και γραμμικά πολωμένου.

Πολωτής παραλλήλων πλακών

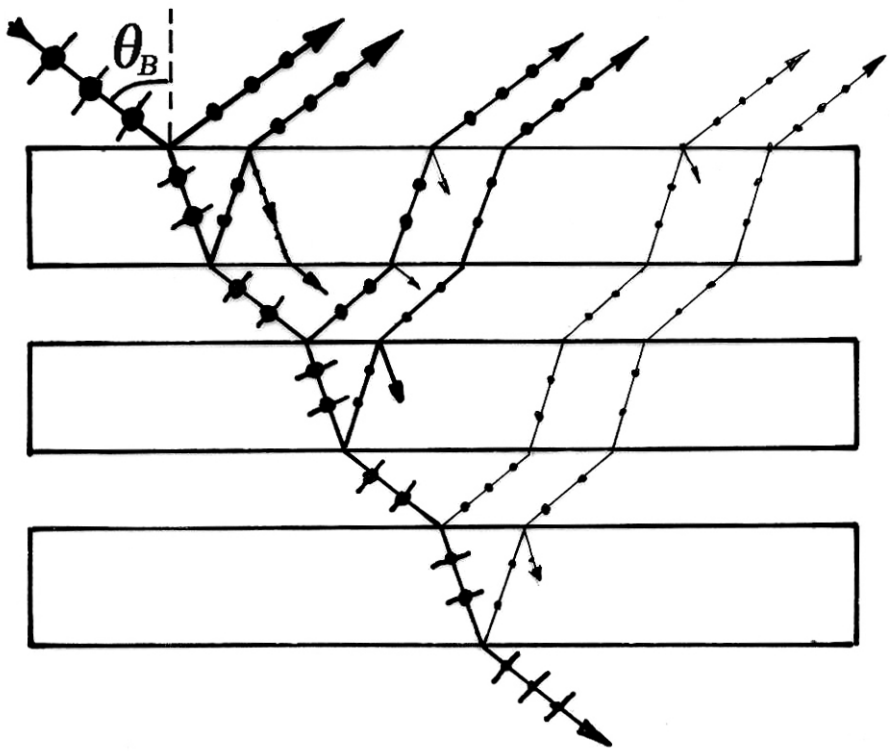
Για την κατάσταση πόλωσης της διαθλώμενης δέσμης διαπιστώνουμε (Σχ.6.1.1,2) ότι είναι μερικά γραμμικά πολωμένη για οποιαδήποτε γωνία πρόσπτωσης του φωτός. Μια ενδιαφέρουσα περίπτωση είναι αυτή της πρόσπτωσης μιας



(Σχ. 6.1.3)

δέσμης φυσικού φωτός με τη γωνία Brewster (Σχ. 6.1.3β). Τότε κατά τα γνωστά η ανακλώμενη θα είναι γραμμικά πολωμένη κάθετα στο επίπεδο πρόσπτωσης. Το ποσοστό της έντασής της σε σχέση με την προσπίπτουσα είναι περίπου 10%. Σ' αυτό συνυπολογίζονται και οι αναδυόμενες διαταραχές από τις πολλαπλές εσωτερικές ανακλάσεις στην κάτω επιφάνεια της πλάκας, που είναι και αυτές γραμμικά πολωμένες κάθετα στο επίπεδο πρόσπτωσης. Βλέπουμε λοιπόν ότι το συγκεκριμένο ποσοστό από την ένταση αφαιρείται από την αρχική δέσμη, αφήνοντας τη διαθλώμενη μερικά γραμμικά πολωμένη. Αν τώρα αντί της μιας πλάκας του διηλεκτρικού χρη-

σιμοποιήσουμε δύο, το ποσοστό της διαθλώμενης από τη δεύτερη πλάκα (λόγω πάλι της ανάκλασης από αυτή ποσοστού γραμμικά πολωμένου φωτός) σε γραμμικά πολωμένο φως παράλληλο με το επίπεδο πρόσπτωσης θ' αυξηθεί. Σαν συνέπεια θα έχουμε αύξηση του βαθμού πόλωσης του μερικά γραμμικά πολωμένου φωτός (σχ. 3.4.4,5). Από πρακτική άποψη μια συστοιχία ορισμένου αριθμού παραλλήλων πλακών ίδιου ή διαφορετικού πάχους (Σχ. 6.1.4), θα οδηγούσε σταδιακά στην εξά-



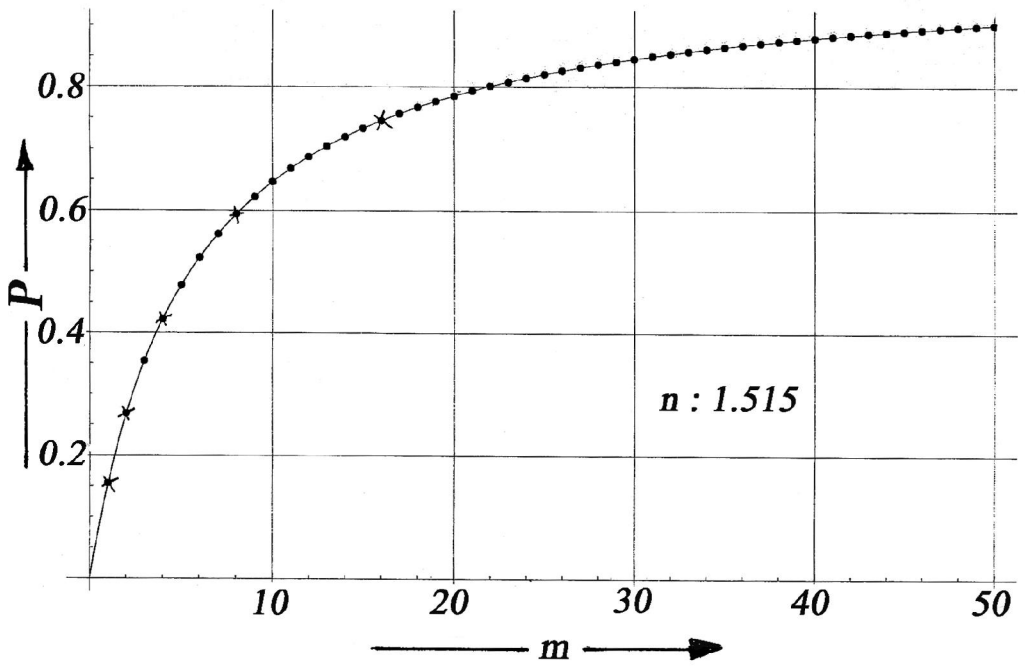
(Σχ. 6.1.4)

λειψη της κάθετης συνιστώσας της διαθλώμενης και στην ανάδειξη της γραμμικά πολωμένης συνιστώσας, της παράλληλης προς το επίπεδο πρόσπτωσης. Ο βαθμός πόλωσης της δέσμης για αριθμό πλακών $m = 16$ και δ.δ. $n = 1.515$ με βάση τον τύπο των Provostaye-Desains:

$$P = \frac{m}{m + \left(\frac{2n}{n^2 - 1} \right)^2} \tag{6.1.2}$$

θα είναι $P \simeq 74.5\,\%$. Όπως αναφέραμε και στην εισαγωγή του κεφαλαίου, τέτοιες συστοιχίες πλακών χρησιμοποιούνταν στο παρελθόν (πριν την ανακάλυψη των πολωτών Polaroid) σαν γραμμικοί πολωτές.

Οι πειραματικές τιμές για τον υπολογισμό της μερικής πόλωσης P, αποκλίνουν κατά ένα ποσοστό κάτω του 5% όπως αυτές υπολογίζονται από τη (σχ. 6.1.2) λόγω της απορρόφησης που εμφανίζουν οι πλάκες και η οποία δεν λαμβάνεται



(Σχ. 6.1.5)

υπόψη κατά τη διαδικασία της θεωρητικής ανάδειξής της. Στο διάγραμμα του (Σχ. 6.1.5) δίνεται η γραφική παράσταση του P συναρτήσει του αριθμού των πλακών για $n = 1.515$. Βλέπουμε ότι για $m = 20$ το ποσοστό του γραμμικά πολωμένου φωτός της διαθλώμενης δέσμης έχει προσεγγίσει ήδη την τιμή του 80%.

Ανακλαστικότητα των διηλεκτρικών επιφανειών

Η ποσοτική περιγραφή των όσων έχουμε αναφέρει στην προηγούμενη παράγραφο για την πόλωση από ανάκλαση και διάθλαση, μας δίνεται από τις εξισώσεις του Fresnel (βλ. ΕΡΓΑΣΤ/ΚΗ ΟΠΤΙΚΗ [3]: Ε.Σ.Σ.Φ. (ΠΑΡ/ΜΑ 3)). Οι εξισώσεις αυτές συνδέουν τα πλάτη της έντασης του ηλεκτρικού πεδίου **E** για τις συνιστώσες τις παράλληλες και κάθετες στο επίπεδο πρόσπτωσης, με τις γωνίες πρόσπτωσης, ανάκλασης και διάθλασης καθώς και με τους δ.δ. των διηλεκτρικών, στη διαχωριστική επιφάνεια των οποίων γίνεται η ανάκλαση.

Το μέγεθος το οποίο μας ενδιαφέρει περισσότερο εδώ είναι η ***ανακλαστικότητα R (reflectance)*** των επιφανειών. Δίνεται από τη σχέση:

$$R = \left(\frac{E_{or}}{E_{oi}}\right)^2 = \frac{I_r}{I_i} \tag{6.1.3}$$

όπου E_{or}, E_{oi} τα πλάτη των διαταραχών του ηλεκτρικού πεδίου της ανακλώμενης και της προσπίπτουσας δέσμης και I_r, I_i οι αντίστοιχες εντάσεις των δεσμών που θεωρούμε ότι έχουν την ίδια διατομή. Διακρίνουμε ανακλαστικότητες για την παράλληλη R_π και την κάθετη R_σ συνιστώσα του πεδίου που δίνονται από τις σχέσεις:

$$R_\pi = \left(\frac{E_{or}}{E_{oi}}\right)_\pi^2 = \left(\frac{I_r}{I_i}\right)_\pi \quad , \quad R_\sigma = \left(\frac{E_{or}}{E_{oi}}\right)_\sigma^2 = \left(\frac{I_r}{I_i}\right)_\sigma \tag{6.1.4}$$

Αποδεικνύεται με τη βοήθεια των εξισώσεων Fresnell (βλ. ΕΡΓΑΣΤ/ΚΗ ΟΠΤΙΚΗ [3]: Ε.Σ.Σ.Φ. (ΠΑΡ/ΜΑ 3) (σχ. 3.3,3.2)) ότι:

$$R_\pi = \frac{\tan^2(\theta_i - \theta_t)}{\tan^2(\theta_i + \theta_t)} \tag{6.1.5}$$

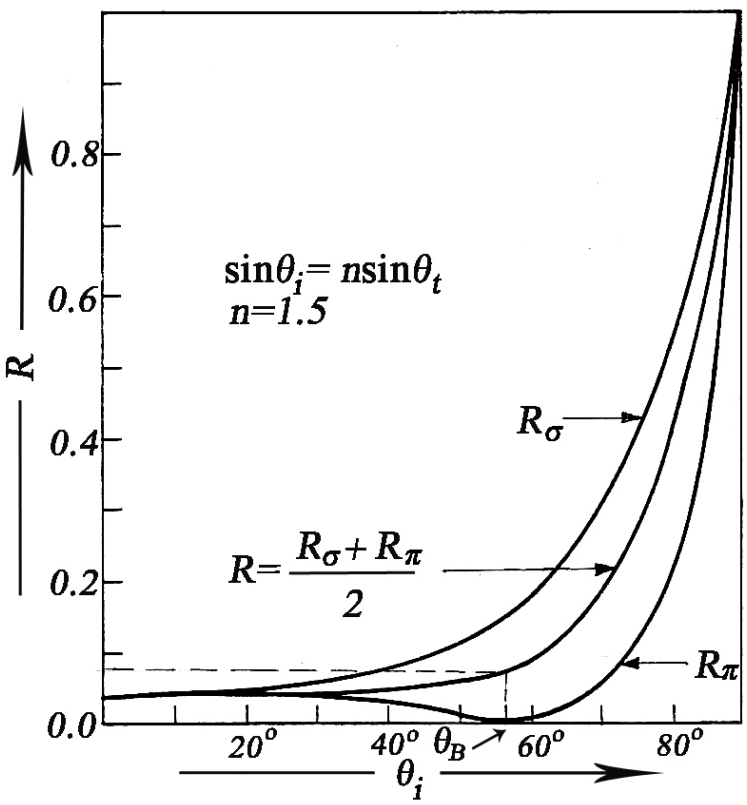
$$R_\sigma = \frac{\sin^2(\theta_i - \theta_t)}{\sin^2(\theta_i + \theta_t)} \tag{6.1.6}$$

όπου θ_i, θ_t οι γωνίες πρόσπτωσης και διάθλασης. Οι γραφικές παραστάσεις των R_π, R_σ συναρτήσει της γωνίας πρόσπτωσης δίνονται στο (Σχ. 6.1.6). Γίνεται αμέσως φανερό ότι ενώ η R_σ (σχ. 6.1.6) δεν γίνεται ποτέ μηδέν, η R_π (σχ. 6.1.5) μηδενίζεται όταν $\theta_i + \theta_t = 90^0$. Και επειδή $R_\pi = (E_{or})^2{}_\pi / (E_{oi})^2{}_\pi$ σημαίνει ότι $(E_{or})_\pi = 0$, άρα δεν υφίσταται συνιστώσα ανακλώμενη παράλληλη με το επίπεδο πρόσπτωσης αλλά μόνο διαθλώμενη (νόμος του Brewster).

Για την περίπτωση της πρόσπτωσης πάνω στη διαχωριστική επιφάνεια των διηλεκτρικών φυσικού φωτός, οι εντάσεις των δύο συνιστωσών κατά τα γνωστά είναι ίσες δηλ. $(I_i)_\pi = (I_i)_\sigma = I_i/2$ όπου I_i η ένταση του προσπίπτοντος φωτός. Τότε για τις ανακλώμενες συνιστώσες θα έχουμε:

$$\left.\begin{aligned} (I_r)_\pi &= (I_r)_\pi \frac{I_i}{2(I_i)_\pi} = \frac{(I_r)_\pi}{(I_i)_\pi}\frac{I_i}{2} = R_\pi \frac{I_i}{2} \\ (I_r)_\sigma &= (I_r)_\sigma \frac{I_i}{2(I_i)_\sigma} = \frac{(I_r)_\sigma}{(I_i)_\sigma}\frac{I_i}{2} = R_\sigma \frac{I_i}{2} \end{aligned}\right\} \tag{6.1.7}$$

Η ανακλαστικότητα μιας επιφάνειας διηλεκτρικού για το φυσικό φως θα είναι το άθροισμα των ανακλαστικοτήτων για την παράλληλη και την κάθετη συνιστώσα.



(Σχ. 6.1.6)

Δηλ. $$R = \frac{(I_r)_\pi + (I_r)_\sigma}{I_i} = \frac{R_\pi + R_\sigma}{2} \qquad (6.1.8)$$

όπου R_π και R_σ θα δίνονται από τις (σχ. 6.1.5,6). Η γραφική παράσταση της R δίνεται στο (Σχ. 6.1.6). Από την καμπύλη αυτή βλέπουμε ότι για πρόσπτωση φυσικού φωτός με γωνία ίση με τη γωνία Brewster, το ποσοστό του ανακλώμενου φωτός είναι περίπου 7.5% για $n = 1.5$.

Όταν το φυσικό φως πέφτει σχεδόν κάθετα πάνω στην επιφάνεια του διηλεκτρικού, οι γωνίες θ_i και θ_t είναι πολύ μικρές. Τότε μπορούμε τις εφαπτόμενες να τις αντικαταστήσουμε με τα ημίτονα και οι (σχ. 6.1.5,6) για τις ανακλαστικότητες γίνονται:

$$R_\pi = R_\sigma = \left[\frac{\sin(\theta_i - \theta_t)}{\sin(\theta_i + \theta_t)}\right]^2 = \left[\frac{\sin\theta_i \cos\theta_t - \cos\theta_i \sin\theta_t}{\sin\theta_i \cos\theta_t + \cos\theta_i \sin\theta_t}\right]^2 \qquad (6.1.9)$$

Αν διαιρέσουμε αριθμητή και παρονομαστή με $\sin^2\theta_t$ και αντικαταστήσουμε με τη βοήθεια του νόμου του Snell $n = \sin\theta_i / \sin\theta_t$ βρίσκουμε:

$$R_\pi = R_\sigma = \left[\frac{n\cos\theta_t - \cos\theta_i}{n\cos\theta_t + \cos\theta_i}\right]^2 \simeq \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^2 \qquad (6.1.10)$$

επειδή $\theta_i \simeq \theta_t \simeq 0^0$. Η (σχ. 6.1.10) μας δίνει τελικά τις ανακλαστικότητες των διηλεκτρικών για κάθετη πρόσπτωση. Αν $n = 1.5$ τότε $R = 0.04$, δηλ. το 4% του αθροίσματος των δύο συνιστωσών (σχ. 6.1.8) του φυσικού φωτός ανακλάται. Σημαντική αύξηση της ανακλαστικότητας θα έχουμε όσο αυξάνει ο δ.δ. του διηλεκτρικού. Αν π.χ. $n \simeq 2.5$ (διαμάντι) τότε $R = 0.18$, δηλ. θα έχουμε ανάκλαση του σημαντικού ποσοστού του 18% του προσπίπτοντος φυσικού φωτός.

Από την ανάλυση αυτή προκύπτει ένα ενδιαφέρον συμπέρασμα με ιδιαίτερη πρακτική σημασία, όταν έχουμε ανάκλαση του φωτός από πολλές διαδοχικές επιφάνειες. Έστω π.χ. οι επιφάνειες είναι 10 τον αριθμό και ο δ.δ. τους $n = 1.5$. Τότε επειδή για κάθε μια από αυτές $R = 0.04$, από το προσπίπτον φως ένα ποσοστό 30% περίπου θ' ανακλαστεί. Αν ο αριθμός των επιφανειών γίνει μεγαλύτερος, το ποσοστό ανάκλασης αυξάνει κατά πολύ. Το γεγονός αυτό μπορούμε να το επιβεβαιώσουμε με τον εξής τρόπο: Κρατούμε ένα διαφανές τζάμι και βλέπουμε μέσα από αυτό. Το αποτέλεσμα θα είναι να παρατηρούμε τα αντικείμενα που υπάρχουν από πίσω του. Αν όμως ο αριθμός των τζαμιών που κρατάμε – σε επαφή έστω μεταξύ τους – αυξηθεί κατά πολύ, τότε τα αντικείμενα που παρατηρούσαμε πριν δια μέσω του ενός σχεδόν εξαφανίζονται. Το γεγονός οφείλεται στο ότι πλέον μεγάλο ποσοστό του φωτός που εκπέμπουν τα αντικείμενα, ανακλάται από τη συστοιχία, με αποτέλεσμα προς τα εμάς να διαδίδεται πολύ μικρότερη ποσότητα από ότι προηγουμένως.

Το ίδιο ακριβώς συμβαίνει και για το φως που πέφτει (από πίσω μας) προς τη διεύθυνση που βλέπουμε και το οποίο βέβαια ανακλάται προς τα εμάς. Τότε το μεγάλο ποσοστό του ανακλωμένου φωτός κάνει τη συστοιχία των τζαμιών να συμπεριφέρεται σαν κατοπτρική επιφάνεια. Αυτό θα έχει σαν αποτέλεσμα να βλέπουμε από ανάκλαση πάρα πολύ καθαρά τα αντικείμενα που βρίσκονται πίσω μας. Τελικά μπορούμε να πούμε ότι η μεγάλη ανακλαστικότητα, επιδρά περιοριστικά στο ποσοστό του φωτός που πρέπει να διακινηθεί μέσα από ένα οπτικό σύστημα με πολλές επιφάνειες (π.χ. μέσω ενός φωτογραφικού φακού προκειμένου ν' απεικονισθεί ένα αντικείμενο). Το πρόβλημα σήμερα λύνεται με την επικάλυψη των επιφανειών των οπτικών στοιχείων με τα λεγόμενα ***αντιανακλαστικά υμένια (antireflection coatings)***, γεγονός που ελαχιστοποιεί τις ανακλάσεις και επιτρέπει τη διέλευση

μέσα από το οπτικό σύστημα του μεγαλύτερου ποσοστού της προσπίπτουσας σ' αυτό δέσμης (βλ. ΕΡΓΑΣΤ/ΚΗ ΟΠΤΙΚΗ [3]: Ε.Σ.Σ.Φ. (§ 8.3.4)).

6.2 *Διχρωϊσμός*

Η έννοια του ***διχρωϊσμού (dichroism)***, που αναφέρεται σε ανισότροπα υλικά – δηλ. μονοάξονες και διάξονες κρυστάλλους – αφορά τη χρωματική τους όψη όταν δια μέσου τους διαδίδεται φυσικό πολυχρωματικό φως. Πρόκειται για κρυστάλλους που εκτός του φαινόμενου της διπλής διάθλασης εμφανίζουν και απορρόφηση δηλ. το φαινόμενο του διασκεδασμού (βλ. ΕΡΓΑΣΤ/ΚΗ ΟΠΤΙΚΗ [5]: Π.Α.Α.Φ. (§ 4.2). Άμεσο αποτέλεσμα του γεγονότος αυτού είναι το εξής: Η μία από τις συνιστώσες του φυσικού φωτός μπορεί ν' απορροφηθεί τελείως ενώ η άλλη να τον διαπεράσει και να υποστεί μόνο μερική απορρόφηση. Δεδομένου ότι η τελευταία – όπως αποδεικνύεται – εξαρτάται από την εκάστοτε συχνότητα ω των συνιστωσών ακτινοβολιών, στην έξοδο του κρυστάλλου το φως θα είναι γραμμικά πολωμένο όχι όμως της ίδιας χρωματικής σύνθεσης με το προσπίπτον.

Μια ομάδα ορυκτών κρυστάλλων (όχι όμως η μοναδική) που παρουσιάζει τις παραπάνω ιδιότητες είναι αυτή των ***τουρμαλινών (tourmalines)***. Πρόκειται για μια από τις πλέον περίπλοκες ομάδες πυριτικών ορυκτών με γενικό χημικό τύπο: $\mathrm{Na(Al,Fe,Li,Mg,Mn)M_3Al(Si_6O_{18})(BO_3)_3(OH,F)_4}$. Κρυσταλλώνεται στο τριγωνικό σύστημα στην τάξη $(3\mathrm{m})$ και η εξωτερική τους εμφάνιση είναι αυτή ενός κολωνοειδούς πρίσματος τριγωνικής διατομής. Κατά μήκος των πλευρών τους υπάρχουν χαρακτηριστικές αυλακώσεις όπως διακρίνουμε στο (Εικ. 6.2.1). Η μορφή της απόληξης στα άκρα των ολοεδρικών κρυστάλλων (δηλ. αυτών που έχουν αναπτυγμένες πλήρως όλες τις έδρες τους) είναι ασύμμετρη, ιδιότητα που ονομάζεται ***ημιμορφισμός (hemimorphism)***. Τέτοιοι κρύσταλλοι είναι πιεζοηλεκτρικοί και πυροηλεκτρικοί.

Σημείωση

Ευθύ πιεζοηλεκτρικό φαινόμενο (direct piezoelectric effect) είναι αυτό της εμφάνισης ηλεκτρικής πόλωσης $\mathbf{P}$, όταν κατά μια διεύθυνση ενός κρυστάλλου εφαρμοστεί μηχανική τάση σ (βλ. Π.Φ.Κ.Υ (ΠΑΡ/ΜΑ 4-Ζ)). Σε βαθμωτή μορφή η σχέση που συνδέει τα $\mathbf{P}$ και σ είναι:

$$P = d\sigma$$

όπου d το ***πιεζοηλεκτρικό μέτρο (piezoelectric modulus)***. $[P]:[\mathrm{C/m^2}]$

$[\sigma]:[\mathrm{Nt/m^2}]$, $[d]:[\mathrm{C/Nt}]$.

Πυροηλεκτρικό φαινόμενο (Pyroelectric effect) είναι αυτό της εμφάνισης ηλεκτρικής πόλωσης **P** κατά μια διεύθυνση σ' ένα κρύσταλλο, όταν αυτός θερμανθεί ομογενώς μεταβάλλοντας τη θερμοκρασία του κατά ΔT . Η βαθμωτή μορφή αυτής της σχέσης είναι:

$$\Delta P = p\Delta T$$

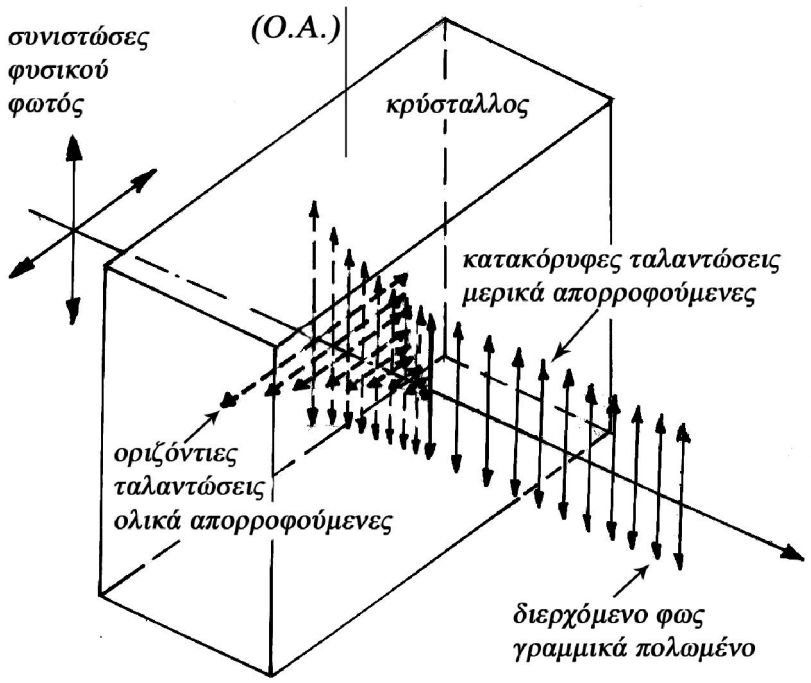
όπου p ο ***πυροηλεκτρικός συντελεστής (pyroelectric coefficient)***. $[\Delta P]:[\mathrm{C/m^2}]$, $[\Delta T]:[{}^o\mathrm{K}]$ και $[p]:[\mathrm{C/m^2 \cdot {}^o K}]$. Πράγματι αν ένας κρύσταλλος Τουρμαλίνη θερμανθεί (πλησιάζοντάς τον π.χ. σε μια πηγή φωτός) πολώνεται ηλεκτρικά. Δηλ. στα άκρα του εμφανίζονται θετικά και αρνητικά φορτία. Τότε από τις περιοχές αυτές έλκονται έντονα μικροσωματίδια και σκόνη.

(Εικ. 6.2.1)

Οι Τουρμαλίνες ανάλογα με τη σύνθεσή τους παρουσιάζονται με διαφορετική απόχρωση αλλά συναντιούνται ακόμη και διαφανείς. Μπορεί να εμφανίζονται εξωτερικά με δύο (Εικ. 6.2.1) ή και περισσότερα χρώματα ανάλογα με τις μεταβολές της χημικής κινητικής κατά τη διάρκεια της ανάπτυξής τους. Οι περισσότεροι από αυτούς χρησιμοποιούνται ακόμη και σήμερα σαν ημιπολύτιμοι λίθοι. Από τους

γνωστότερους είναι ο ονομαζόμενος ***Schorl*** με τον παρακάτω αναγραφόμενο χημικό τύπο: $NaFe^{2+}Al_6\left(Si_6O_{18}\right)\left(BO_3\right)_3\left(OH\right)_4$.

Θεωρούμε τώρα (Σχ. 6.2.2), ότι από ένα κρύσταλλο Τουρμαλίνη αποκόπτουμε ένα πλακίδιο με παράλληλες έδρες πάχους αρκετών χιλιοστών. Ο οπτικός του άξονας (τρίτης τάξης) είναι παράλληλος στις δύο του έδρες. Κάθετα στη μία



(Σχ. 6.2.2)

από αυτές έστω ότι προσπίπτει φυσικό μονοχρωματικό φως. Επειδή κατ' αρχή ο κρύσταλλος είναι διπλοθλαστικός (μονοάξονας εφόσον ανήκει στο τριγωνικό σύστημα), το φως στο εσωτερικό του θ' αναλυθεί σε δύο μέτωπα κύματος τα οποία λόγω του τρόπου κοπής του θα διαδίδονται στην ίδια διεύθυνση με αυτήν της πρόσπτωσης και θα είναι γραμμικά πολωμένα και ορθογώνια μεταξύ τους δηλ. τα ηλεκτρικά τους πεδία θα είναι κάθετα μεταξύ τους. Οι Τουρμαλίνες όμως – όπως ήδη έχουμε αναφέρει – εκτός του ότι είναι διπλοθλαστικοί εμφανίζουν και έντονα φαινόμενα απορρόφησης. Η απορρόφηση οφείλεται στο ότι υφίσταται αξιοσημείωτη αγωγιμότητα στις διάφορες κατευθύνσεις στο εσωτερικό αυτών των κρυστάλλων. Το τελευταίο σημαίνει ότι κατά τη διάδοση του φωτός δημιουργούνται ρεύματα, οπότε η ενέργεια των Η/Μ κυμάτων μετατρέπεται μερικώς ή εξ' ολοκλήρου σε θερμότητα Joule (φαινόμενα απορρόφησης). Η απορρόφηση μεταβάλλεται κατά διεύθυνση στο εσωτερικό του κρυστάλλου και εξαρτάται από τη συχνότητα ω των συνιστωσών του προσπίπτοντος μετ. κύματος.

Αν λοιπόν φωτίσουμε (Σχ. 6.2.2) το πλακίδιο του Τουρμαλίνη με φυσικό λευκό φως, τότε σε γενικές γραμμές συμβαίνει το εξής: Οι συνιστώσες των διαφόρων συχνοτήτων των ηλεκτρικών πεδίων που είναι κάθετες στον οπτικό άξονα του κρυστάλλου και εφόσον το πάχος του είναι επαρκές, απορροφούνται ολοκληρωτικά. Δεν συμβαίνει όμως το ίδιο και με τις αντίστοιχες συνιστώσες που τα ηλεκτρ. τους πεδία είναι παράλληλα με τον οπτικό του άξονα. Οι τελευταίες διαδίδονται ανεμπόδιστα στο εσωτερικό του παρουσιάζοντας μόνο μικρή απορρόφηση. Στο γεγονός αυτό οφείλεται και η απόχρωση που παρουσιάζει ο κάθε κρύσταλλος Τουρμαλίνη. Πράγματι αν από την παράλληλη συνιστώσα του λευκού φωτός στο εσωτερικό του κρυστάλλου απορροφηθεί μερικά (συχνοτικά εξαρτώμενο) τμήμα του φάσματος, τότε στην έξοδό του θα δούμε το συμπληρωματικό του λευκού φωτός δηλ. την απόχρωση που παρουσιάζει ο συγκεκριμένος κρύσταλλος. Διάδοση του λευκού φωτός σε διαφορετικές διευθύνσεις στο εσωτερικό του όπως π.χ. κατά μήκος του οπτικού του άξονα θα παρουσιάζει διαφορετική απορρόφηση ποσοτικά και συχνοτικά με συνέπεια ο κρύσταλλος να εμφανίζει διαφορετική απόχρωση. Από το γεγονός αυτό προέρχεται και ο όρος διχρωϊσμός. Θα πρέπει να σημειώσουμε ότι κρυσταλλικά υλικά που διαθέτουν δύο οπτικούς άξονες (διάξονες κρύσταλλοι) παρουσιάζουν φαινόμενα ***πλεοχρωϊσμού (pleochroism)***. Δηλ. φωτιζόμενοι με γραμμικά πολωμένο λευκό φως κάθετα ή παράλληλα με τους οπτικούς τους άξονες εμφανίζουν επιπλέον των δύο αποχρώσεων.

Με βάση τα προαναφερόμενα, πλακίδια από Τουρμαλίνη θα μπορούσαν να χρησιμοποιηθούν σαν γραμμικοί πολωτές, στην πράξη όμως δεν συμβαίνει αυτό για δύο λόγους: α) Οι φυσικοί κρύσταλλοι είναι πολύ μικροί σε μέγεθος και β) Δεν είναι παγχρωματικοί δηλ. απορροφούν (ποσοτικά και συχνοτικά) τμήμα του φάσματος του λευκού φωτός σε αντιδιαστολή π.χ. με τους πολωτές Polaroid που είναι σχεδόν ουδέτεροι.

Ένας άλλος διχρωϊκός κρύσταλλος που σχετιζεται με την ανάδειξη φαινόμενων που αφορούν την πόλωση του φωτός είναι ο Βιβιανίτης (Vivianite). Μπορούμε να τον συναντήσουμε σαν ορυκτό σε κρυσταλλική μορφή. Ο χημικός του τύπος είναι: $Fe_3^{2+}\left(PO_4\right)_2 \cdot 8H_2O$. Ανήκει στο μονοκλινές σύστημα, στην ομάδα συμμετρίας σημείου $(2/m)$(ένα επίπεδο συμμετρίας και κάθετα σ' αυτό ένας άξονας δεύτερης τάξης). Άρα είναι διάξονας κρύσταλλος και επομένως πλεοχρωικός. Εμφανίζει τέλειο σχισμό κατά το επίπεδο $\{010\}$. Στην (Εικ. 6.2.3) μπορούμε να δούμε ένα ευμεγέθη κρύσταλλο Βιβιανίτη κυπαρισσί χρώματος (με βάση τον τρόπο που φωτίζεται), στον οποίο είναι εμφανή τα επίπεδα σχισμού. Επομένως πλακίδιά του μπορούν να χρησιμοποιηθούν σαν γραμμικοί πολωτές έστω και ατελείς.

(Εικ. 6.2.3)

Στο παρελθόν οι κρύσταλλοι αυτοί χρησιμοποιήθηκαν από τους Βίκινγκς όπως και οι κρύσταλλοι του Κορδιερίτη, για τον προσανατολισμό στα θαλάσσια ταξίδια τους τα νεφοσκεπή πρωινά στο βόριο ατλαντικό ωκεανό. Σήμερα χρησιμοποιούνται σαν ημιπολύτιμοι λίθοι.

6.3 *Σκέδαση του φωτός και συναφή φαινόμενα. Πόλωση του φωτός από σκέδαση.*

Σκέδαση(scattering) γενικά ονομάζουμε εκείνο το φυσικό φαινόμενο κατά το οποίο κάποιες μορφές ακτινοβολίας (όπως π.χ. το φως) ή κινούμενα σωματίδια αναγκάζονται να εκτραπούν από την ευθύγραμμη πορεία τους στο μέσο που διαδίδονται και το οποίο περιλαμβάνει μία ή και περισσότερες 'ιδιομορφίες' τις οποίες ονομάζουμε κέντρα ***σκέδασης (scattering centers)***. Τέτοια θα μπορούσαν να είναι: Διάφορα σωματίδια, φυσαλίδες, σταγονίδια, ανωμαλίες δομής στα διάφορα κρυσταλλικά στερεά ή υγρά, επιφανειακές ανωμαλίες ή ακόμα και τα ίδια τα άτομα ή τα μόρια. Μας ενδιαφέρει εδώ αποκλειστικά η σκέδαση των ακτινοβολιών και ιδιαίτερα αυτών της ορατής περιοχής του Η/Μ φάσματος.

Μπορούμε να διαχωρίσουμε τυπικά το φαινόμενο της σκέδασης σε δύο κατηγορίες: την ***ανελαστική σκέδαση(ή σκέδαση συντονισμού) (inelastic scattering)*** και την ***ελαστική σκέδαση (elastic scattering)*** (βλ. § 2.2). Στην κατηγορία της ανελαστικής σκέδασης των Η/Μ ακτινοβολιών περιλαμβάνονται τα γνωστά είδη με

τις ονομασίες: Σκέδαση Brillouin, Raman και Compton. Στη δεύτερη κατηγορία της ελαστικής σκέδασης, αυτές των Rayleigh και Mie.

Η σκέδαση όπως και η απορρόφηση είναι οι δύο κατ' εξοχήν φυσικές διεργασίες στις οποίες οφείλεται η εξωτερική εμφάνιση των περισσοτέρων αντικειμένων. Π.χ. μια σκεδάζουσα επιφάνεια (diffuser) που φαίνεται λευκή, οφείλει το χρώμα της στη σκέδαση του προσπίπτοντος λευκού φωτός από τους μικροσκοπικούς σκεδαστές από τους οποίους συνίστανται οι ανωμαλίες της επιφάνειάς της. Αν η επιφάνεια είναι ***οπτικά επίπεδη (optical flat)*** τότε η απουσία μικροσκοπικών σκεδαστών μας δίνει την εντύπωση της ***κατοπτρικής ανάκλασης (specular reflection)*** ή μιας γλασέ επιφάνειας. Το ίδιο το φαινόμενο της σκέδασης είναι δυνατόν να προσδώσει χρώμα σ' ορισμένα αντικείμενα όπως: Στον ουρανό, σε περιοχές με αιωρούμενα σωματίδια, στα φτερά ορισμένων πουλιών ή εντόμων κ.λ.π. Οι ζωηροί όμως χρωματισμοί των διαφόρων αντικειμένων οφείλονται ως επί το πλείστον στη σκέδαση συντονισμού (απορρόφηση) του φωτός από τα νανοσωματίδια των επιφανειών των αντικειμένων. Τα τελευταία απορροφούν περιοχές του Η/Μ φάσματος και το τελικά επανεκπεμπόμενο είναι το συμπληρωματικό του προσπίπτοντος. Αν π.χ. ένα αντικείμενο απορροφήσει την μπλε περιοχή του προσπίπτοντος σ' αυτό λευκού φωτός, τότε θα φαίνεται κίτρινο δηλ. η απόχρωσή του θα καθορίζεται από τη μίξη της πράσινης και της κόκκινης περιοχής του φάσματος (βλ. ΕΡΓΑΣΤ/ΚΗ ΟΠΤΙΚΗ [5]: Π.Α.Α.Φ. (§ 4.2) και (ΠΑΡ/ΜΑ 4)).

Στα επόμενα θ' ασχοληθούμε αποκλειστικά – αλλά στοιχειωδώς – με την ελαστική σκέδαση των Η/Μ ακτινοβολιών του ορατού φάσματος. Μερική μνεία θα γίνει για τις θεωρίες των Rayleigh και Mie οι οποίες αφορούν την ελαστική σκέδαση από σφαιρικά συνήθως σωματίδια ορισμένου δ.δ. και διαστάσεων (καθώς και από άτομα και μόρια). Περισσότερο μας ενδιαφέρει η θεωρία του Rayleigh επειδή αναφέρεται στη σκέδαση από σωματίδια των οποίων οι διαστάσεις είναι πολύ μικρές σε σχέση με το μ.κ. της προσπίπτουσας σ' αυτά ακτινοβολίας όπως είναι π.χ. τα μόρια της ατμόσφαιρας. Πράγματι οι διαστάσεις των μορίων του οξυγόνου ή του αζώτου είναι της τάξης των 3Å ενώ το μέσο μ.κ. των ορατών ακτινοβολιών είναι περίπου 5500 Å. Οι θεωρίες βέβαια των Rayleigh και Mie είναι αρκετά περίπλοκες στην ανάπτυξή τους*, για το λόγο αυτό θ' αναφερθούμε μόνο σε ορισμένα συμπεράσματά τους. Αντικειμενικός μας σκοπός είναι η ερμηνεία της πόλωσης του φωτός από σκέδαση στα μόρια της ατμόσφαιρας, όπως και η εξήγηση των χρωμάτων του ουρανού ανάλογα με τη θέση του ηλίου. Γνωρίζουμε όμως (ΕΡΓΑΣΤΗΡ/ΚΗ ΟΠΤΙΚΗ [5]: Π.Α.Α.Φ. (§ 4.1)) ότι τα μόρια μπορούν να προσομοιωθούν με ηλεκτρικά δίπολα. Τα τελευταία κάτω από την επίδραση της Η/Μ ακτινοβολίας μπορούν να ταλαντωθούν και να επανεκπέμψουν την ακτινοβολία χω-

* H. C. van de Hulst: "Light Scattering by Small Particles" Dover Pub, Inc. N.Y (1981)

ρίς ουσιαστικά απορρόφηση ή αλλαγή στη συχνότητά της. Επίσης γνωρίζουμε το μοντέλο εκπομπής της ακτινοβολίας του διπόλου (ΕΡΓΑΣ/ΚΗ ΟΠΤΙΚΗ [3]: Ε.Σ.Σ.Φ. (§ 1.2)) για την περιοχή της ζώνης ακτινοβολίας. Δηλ. γνωρίζουμε την ένταση $E_0\left(r = \text{σταθ.}, \theta, \phi = \text{σταθ.}\right)$ του πλάτους του ηλεκτρικού πεδίου σε απόσταση $r = \text{σταθ.}$, $\phi = \text{σταθ.}$ (όπου ϕ η αζιμουθιακή γωνία) και για διάφορες τιμές της μεσημβρινής γωνίας θ ως προς τον άξονα ταλάντωσης του διπόλου. Άρα γνωρίζουμε και το πρότυπο εκπομπής της ακτινοβολούμενης έντασης $I\left(r = \text{σταθ.}, \theta, \phi = \text{σταθ.}\right)$. Η τελευταία όπως θ' αποδείξουμε είναι ανάλογη της τέταρτης δύναμης της ω ή ανάλογη του $1/\lambda^4$ όπου λ το μ.κ. της προσπίπτουσας στο δίπολο ακτινοβολίας. Το γεγονός αυτό θ' αποτελέσει και τη βάση ερμηνείας των χρωμάτων του ουρανού. Τέλος με τη βοήθεια του προτύπου της έντασης του πεδίου εκπομπής του διπόλου, θα εξηγήσουμε και την κατάσταση πόλωσης του σκεδανύμενου φωτός που προέρχεται από διαφορετικά σημεία του ουρανού.

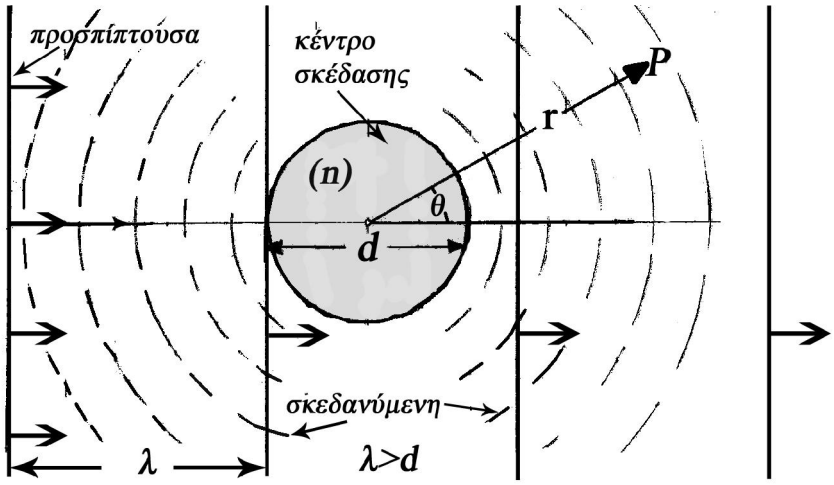
6.3.1 *Σκέδαση Rayleigh. Σκέδαση Mie. Τα χρώματα του ουρανού*

α) Σκέδαση Rayleigh

Η διαδικασία αυτή αφορά την ελαστική σκέδαση δηλ. απορρόφηση και επανεκπομπή της Η/Μ ακτινοβολίας (εδώ ενός επιπέδου μετ. κύματος) στην ορατή περιοχή του φάσματος από μικρά σφαιρικά εν γένει σωματίδια ορισμένης διαμέτρου και δείκτη διάθλασης. Σαν τέτοια σωματίδια μπορούμε να θεωρήσουμε τα σταγονίδια, τα εγκλείσματα αέρα στο νερό (φυσαλίδες) ή και ακόμα διαταραχές στην πυκνότητα ενός υλικού, συνήθως αερίου. Επίσης μπορεί να προκληθεί σκέδαση αυτού του είδους σε διαφανή στερεά και υγρά λόγω ανωμαλιών στη δομή τους.

Πρώτη φορά που προτάθηκε μοντέλο σκέδασης από τέτοιου είδους σωματίδια ήταν από τον Lord Rayleigh. Για να εφαρμοστεί η θεωρία του Rayleigh τα σφαιρικά σωματίδια θα πρέπει να έχουν διάμετρο πολύ μικρότερη από το μ.κ. λ της προσπίπτουσας ακτινοβολίας με πάνω όριο το λόγο $d/\lambda \simeq 10$. Για τις περιπτώσεις αυτές το ακριβές σχήμα των κέντρων σκέδασης δεν είναι σημαντικό και μπορούμε να τα διαπραγματευτούμε σαν σφαίρες με ισοδύναμο όγκο.

Ας θεωρήσουμε ότι ένα επίπεδο μέτωπο κύματος μ.κ. λ και έντασης I_0 προσπίπτει (Σχ. 6.3.1.1) σε ένα κέντρο σκέδασης διαμέτρου d και δ.δ. n. Τότε η ένταση $I\left(r, \theta\right)$ του σκεδανύμενου φωτός σε απόσταση r από το κέντρο της σφαίρας και σε γωνία θ από τη διεύθυνση διάδοσης της προσπίπτουσας (για $\phi = \text{σταθ.}$ στο επίπεδο του σχήματος) θα δίνεται από τη σχέση:



(Σχ. 6.3.1.1)

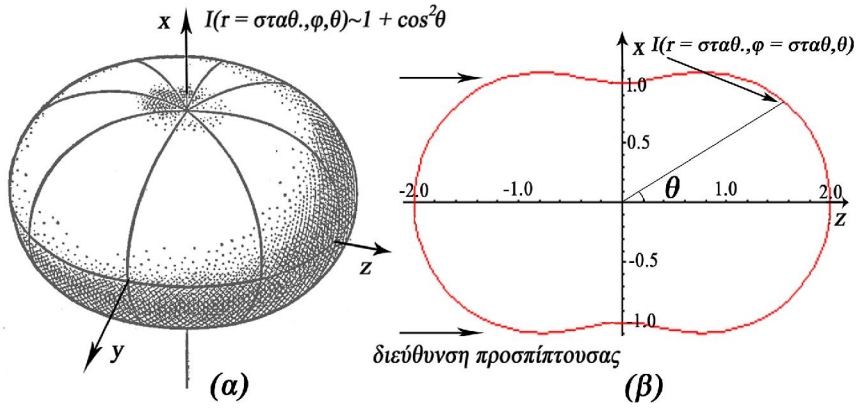
$$I(r,\theta) = I_0 \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^4 \left(\frac{d}{2}\right)^6 \left(\frac{n^2-1}{n^2+2}\right)^2 \frac{\left(1+\cos^2\theta\right)}{2r^2} \qquad (6.3.1.1)$$

Το πολικό διάγραμμα (Σχ. 6.3.1.2α), της συνάρτησης $1+\cos^2\theta$ για $r = \sigma\tau\alpha\theta.,\ -\pi/2/\leq\theta\leq\pi/2$, $0\leq\phi\leq 2\pi$ μας δείχνει την κατανομή της έντασης του σκεδανύμενου φωτός στο χώρο και στο (Σχ. 6.3.1.2β) φαίνεται μια τομή της στο επίπεδο που περιλαμβάνει τη διεύθυνση διάδοσης του προσπίπτοντος μετώπου κύματος και της διεύθυνσης ταλάντωσης της σκεδανύμενης ακτινοβολίας. Η συμμετρία του διαγράμματος αποδεικνύει ότι το σωματίδιο σκεδάζει το φως ισοδύναμα προς τα μπρος και προς τα πίσω. Ο τύπος που μας δίνει την $I(r,\theta)$ είναι ακριβής για την περίπτωση που το προσπίπτον φως είναι φυσικό και ασύμφωνο. Επίσης $d/\lambda \ll$ και το σωματίδιο θεωρείται ότι συντίθεται από υλικό ισότροπο. Ένα σπουδαίο συμπέρασμα που προκύπτει είναι ότι η ένταση της σκεδανύμενης ακτινοβολίας είναι αντιστρόφως ανάλογη της τέταρτης δύναμης του λ. Αυτό σημαίνει ότι ακτινοβολίες με μικρά μ.κ. σκεδάζονται πολύ πιο ισχυρά. Πρέπει τέλος να γνωρίζουμε ότι η θεωρία της σκέδασης Rayleigh αποτελεί προσέγγιση μιας γενικότερης, που ονομάζεται σκέδαση Mie και στην οποία στοιχειωδώς θ' αναφερθούμε στα επόμενα.

β) Σκέδαση Mie

Ο Gustav Mie (1908), ήταν ο πρώτος που επέλυσε με αναλυτικό τρόπο τις εξισώσεις του Maxwell για τη σκέδαση προσπίπτοντος επιπέδου μετώπου κύματος σε σφαιρικής μορφής διηλεκτρικό σωματίδιο. Δηλ. υπολόγισε τα πλάτη και την κα-

τάσταση πόλωσης των συνιστωσών του ηλεκτρ. πεδίου σε ένα σημείο εντός ή εκτός του διηλεκτρικού σωματιδίου μετά την πρόσπτωση σ' αυτό του επιπέδου μετώπου κύματος. Επρόκειτο δηλ. για την επίλυση των δ.ε. του Maxwell παρουσία οριακών συνθηκών. Σε αντίθεση με τη θεωρία του Rayleigh στις λύσεις του Mie συμπεριλαμβάνονται σωματίδια με οποιοδήποτε λόγο d/λ.

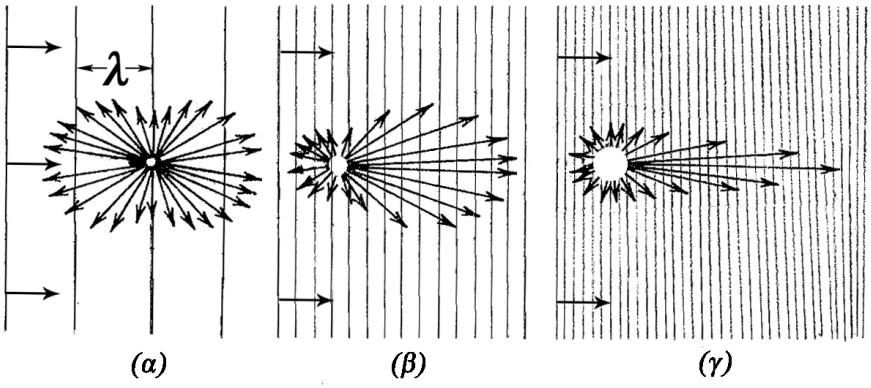


(Σχ. 6.3.1.2)

Για τις περιπτώσεις αυτές αποδεικνύεται ότι καθώς το μέγεθος των σωματιδίων αυξάνεται η εξάρτιση της ικανότητας σκέδασης από το μ.κ. της προσπίπτουσας ακτινοβολίας συνεχώς ελαττώνεται. Για σωματίδια που είναι του μεγέθους ή και μεγαλύτερα του προαναφερόμενου μ.κ., το φαινόμενο πλέον μπορεί να μελετηθεί από τη θεωρία της περίθλασης παρά της σκέδασης. Όταν βέβαια τα σωματίδια είναι πολύ μεγαλύτερα του μ.κ. της προσπίπτουσας, οι διαδικασίες της διάδοσης περιγράφονται από τις θεωρίες της ανάκλασης και της διάθλασης. Τότε θα υφίσταται πολύ μικρή διαφορά στην εξάρτηση της ανακλαστικότητας και της διαθλαστικότητας από τα μικρά ή τα μεγάλα μ.κ. με συνέπεια το 'σκεδανύμενο' π.χ. λευκό φως από τα σωματίδια να φαίνεται πάλι λευκό δηλ. της ίδιας χρωματικότητας με το προσπίπτον.

Στα (Σχ. 6.3.1.3) μπορούμε να δούμε ποιοτικά τα πολικά διαγράμματα του σκεδανύμενου φωτός: (α) Για σωματίδια Rayleigh (το μοντέλο εκπομπής των οποίων περιγράφεται από τη (σχ. 6.3.1.1). Εδώ το σωματίδιο σκεδανύει το φως σχεδόν προς οποιαδήποτε διεύθυνση με την ίδια ισχύ προς τα μπρος και πίσω. Αλλά με μικρότερη τιμή έντασης κατά τη διεύθυνση της ταλάντωσης (κάθετη σ' αυτήν της προσπίπτουσας ακτινοβολίας). (β) Σωματίδια που το μέγεθός τους είναι περίπου ίσο ή λίγο μεγαλύτερο από το μ.κ. της προσπίπτουσας, σκεδανύουν το φως κατά προτίμηση σε κατευθύνσεις που σχηματίζουν μικρές γωνίες με τη διεύθυνσή της. (γ) Τα σωματίδια που το μέγεθός τους είναι πολύ μεγάλο σε σχέση με το μ.κ. της

προσπίπτουσας, σκεδανύουν το φως προς τα εμπρός, αλλά πολύ ελάχιστα αντίθετα σε σχέση με τη διεύθυνση διάδοσης της τελευταίας. Οπότε ουσιαστικά δεν έχουμε αλλαγή της διεύθυνσης της προσπίπτουσας.



(Σχ. 6.3.1.3)

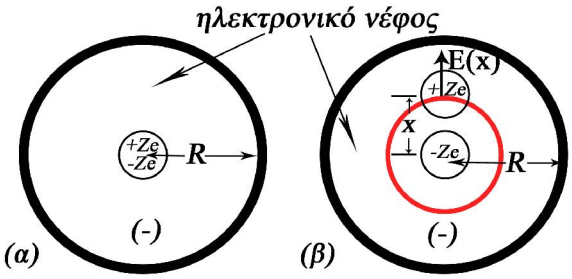
Ένα κλασσικό παράδειγμα της σκέδασης του λευκού φωτός από σωματίδια με διαφορετικό μέγεθος είναι αυτό του καπνού που προέρχεται από ένα αναμμένο τσιγάρο. Το λευκό φως μπορεί να προέρχεται από μια λάμπα φθορισμού στο εσωτερικό ενός δωματίου ή να είναι το ηλιακό. Παρατηρούμε ότι ο καπνός που προέρχεται από την άκρη του τσιγάρου έχει τιρκουάζ απόχρωση. Πράγματι τα σωματίδια της αιθάλης από τα οποία κατά βάση συντίθεται ο καπνός είναι της τάξης του δέκατου ή του εκατοστού του μικρού (μm) ενώ το μέσο μ.κ. του λευκού φωτός έχει $\lambda = 0.5\,\mu m$. Επομένως ισχύουν οι συνθήκες σκέδασης Rayleigh. Έτσι για οποιαδήποτε διεύθυνση πρόσπτωσης σ' αυτά του λευκού φωτός (αν εξαιρέσουμε τη διεύθυνση πηγή-σωματίδια- παρατηρητής), η προεξάρχουσα σκεδανύμενη ακτινοβολία προς το μάτι μας θα είναι στην ιώδη-μπλε περιοχή του ορατού φάσματος. Εξ ου και η τιρκουάζ απόχρωση του καπνού η αναδυομένη από την άκρη του τσιγάρου. Δεν συμβαίνει όμως το ίδιο για τον καπνό που βγαίνει από το στόμα του καπνιστή. Στην περίπτωση αυτή τα σωματίδια της αιθάλης μετά την προσρόφησή τους και τη δίοδό τους στους πνεύμονές του, συλλέγουν σωματίδια νερού με συνέπεια το μέγεθός τους ν' αυξηθεί σημαντικά. Η σκέδαση τώρα ερμηνεύεται από τη θεωρία του Mie. Δηλ. το σκεδανύμενο προς τα εμάς φως δεν παρουσιάζει πλέον αισθητή εξάρτηση από το μ.κ. Επομένως η απόχρωση αυτού του καπνού είναι λευκή.

Σημαντικά φαινόμενα που ερμηνεύονται με τη βοήθεια της θεωρίας του Mie έχουμε από τους χώρους της Χημείας , της Αστρονομίας και της Μετεωρολογίας. Φαινόμενα που σχετίζονται με την ομίχλη, τα σύννεφα τη βροχή και τα αερολύματα καθώς και τη διάδοση των ακτινοβολιών radar διαμέσου τους, ακόμα και η

εμφάνιση (όψη) κοινών υλικών όπως το γάλα και η ζάχαρη, αποτελούν πεδίο εφαρμογής της προαναφερόμενης θεωρίας.

γ) Ένα απλοποιημένο μοντέλο για τη σκέδαση από τα μόρια της ατμόσφαιρας, που βασίζεται στο πρότυπο εκπομπής του απλού αρμονικού ταλαντωτή

Θα θεωρήσουμε κατ' αρχή ότι η ατμόσφαιρα αποτελείται από μόρια οξυγόνου (ενώ στην πραγματικότητα τα βασικά συστατικά του είναι O_2 και N_2 σε αναλογία ¼). Μας είναι όμως γνωστό (βλ. ΕΡΓΑΣΤ/ΚΗ ΟΠΤΙΚΗ [5]: Π.Α.Α.Φ. (§ 4.1)) ότι κάθε μόριο συμπεριφέρεται σαν ηλεκτρικό δίπολο. Επειδή τα μόρια του οξυγόνου είναι μη πολικά σημαίνει ότι τα κέντρα βάρους των θετικών και των αρνητικών φορτίων του πυρήνα και των ηλεκτρονίων σε συνθήκες ισορροπίας συμπίπτουν. Θα υποθέσουμε ότι το φορτίο του πυρήνα βρίσκεται ακίνητο στο κέντρο του. Επίσης λόγω της κίνησης των ηλεκτρονίων το αρνητικό φορτίο θα κατανέμεται σε μια σφαίρα ακτίνας R που θα περιβάλλει τον πυρήνα (Σχ. 6.3.1.4α). Το παραπάνω μοντέλο του μορίου είναι εντελώς ανάλογο μ' αυτό του Thomson, μόνο



(Σχ. 6.3.1.4)

που στο τελευταίο κατά τα γνωστά, στο κέντρο της σφαίρας βρίσκονται τα αρνητικά φορτία τα οποία περιβάλλονται από την κατανομή των θετικών φορτίων σε σφαίρα ακτίνας R.

Θέλουμε να δούμε τη ακριβώς θα συμβεί αν κατά κάποιο τρόπο το κέντρο βάρους του αρνητικού φορτίου του μορίου, μετακινηθεί σε σχέση με το θετικό κατά μία απόσταση x και κατόπιν αφεθεί ελεύθερο. Στην περίπτωση αυτή η δύναμη που θα ασκηθεί μεταξύ τους θα είναι:

$$F = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{Z^2e^2}{R^3}x \qquad (6.3.1.2)$$

όπου Z ο αριθμός των ηλεκτρονίων και e το στοιχειώδες φορτίο του ενός. Δηλαδή

Σημείωση

Η παραπάνω σχέση αποδεικνύεται εύκολα εάν εφαρμόσουμε το θεώρημα του Gauss με την ολοκληρωτική του μορφή (βλ. ΠΑΡ/ΜΑ 1) Πράγματι στην περίπτωση αυτή (Σχ. 6.3.1.4β) το αρνητικό φορτίο $-Ze$ απέχει απόσταση x από τη θέση που βρίσκεται όπως υποθέσαμε θετικό φορτίο $+Ze$. Για να υπολογίσουμε τη δύναμη που ασκείται στη θέση του $+Ze$ θα πρέπει πρώτα να υπολογίσουμε το ηλεκτρικό πεδίο που υφίσταται στην ίδια θέση. Θα είναι το πεδίο στην επιφάνεια μιας υποθετικής σφαίρας ακτίνας x που έχει το ίδιο κέντρο με αυτή της σφαίρας με ακτίνα R.

Η πυκνότητα φορτίου χώρου της σφαίρας με ακτίνα R θα είναι $\rho = -Ze/(4/3)\pi R^3$. Το άθροισμα $\sum q$ των φορτίων στο εσωτερικό της σφαίρας με ακτίνα x θα είναι: $\sum q = \rho(4/3)\pi x^3$. Τότε η εφαρμογή του θεωρήματος του Gauss για τη σφαίρα ακτίνας x που περιβάλλει τα φορτία $\sum q$ μας δίνει:

$$\Phi_E = \oiint_S \mathbf{E}(x)\cdot d\mathbf{s} = \frac{1}{\varepsilon_0}\sum q$$

όπου $\mathbf{E}(x)$ το πεδίο σε απόσταση x από το κέντρο της κατανομής των αρνητικών φορτίων και $d\mathbf{s} = ds\mathbf{n}$ το διάνυσμα με μέτρο τη στοιχειώδη επιφάνεια ds στη θέση αυτή και φορά προς τα εξωτερικά της επιφάνειας που καθορίζεται από το μοναδιαίο διάνυσμα $\mathbf{n}$. Επειδή $\mathbf{E}(x)$ και $d\mathbf{s}$ είναι συγγραμμικά τότε:

$$\oiint_S \mathbf{E}(x)\cdot d\mathbf{s} = \iint_S E(x)\,ds = E(x)\iint_S ds = E(x)4\pi x^2 = \frac{1}{\varepsilon_0}\sum q \Rightarrow$$

$$E(x)4\pi x^2 = (1/\varepsilon_0)\rho(4/3)\pi x^3 \Rightarrow E(x) = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Ze}{R^3}x$$

σε κάθε σημείο της επιφάνειας της σφαίρας ακτίνας x. Επομένως η δύναμη που θα ασκείται στο φορτίο $+Ze$ θα είναι:

$$F = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{Z^2e^2}{R^3}x \;\rightarrow\; \text{(σχ. 6.3.1.2)}$$

μια δύναμη της μορφής:

$$F = -\kappa x \qquad (6.3.1.3)$$

Είναι γνωστό όμως ότι αν η δύναμη επαναφοράς είναι της μορφής της (σχ. 6.3.1.3) τότε θα έχουμε αρμονική ταλάντωση του ηλεκτρονικού νέφους σε σχέση με τον πυρήνα. Πράγματι για $F = -\kappa x$ η διαφ. εξίσωση κίνησης του φορτίου θα είναι: $m\left(d^2x/dt^2\right) = -\kappa x$ όπου m η μάζα του. Μια λύση αυτής της εξίσωσης είναι η $x = x_0 \cos\omega_0 t$. Τότε $m\left(d^2x/dt^2\right) = -m\omega_0^2 x_0 \cos\omega t$ και άρα $-m\omega_0^2 x_0 \cos\omega t =$ $= -\kappa x_0 \cos\omega_0 t$ οπότε: $\omega_0^2 = \kappa/m \Rightarrow \omega_0 = \sqrt{\kappa/m} \Rightarrow \nu_0 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{\kappa}{m}}$. Όπου ν_0 η ***φυσική συχνότητα (natural frequency)*** ταλάντωσης. Επειδή όμως στην περίπτωσή μας $m = Zm_e$ τότε:

$$\nu_0 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{\kappa}{m}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Z^2e^2}{R^3Zm_e}} = \frac{e}{4}\sqrt{\frac{Z}{\varepsilon_0\pi^3R^3m_e}} \qquad (6.3.1.4)$$

όπου m_e η μάζα του ηλεκτρονίου.

Θα είναι χρήσιμο να υπολογίσουμε την τάξη μεγέθους της συχνότητας ν_0 για το οξυγόνο για το οποίο $Z = 8$. Πράγματι στο M.K.S. σύστημα μονάδων $e = 1.6\times10^{-16}\,\mathrm{C}$, $m_e = 9.1\times10^{-31}\,\mathrm{kgr}$ και $1/4\pi\varepsilon_0 = 9\times10^9\,\mathrm{C}^2/\mathrm{Nt}\cdot\mathrm{m}^2$. Επίσης είναι γνωστό ότι οι διαστάσεις του ατόμου του οξυγόνου είναι μερικά Å. Άρα $R \simeq 10^{-10}\,\mathrm{m}$ και επομένως η (σχ. 6.3.1.4) μας δίνει $\nu_0 = 7.2\times10^{15}\,\mathrm{Hz}$. Η συχνότητα αυτή με βάση τη θεμελιώδη εξίσωση της κυματικής θ' αντιστοιχεί σε μήκος κύματος: $\lambda_0 = c/\nu_0 = 0.42\times10^{-7}\,\mathrm{m} = 42\mathrm{nm}$, το οποίο σαφώς ανήκει στην υπεριώδη περιοχή του Η/Μ φάσματος. Μας είναι γνωστό βέβαια ότι μια Η/Μ διαταραχή που ανήκει στη μέση περιοχή του ορατού φάσματος έχει συχνότητα περίπου $\nu = 0.6\times10^{15}\,\mathrm{Hz}$ και θα αντιστοιχεί σε μ.κ. $\lambda = 550\mathrm{nm}$.

Θεωρούμε τώρα ότι τα άτομα του οξυγόνου υφίστανται την επίδραση ενός Η/Μ πεδίου. Δηλ. σ' αυτά προσπίπτει ένα επίπεδο μετ. κύματος συχνότητας ν, που ανήκει στην ορατή περιοχή του φάσματος. Τότε τα άτομα θα αρχίσουν να εκτελούν εξαναγκασμένες ταλαντώσεις. Δεδομένου όμως ότι οι η συχνότητα ν ανήκει στην ορατή περιοχή και η συχνότητα συντονισμού τους ν_0 στην υπεριώδη περιοχή (όπως αποδείξαμε προηγουμένως) δεν θα έχουμε φαινόμενα απορρόφησης αλλά επανεκπομπή της ακτινοβολίας σύμφωνα με τα αναφερόμενα στο (Κεφ. 2). Δηλ. τα άτομα του οξυγόνου θα εκτελούν εξαναγκασμένες ταλαντώσεις με πλάτος

$x = x_0 \cos \omega t$ ίδιας συχνότητας $\omega = 2\pi\nu$ με την προσπίπτουσα διαταραχή όπου x_0 το μέγιστο πλάτος τους που θα δίνεται από τη σχέση:

$$x_0 = \frac{Ze/Zm_e}{\omega_0^2 - \omega^2} E_0 = \frac{eE_0}{4\pi^2 \left(\nu_0^2 - \nu^2\right) m_e} \tag{6.3.1.5}$$

(βλ. ΕΡΓΑΣ/ΚΗ ΟΠΤΙΚΗ [5]: Π.Α.Α.Φ. ((§ 4): (σχ.4.1.12,13,14)). Zm_e η συνολική του μάζα , Ze το συνολικό φορτίο του ατόμου και E_0 το μέγιστο πλάτος του εξωτερικά ασκούμενου ηλ. πεδίου. Επειδή όμως από το προηγούμενο αριθμητικό μας παράδειγμα $\nu < \nu_0$ τότε $\nu^2 \ll \nu_0^2$. Επομένως η (σχ. 6.3.1.5) γίνεται:

$$x_0 = eE_0 \big/ 4\pi^2 m_e \nu_0^2 \tag{6.3.1.6}$$

Μας είναι όμως γνωστό (βλ. ΕΡΓΑΣ/ΚΗ ΟΠΤΙΚΗ [5]: Π.Α.Α.Φ. ((§ 1.2): (σχ. 1.2.4))). ότι το πλάτος $E_0(r,\theta)$ της έντασης του πεδίου του εκπεμπόμενου από το ταλαντούμενο ατομικό δίπολο του οξυγόνου δίνεται από τη σχέση:

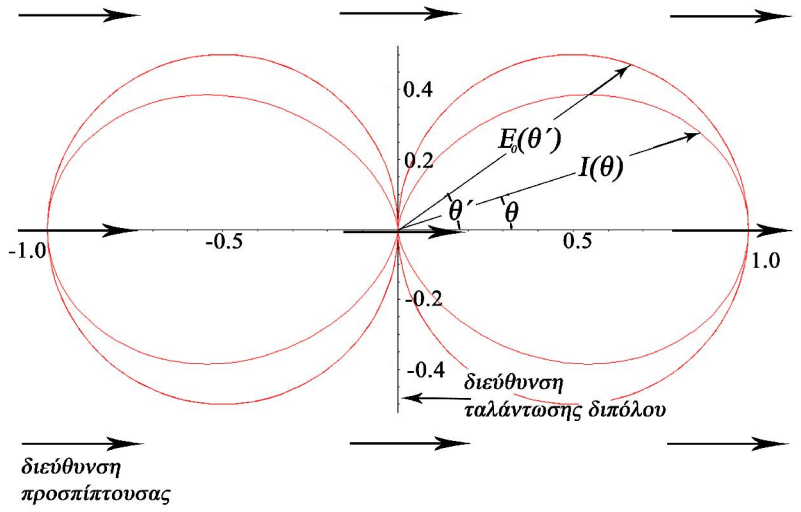
$$E_0(r,\theta) = -\frac{k^2}{4\pi\varepsilon_0} \frac{p_0 \sin\theta}{r} \tag{6.3.1.7}$$

όπου $k = (\omega/c) = 2\pi\nu/c$, $p_0 = Zex_0$ η μέγιστη ηλ. διπολική ροπή , r η απόσταση από κέντρο του διπόλου στη θέση υπολογισμού του πεδίου και θ η γωνία που σχηματίζει η διεύθυνση διάδοσης με τη διεύθυνση ταλάντωσης. Η αντίστοιχη ένταση $I(r,\theta)$ της ακτινοβολίας του ταλαντούμενου διπόλου κατά τα γνωστά θα δίνεται από τη σχέση : $I(r,\theta) = (1/2) c\varepsilon_0 E_0^2(r,\theta)$ και τελικά σε συνδυασμό με τη (σχ. 6.3.1.7):

$$I(r,\theta) = \frac{1}{32\pi^2\varepsilon_0} \frac{Z^2 e^4 E_0^2}{m_e^2 c^3} \left(\frac{\nu^4}{\nu_0^4}\right) \frac{\sin^2\theta}{r^2} \tag{6.3.1.8}$$

Τα πολικά διαγρ. των $E_0(\theta)$, $I(\theta)$ για $r =$ σταθ. $-\pi/2/ \le \theta \le \pi/2$, $0 \le \phi \le 2\pi$ δίνονται στο (Σχ. 2.1.7). Πρόκειται για συμμετρικά τοροϊδή ως προς τον άξονα ταλάντωσης του διπόλου. Στο (Σχ. 6.3.1.5) δίνεται μια τομή του τοροϊδούς στο επίπεδο που περιλαμβάνει τον άξονα ταλάντωσης και την διεύθυνση διάδοσης της προσπίπτουσας ακτινοβολίας. Βλέπουμε χαρακτηριστικά ότι η σκεδανύμενη ακτινοβο-

λία διαμοιράζεται κατά το ίδιο ποσοστό προς τα μπρος (διεύθυνση πρόσπτωσης) και προς τα πίσω. Σε αντίθεση με τη σκέδαση κατά Rayleigh όμως εδώ δεν υφίσταται σκεδαζόμενη ακτινοβολία κατά μήκος του άξονα ταλάντωσης.



(Σχ. 6.3.1.5)

Γνωρίζουμε όμως ότι η ένταση I_{ins} της προσπίπτουσας ακτινοβολίας δίνεται από τη σχέση:

$$I_{ins} = \frac{1}{2} c\varepsilon_0 E_0^2 \tag{6.3.1.9}$$

Επομένως για N ταλαντούμενα άτομα ανά μονάδα όγκου ο λόγος $NI(r,\theta)/I_{ins}$ θα είναι:

$$\frac{NI(r,\theta)}{I_{ins}} = \frac{1}{16\pi^2\varepsilon_0^2}\frac{NZ^2e^4}{m_e^2c^4}\left(\frac{\nu^4}{\nu_0^4}\right)\frac{\sin^2\theta}{r^2} = \frac{1}{16\pi^2\varepsilon_0^2}\frac{NZ^2e^4}{m_e^2c^4}\left(\frac{\lambda_0^4}{\lambda^4}\right)\frac{\sin^2\theta}{r^2} \tag{6.3.1.10}$$

που μας δίνει την ένταση της σκεδανύμενης ακτινοβολίας ανά μονάδα προσπίπτουσας έντασης στα N άτομα ανά μονάδα όγκου. λ το μ.κ. της προσπίπτουσας ακτινοβολίας και λ_0 το μ.κ. συντονισμού. Βασικής σημασίας συμπέρασμα προερχόμενο από τη (σχ. 6.3.1.10) είναι ότι η σκεδανύμενη ένταση ακτινοβολίας (από τα άτομα του οξυγόνου στην προκειμένη περίπτωση) είναι ανάλογη της τέταρτης δύναμης της συχνότητας της προσπίπτουσας ακτινοβολίας$\left(\sim \nu^4\right)$ ή ισοδύναμα, αντιστρόφως ανάλογη της τέταρτης δύναμης του μ.κ. της$\left(\sim 1/\lambda^4\right)$.Τελικά καταλήξαμε στο ίδιο

περίπου συμπέρασμα με αυτό της θεωρίας σκέδασης κατά Rayleigh (σχ. 6.3.1.1) (δηλ. η εκπεμπόμενη – σκεδανύμενη ακτινοβολία είναι $\sim 1/\lambda^4$) με μόνη διαφορά την πολική κατανομή της στο χώρο: $I(r,\theta) \sim \sin^2\theta/r^2$ το πρότυπο εκπομπής του απλού αρμονικού ταλαντωτή (ταλάντωση ατόμου του οξυγόνου) και $I(r,\theta) \sim \left(1+\cos^2\theta\right)/r^2$ το πρότυπο εκπομπής κατά Rayleigh (σκέδαση από σωματίδιο διαμέτρου d και δ.δ. n). Πράγματι από την τελευταία σχέση διαπιστώνουμε ότι ακόμα και για $d/\lambda \ll$ (d διάμετρος σωματιδίου, λ μ.κ. προσπίπτουσας ακτινοβολίας) – συνθήκη στην οποία υπακούει η διαδικασία της σκέδασης από τα άτομα του οξυγόνου – (αν και δεν μπορούμε να προσάψουμε στο καθένα τους δείκτη διάθλασης), υφίσταται ποσοστό σκεδανύμενης ακτινοβολίας κατά τη διεύθυνση ταλάντωσης (Σχ. 6.3.1.2). Σε αντιδιαστολή στη διεύθυνση αυτή για τον απλό αρμονικό ταλαντωτή η ακτινοβολούμενη ισχύς ανά μονάδα επιφάνειας είναι μηδενική (Σχ. 6.3.1.5).

Τα χρώματα του ουρανού

Αν η επιφάνεια της γης δεν καλυπτόταν από το στρώμα της ατμόσφαιρας και αν δεν υπήρχαν τα γνωστά αερολύματα, η σκόνη και διάφορα άλλα αιωρούμενα μικροσωματίδια και υδρατμοί, τότε η θέα του ουρανού μας την ημέρα θα ήταν εντελώς διαφορετική από αυτήν που γνωρίζουμε. Π.χ. δεν θα υπήρχαν οι οικείοι σ' εμάς χρωματισμοί του ορίζοντα κατά την ανατολή και τη δύση του ηλίου και το κυριότερο, αν στρέφαμε το βλέμμα μας προς τα πάνω ο ουρανός θα ήταν εντελώς σκοτεινός. Κάτι αντίστοιχο θα βλέπαμε αν βρισκόμασταν στην επιφάνεια της σελήνης.

Η ερμηνεία του μπλε χρώματος του ουρανού και οι πορφυρές αποχρώσεις του ορίζοντα κατά την ανατολή και τη δύση του ηλίου στηρίζεται κατά κύριο λόγο σε δύο βασικούς παράγοντες: α) Το ότι το φως που προέρχεται από τον ήλιο σκεδάζεται από τα μόρια του στρώματος της ατμόσφαιρας και των λοιπών σωματιδίων και β) Στην υποκειμενική αίσθηση της αντίληψης των χρωμάτων από τον εκάστοτε παρατηρητή. Τα ποσοτικά συμπεράσματα της σκέδασης προκύπτουν από τις προαναφερθείσες θεωρίες των Rayleigh και Mie για σωματίδια διαμέτρου d και δ.δ. n και για τα μόρια που συγκροτούν την ατμόσφαιρα από την κλασσική Η/Μ θεωρία της εκπομπής ακτινοβολίας από απλό αρμονικό ταλαντωτή. Τα ποσοτικά συμπεράσματα όσον αφορά τη 'μέτρηση' του χρώματος, προέρχονται από τον τρόπο λήψης της οπτικής πληροφορίας από τους φωτοευαίσθητους ανιχνευτές, που βρίσκονται κυρίως την ωχρά κηλίδα του αμφιβληστροειδή του ματιού του παρατηρητή (τα κωνία) (βλ. ΕΡΓΑΣΤ/ΚΗ ΟΠΤΙΚΗ [1]: Γεωμετρική Οπτική (§ 11.1):Το ανθρώπι-

νο μάτι)). Και κατά προέκταση μέσω του συσχετισμού αυτών των πληροφοριών στον οπτικό φλοιό του εγκεφάλου. Τελικό αποτέλεσμα της διαδικασίας αυτής είναι η ανάδειξη της καμπύλης ευαισθησίας $V(\lambda)$ του ματιού, η οποία μας δείχνει εκτός των άλλων σε ποιες περιοχές του Η/Μ φάσματος αντιλαμβανόμαστε καλύτερα τα χρώματα (βλ. ΕΡΓΑΣ/ΚΗ ΟΠΤΙΚΗ [5]: Π.Α.Α.Φ. (ΠΑΡ/ΜΑ 2)) δηλ. σε ποιες περιοχές το μάτι μας έχει τη μεγαλύτερη ευαισθησία.

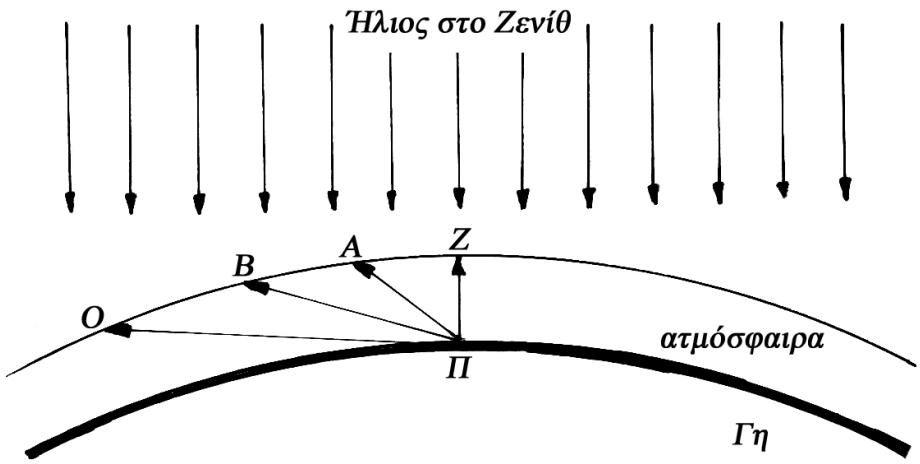
α) Το μπλε του ουρανού

Η ατμόσφαιρα αποτελείται από ένα στρώμα αέρα (με τη γνωστή αναλογία οξυγόνου και αζώτου) που περιβάλλει τη γη. Η κατανομή της καθ' ύψος δεν είναι ομογενής αλλά σε πρώτη προσέγγιση και υποθέτοντας ότι υφίσταται αφ' ενός θερμική ισορροπία και αφ' ετέρου η επιτάχυνση της βαρύτητας είναι σταθερή, ακολουθεί όσον αφορά την πυκνότητά της (ή τον αριθμό των μορίων ανά μονάδα όγκου) τον ***βαρομετρικό τύπο***. Δηλ. μια εκθετική ελάττωση καθ' ύψος. Π.χ. σε ύψος 10km από την επιφάνεια της γης, η πυκνότητα των μορίων του οξυγόνου ελαττώνεται στο μισό περίπου αυτής που είχε στην επιφάνεια.

Υποθέτουμε (Σχ. 6.3.1.6), ότι βρισκόμαστε στη θέση Π της επιφάνειας της γης και ότι ο ήλιος βρίσκεται κατακόρυφα από πάνω μας (στο Ζενίθ). Αν τότε παρατηρήσουμε προς μία κατεύθυνση (έστω την ΠΑ), χωρίς ο ήλιος να βρίσκεται στο πεδίο μας, τότε βλέπουμε ότι το χρώμα του ουρανού είναι το χαρακτηριστικό μπλε (Εικ. 6.3.1.7). Όπως έχουμε αποδείξει προηγουμένως οι συχνότητες συντονισμού για τα άτομα του οξυγόνου (το ίδιο ισχύει και γι' αυτά του αζώτου) βρίσκονται στην υπεριώδη περιοχή του Η/Μ φάσματος με $\lambda \simeq 50\text{nm}$. Άρα δεν θα έχουμε απορρόφηση στην ορατή περιοχή οπότε η τελευταία θα υφίσταται ισχυρή σκέδαση. Δεδομένου όμως ότι η ένταση της σκεδανύμενης ακτινοβολίας είναι ανάλογη (σχ. 6.3.1.10) του $1/\lambda^4$ η μπλε−ιώδης περιοχή του φάσματος θα σκεδαστεί πολύ πιο ισχυρά. Π.χ. από το (Σχ. 6.3.1.8) βλέπουμε ότι το άκρο του κόκκινου $(\lambda \simeq 720\text{nm})$ έχει μ.κ. 1.8 φορές μεγαλύτερο από το άκρο του ιώδους $(\lambda \simeq 400\text{nm})$. Επομένως ο νόμος προβλέπει $(1.8)^4 \simeq 10$ φορές ισχυρότερη σκέδαση της ιώδους περιοχής σε σχέση με την κόκκινη.

Επομένως από τη περιοχή Α − στην οποία έχουμε στραμμένο το βλέμμα μας − θα δεχτούμε περισσότερη ακτινοβολία από το μπλε−ιώδες τμήμα του σκεδανύμενου φάσματος παρά από το κόκκινο. Το σκεδανύμενο κόκκινο, θα έχει ως επί το πλείστον κυρίαρχη κατεύθυνση αυτήν της προσπίπτουσας και μικρό μόνο τμήμα του θα δέχεται το μάτι μας.

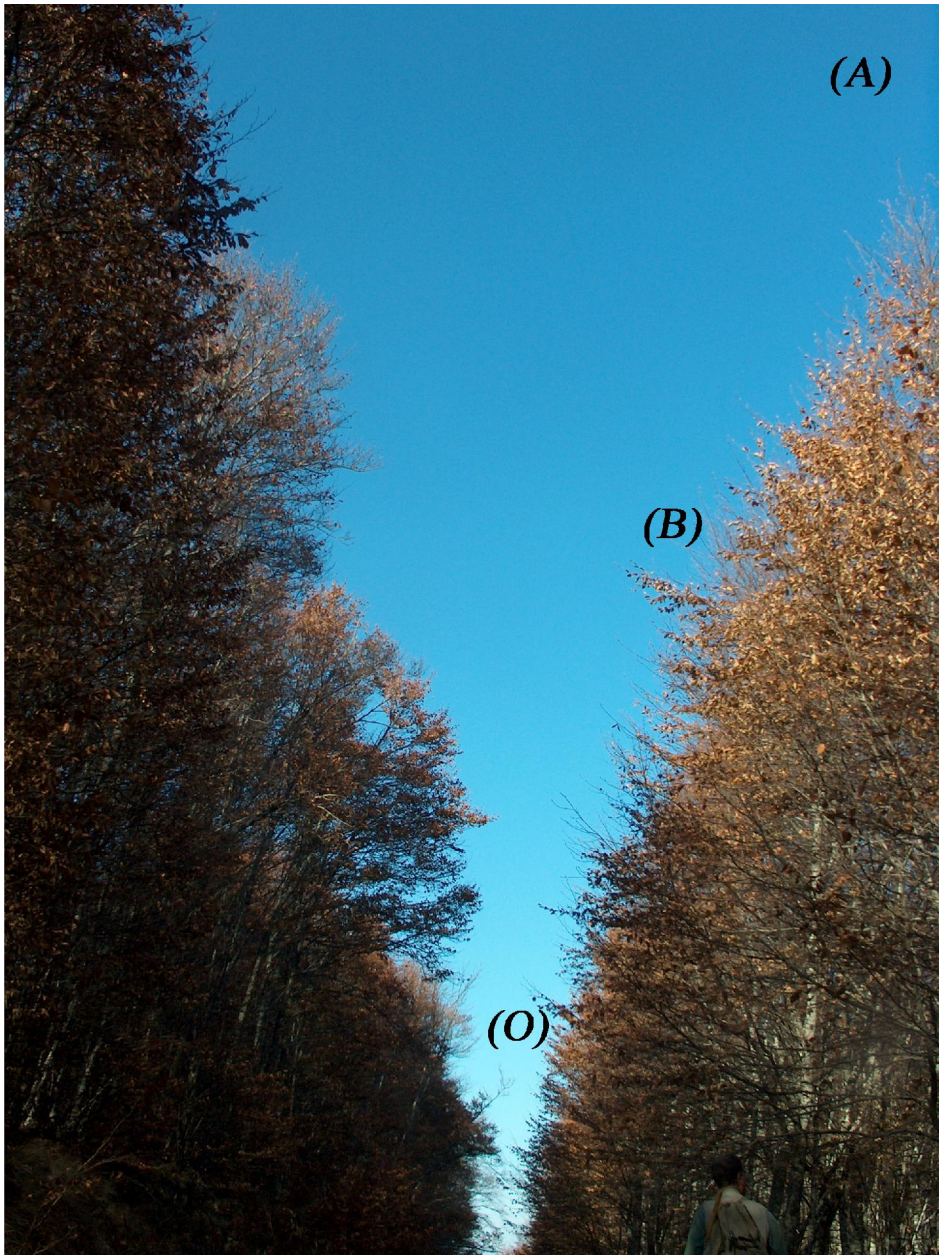
Προκύπτει όμως ένα εύλογο ερώτημα. Γιατί το χρώμα του ουρανού προς την κατεύθυνση που αναφέραμε είναι μπλε απόχρωσης και όχι ιώδους, δεδομένου ότι η σκέδαση από την περιοχή αυτή του φάσματος είναι ισχυρότερη από ότι της μπλε. Αν και μια τελική εξήγηση του φαινομένου δεν είναι ακόμα συνολικά αποδεκτή, μπορούμε να δώσουμε μια ερμηνεία λαμβάνοντας υπόψη μας τον τρόπο με τον οποίο ο παρατηρητής 'βλέπει' τα χρώματα μέσω του οπτικού συστήματος του ματιού και του εγκεφάλου του. Πράγματι όπως προαναφέραμε, η απαρχή της αναγνώρισης της χρωματικότητας (αντίληψης) των ακτινοβολιών διαφορετικών μ.κ. ή φασματικών κατανομών της ορατής περιοχής, γίνεται σε πρώτη φάση στον αμφιβληστροειδή του ματιού του όπου σχηματίζονται και τα είδωλα των αντικειμένων. Ειδικότερα



(Σχ. 6.3.1.6)

στην ωχρά κηλίδα, υπεύθυνης της φωτοπτικής τριχρωματικής όρασης. Εκεί υπάρχουν τριών ειδών κύτταρα τα κωνία, τα οποία έχουν διαφορετική απόκριση (όσον αφορά την απορροφητικότητά τους) για τα διάφορα μ.κ. (Σχ. 6.3.1.9).

Όπως βλέπουμε οι καμπύλες αυτές τις οποίες ονομάζουμε *R,G,B* έχουν μέγιστα αντίστοιχα στην κιτρινοπράσινη περιοχή $(\lambda_R \simeq 564\text{nm})$, την πράσινη $(\lambda_G \simeq 534\text{nm})$ και την μπλε−ιώδη $(\lambda_B \simeq 420\text{nm})$. Όμως παρατηρούμε ότι οι καμπύλες των κωνίων *R* και *G* αναπτύσσονται με τέτοιο τρόπο, έτσι ώστε να απορροφούν σημαντικά και στην περιοχή του μέγιστου της καμπύλης *B*. Επομένως οι φωτουποδοχείς *R,G,B* έχουν την ικανότητα ν' απορροφήσουν με μεγάλη αποδοτικότητα το μέγιστο ποσοστό της σκεδανύμενης ιώδους, με σχετικά μικρότερη την μπλε (απότομη κλίση καμπύλης *B* στην μπλε περιοχή (Σχ. 6.3.1.9)) και με την ίδια περίπου αποδοτικότητα (όπως της μπλε) την έστω και σε μικρότερο ποσοστό σκεδανύ-

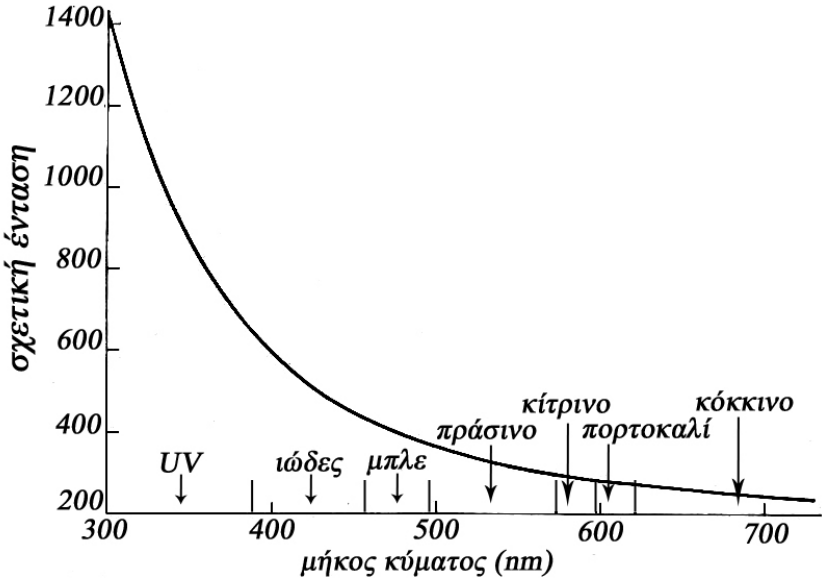


(Εικ. 6.3.1.7)

μενη, στην πράσινη και κόκκινη περιοχή του ορατού φάσματος. Αυτές είναι οι πληροφορίες που στέλνονται στον οπτικό φλοιό του εγκεφάλου μας για τελική επεξεργασία, με αποτέλεσμα την αντίληψη από μέρους μας του μπλε χρώματος του ουρανού.

Το ότι υπερτερεί χρωματικά το μπλε έναντι του ιώδους, μπορούμε να το δούμε άμεσα και από την ***καμπύλη απόκρισης*** του ματιού $V(\lambda)$ ενός μέσου παρατηρητή (βλ. ΕΡΓΑΣΤ/ΚΗ ΟΠΤΙΚΗ [5]: Π.Α.Α.Φ. (ΠΑΡ/ΜΑ 2), (Σχ. 2.1) και (Πίν. 2.2)). Η καμπύλη αυτή παρατίθεται στο (Σχ. 6.3.1.9). Εκεί διαπιστώνουμε ότι η απόκριση του ματιού στο ιώδες είναι πάρα πολύ μικρή (παρά το μέγιστο ποσοστό της σκεδα-

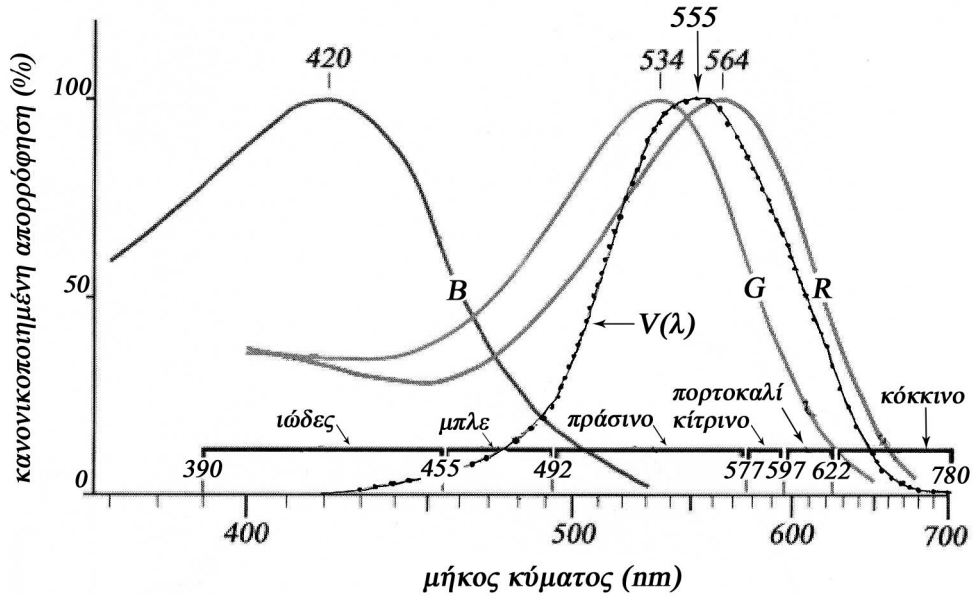
νύμενης ιώδους ακτινοβολίας), σε αντίθεση με την απόκριση στις μπλε και πράσινες περιοχές που είναι πολύ μεγάλη (παρά το μικρότερο ποσοστό της σκεδανύμενης μπλε και πράσινης ακτινοβολίας). Θα πρέπει να παρατηρήσουμε ότι στο (Σχ. 6.3.1.9) η $V(\lambda)$ δεν εμφανίζεται συμμετρική ως προς το μ.κ. $\lambda \simeq 555\text{nm}$ (μέγιστο απόκρισης). Το γεγονός οφείλεται στο ότι η κλίμακα των μ.κ. στο σχήμα δεν είναι γραμμική.



(Σχ. 6.3.1.8)

Το μπλε του ουρανού είναι κορεσμένο (για την περίπτωση που έχουμε καθαρό ουρανό) στην περιοχή περίπου του ζενίθ (κατεύθυνση *ΠΖ* (Σχ. 6.3.1.6)) αλλά γίνεται όλο και περισσότερο ακόρεστο (δηλ. μπλε ανοιχτό) καθώς αντικρίζουμε περιοχές στις κατευθύνσεις *ΠΑ,ΠΒ* κ.λ.π. (Εικ. 6.3.1.7). Βλέποντας προς την κατεύθυνση του ορίζοντα (διεύθυνση *ΠΟ*) μπορεί να πάρει και την απόχρωση του άσπρου. Η ερμηνεία αυτού του φαινόμενου οφείλεται στο ότι το φως που σκεδανύεται από αυτές τις περιοχές, προέρχεται εν γένει από τα χαμηλότερα στρώματα της ατμόσφαιρας. Επίσης το διανυόμενο διάστημα της σκεδανύμενης ακτινοβολίας είναι μεγαλύτερο από ότι αυτό με κατεύθυνση από το ζενίθ προς τον παρατηρητή (*ΟΠ>ΖΠ*). Στα χαμηλότερα στρώματα όμως της ατμόσφαιρας, συνυπάρχουν και σωματίδια σκόνης, υδρατμών και αερολύματα. Το μέγεθος των τελευταίων κατά τα γνωστά είναι μεγαλύτερο εν γένει από το μέσο μ.κ. της περιοχής του ορατού. Επομένως εκτός της σκέδασης από τα άτομα του αέρα, θα έχουμε και σκέδαση Mie καθώς και ανακλάσεις και διαθλάσεις του προσπίπτοντος λευκού φωτός από τα πολύ μεγάλα σωματίδια. Γνωρίζουμε όμως ότι τα προαναφερόμενα φαινόμενα δεν παρουσιάζουν ιδιαίτερη επιλεκτικότητα όσον αφορά το μ.κ. της 'σκεδανύμενης' από αυτά ακτινοβολίας κατά την πρόσπτωση του λευκού φωτός. Για το λόγο αυτό το

φως που δέχεται ο παρατηρητής περιλαμβάνει όλα τα μ.κ. Δηλ. θα έχει την αντίληψη του λευκού. Με την ίδια ακριβώς διαδικασία ερμηνεύεται και το χρώμα των άσπρων νεφώ (Εικ. 6.3.1.10) και της ομίχλης που αποτελούνται κατά βάση από



(Σχ. 6.3.1.9)

σταγονίδια νερού με διάμετρο πολύ μεγαλύτερη από το μέσο μ.κ. της προσπίπτουσας από τον ήλιο ακτινοβολίας. Οι περιοχές που εμφανίζονται γκρίζες ή τελείως σκοτεινές στο λευκό υπόβαθρο του νέφους, οφείλονται κατά βάση στη μερική ή ολική απορρόφηση του ηλιακού φωτός λόγω του διανυόμενου μεγάλου πάχους στο εσωτερικό του.

Τέλος θα πρέπει ν' αναφέρουμε ότι η σκέδαση Rayleigh που οφείλεται στα μόρια της ατμόσφαιρας, ενισχύεται σημαντικά από τη σκέδαση του φωτός λόγω όμως των διαταραχών στην πυκνότητά της. Πράγματι γνωρίζουμε ότι τα μόρια (π.χ. του οξυγόνου) σε κανονική θερμοκρασία κινούνται με ταχύτητες της τάξης $\upsilon_{rms} \simeq 500\,\mathrm{m/s}$. Γνωρίζουμε επίσης η κίνηση αυτών των μορίων είναι χαοτική και ανά πάσα στιγμή το κάθε μόριο μπορεί εξαιτίας των συνεχών συγκρούσεων ν' αποκτήσει ταχύτητα από μηδέν μέχρις πολύ μεγάλη. Αλώστε ο συνδυασμός της χαοτικής τους κίνησης και της δράσης της βαρύτητας, οδηγεί στη γνωστή κατανομή τους καθ' ύψος, που εκφράζεται ποσοτικά από το τον γνωστό βαρομετρικό τύπο. Η στατιστική τους βέβαια ως προς την ταχύτητα, εκφράζεται (βλ. ΕΡΓΑΣ/ΚΗ ΟΠΤΙΚΗ [5]: Π.Α.Α.Φ. (§ 1.2)) από την γνωστή κατανομή Maxwell-Boltzman. Επομένως η ατμόσφαιρα θα παρουσιάζει και διαταραχές όσον αφορά την πυκνότητα των μορίων της. Οι διαταραχές αυτές της πυκνότητάς τους, μπορεί να ιδωθούν σαν 'σωματίδια' τα οποία αποδεδειγμένα υπακούουν στις συνθήκες σκέδασης Rayleigh. Δηλ. το μέσο μέγε-

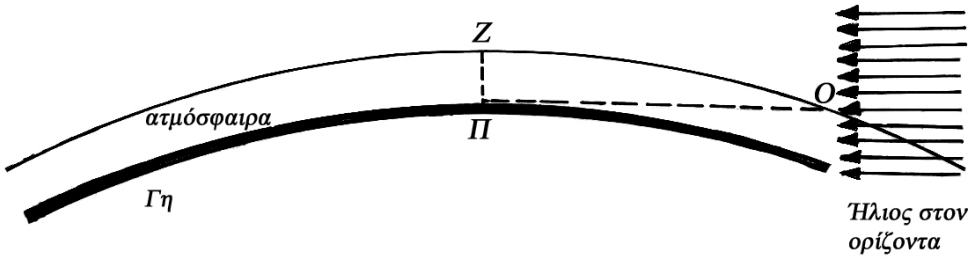
θός τους είναι πολύ μικρότερο του προσπίπτοντος σ' αυτές μ.κ. του φωτός. Άρα σκεδανύουν το φως σύμφωνα με τη (σχ. 6.3.1.1).

(Εικ. 6.3.1.10)

β) Τα χρώματα της δύσης και της ανατολής

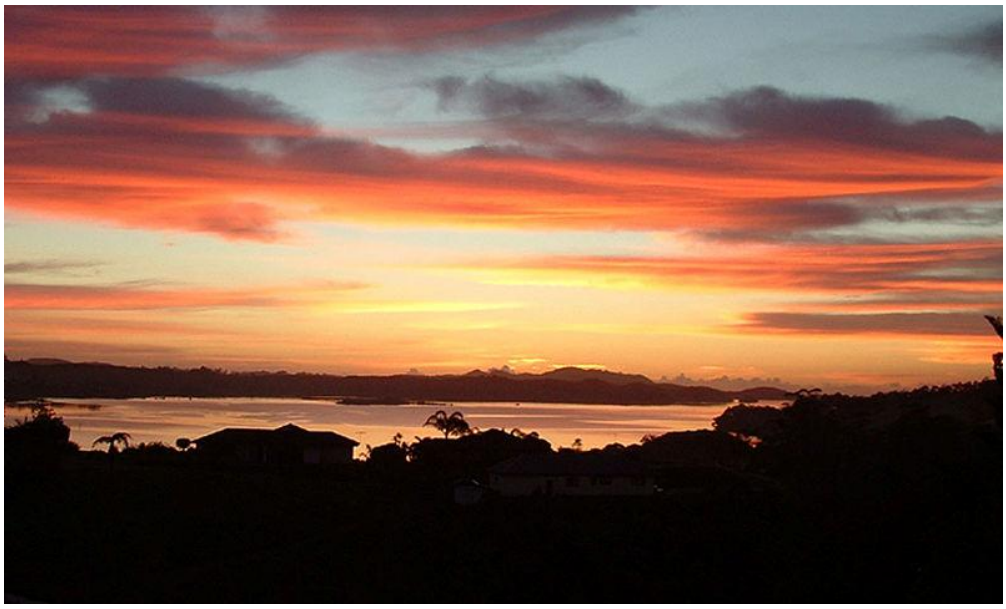
Ας υποθέσουμε ότι βλέπουμε (μια καθαρή μέρα), προς την κατεύθυνση του ορίζοντα, όπου ο ήλιος μόλις πρόκειται να δύσει. Τότε έξω από την περιοχή του ηλιακού δίσκου φαίνονται τα γνωστά έντονα πορτοκαλί-κόκκινο-χρυσαφί χρώματα του ηλιοβασιλέματος (Εικ. 6.3.1.12). Η ερμηνεία τους δίνεται και πάλι με τη βοήθεια της σκέδασης του προσπίπτοντος φωτός από τα μόρια του στρώματος της ατμόσφαιρας που περιβάλλει τη γη. Πράγματι η ακτίνα της γης είναι $R_{\Gamma} \simeq 6300\text{Km}$ και το στρώμα της ατμόσφαιρας πολύ λεπτό. Έχουμε ήδη αναφέρει ότι η πυκνότητα του αέρα υποδιπλασιάζεται σε ύψος $h \simeq 10\text{km}$ από το επίπεδο της θάλασσας. Επομένως το φως το οποίο προέρχεται από τον ορίζοντα (διεύθυνση *ΟΠ*)(Σχ. 6.3.1.11) προς τον παρατηρητή, διανύει πολύ μεγαλύτερη απόσταση σε σχέση με αυτό που προέρχεται ακριβώς από πάνω του (διεύθυνση *ΖΠ*). Τελικά δεδομένου ότι το φως σκεδανύεται σύμφωνα με τη σχέση $1/\lambda^4$, μέχρι να φθάσει μια δέσμη του ηλίου από τη δύση στον παρατηρητή, θα έχουν απομακρυνθεί από αυτήν εντελώς σχεδόν ακτινοβολίες με μικρά και μεσαία μ.κ. Εξ ου και η εμφάνιση των κόκκινο – πορτοκαλή αποχρώσεων κατά τη δύση του ηλίου.

Στην (Εικ. 6.3.1.13) φαίνονται οι αποχρώσεις του ουρανού λίγο μετά τη δύση του ηλίου, σε κατευθύνσεις από τον ορίζοντα μέχρις σχεδόν το ζενίθ. Από τις προσπίπτουσες δέσμες του λευκού φωτός που προέρχονται από τον ήλιο, στις θέ-



(Σχ. 6.3.1.11)

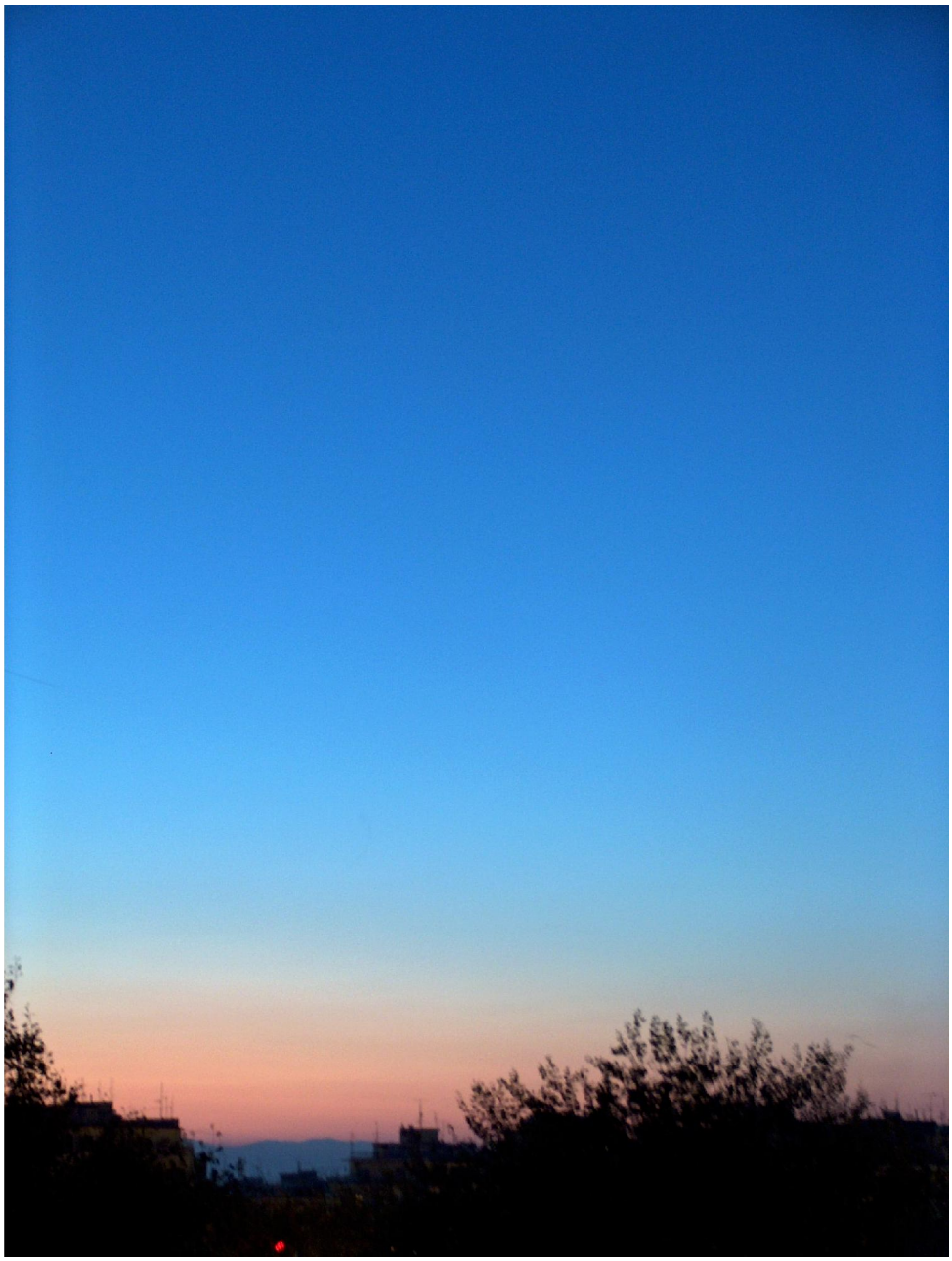
σεις από το *Ο* στο *Ζ* (Σχ. 6.3.1.11) του εξωτερικού στρώματος της ατμόσφαιρας, οι σκεδανύμενες προς τον παρατηρητή, διαπερνούν διαφορετικά πάχη της ατμόσφαιρας από το μεγαλύτερο (*ΟΠ*) μέχρις το μικρότερο (*ΖΠ*). Οι προερχόμενες από τη



(Εικ. 6.3.1.12)

διεύθυνση *ΟΠ* (λόγω διάνυσης μεγάλης απόστασης) ήδη έχουν χάσει – όπως περιγράψαμε προηγουμένως – τις μπλε-πράσινες περιοχές του φάσματος του λευκού φωτός λόγω εντονότερης σκέδασης εξ ου και η κόκκινο – πορτοκαλή απόχρωση του ορίζοντα. Οι προερχόμενες όμως από περιοχές σχετικά χαμηλότερα από το ζενίθ, είναι οι σκεδανύμενες κάθετα σχεδόν με τις προσπίπτουσες σ' εκείνες τις περιοχές

δέσμες λευκού φωτός από το ήλιο. Άρα ο παρατηρητής δέχεται τις εντονότερα σκεδανύμενες μπλε περιοχές του φάσματος, οι οποίες δεν προλαβαίνουν να αλλοιωθούν φασματικά (λόγω συνεχιζόμενης σκέδασης) επειδή διανύουν την μικρή σχετικά απόσταση *ΖΠ*. Σε περιπτώσεις μεγάλης καθαρότητας της ατμόσφαιρας, σαν



(Εικ. 5.8.3.13)

αποτέλεσμα θα έχουμε – με την συνεπικουρία και της υποκειμενικής αντίληψης των χρωμάτων και του διανυομένου πάχους της ατμόσφαιρας – την εμφάνιση (για γωνίες από τον ορίζοντα μέχρις το ζενίθ), αποχρώσεων: Από το βαθύ κόκκινο στον

ορίζοντα, σε πορτοκαλί, κίτρινο, βεραμάν, τιρκουάζ, μπλε, μέχρις και το βαθύ μπλε στο ζενίθ, όπως μερικά τουλάχιστον φαίνεται στην (Εικ. 6.3.1.13).

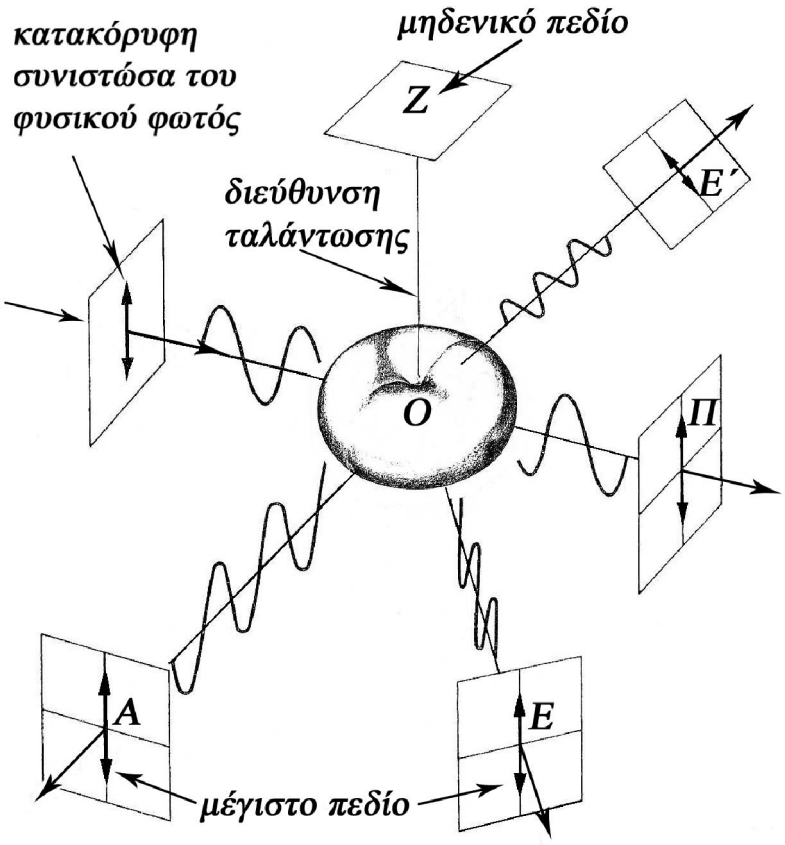
Το 'φάσμα' αυτό των χρωμάτων από σκέδαση του ηλιακού φωτός στην ατμόσφαιρα, δεν σχετίζεται με το φάσμα που προέρχεται από την ανάλυση του λευκού φωτός μέσω π.χ. πρίσματος (βλ. ΕΡΓΑΣ/ΚΗ ΟΠΤΙΚΗ [5]: Π.Α.Α.Φ. (Κεφ. 4)): Φαινόμενο διασκεδασμού)), αν και εμφανίζει μια παρόμοια χρωματική αλληλουχία από το κόκκινο προς το μπλε. Στο φάσμα του ***διασκεδασμού(dispersion)*** μέσω πρίσματος έχουμε την ανάλυση του λευκού φωτός στις συνιστώσες ακτινοβολίες του. Ενώ στη ***σκέδαση(scattering)*** τα χρώματα προέρχονται από αφαιρετική διαδικασία διαφορετικών ποσοστών από τις προσπίπτουσες (προς σκέδαση) δέσμες του λευκού φωτός.

6.3.2 *Πόλωση του φωτός από σκέδαση*

Υποθέτουμε ότι βρισκόμαστε σε μία θέση που μπορούμε να βλέπουμε από τον ορίζοντα μέχρις το ζενίθ καθώς και σε μεγάλο εύρος αριστερά και δεξιά μας. Έστω επίσης ότι η μέρα είναι πολύ καθαρή (δηλ. χωρίς υδρατμούς και σκόνη) και ότι ο ήλιος βρίσκεται σε κάποιο μέσο ύψος από τον ορίζοντα. Παρατηρώντας τον ήλιο κατ' ευθείαν, γνωρίζουμε ότι η δέσμη του φωτός που δεχόμαστε συνίσταται από φυσικό φως. Πράγματι το γεγονός αυτό είναι δυνατόν να το ελέγξουμε πειραματικά αν μεταξύ του ήλιου και του ματιού μας παρεμβάλλουμε έναν γραμμικό πολωτή (π.χ. Polaroid) και τον περιστρέψουμε κατά 360^0. Τότε παρατηρούμε ότι δεν έχουμε μεταβολή στην διερχόμενη ένταση του φωτός για οποιοδήποτε αζιμούθιο του άξονα διέλευσης του πολωτή. Το να ήταν το φως αυτό κυκλικά πολωμένο ή μερικά κυκλικά πολωμένο μπορούμε πάλι να το ελέγξουμε πειραματικά αν και μια κάπως πιο σύνθετη διαδικασία (βλ. Πείραμα Α5). Δεν συμβαίνει όμως το ίδιο – όσον αφορά την κατάσταση πόλωσης του φωτός – που προέρχεται από διαφορετικά σημεία παρατήρησης του ουρανού. Πράγματι με τον πολωτή διαπιστώνουμε ότι για κατευθύνσεις πάνω, αριστερά και δεξιά, που είναι κάθετες σε σχέση με τη διεύθυνση πρόσπτωσης του ηλιακού φωτός, το φως που έρχεται στο μάτι μας και το οποίο βέβαια προέρχεται από σκέδαση, είναι γραμμικά πολωμένο. Δηλ. περιστρέφοντας τον πολωτή θα έχουμε για συγκεκριμένες διευθύνσεις του άξονα διέλευσής του, πλήρη σχεδόν κατάσβεση. Σε ενδιάμεσες από τις προαναφερόμενες θέσεις στον ουρανό, η περιστροφή του πολωτή μας δίνει αυξομείωση της έντασης χωρίς μηδενικά ελάχιστα και όπως αποδεικνύεται πειραματικά το φως είναι μερικά γραμμικά πολωμένο.

Το φαινόμενο αυτό ονομάζεται ***πόλωση από σκέδαση (polarization by scattering)*** και οφείλεται όπως θα δούμε αμέσως μετά, στον γνωστό τρόπο με τον οποίο σκεδανύουν την ακτινοβολία τα δίπολα των ατόμων της ατμόσφαιρας. Για το σκο-

πό αυτό αναλύουμε το φυσικό φως που προέρχεται από τον ήλιο (λόγω της πλήρους συμμετρίας του), σε δύο ορθογώνιες συνιστώσες, ισοδύναμες μεταξύ τους κατά τα γνωστά από την άποψη της έντασης. Σε μια κατακόρυφη (Σχ. 6.3.2.1)

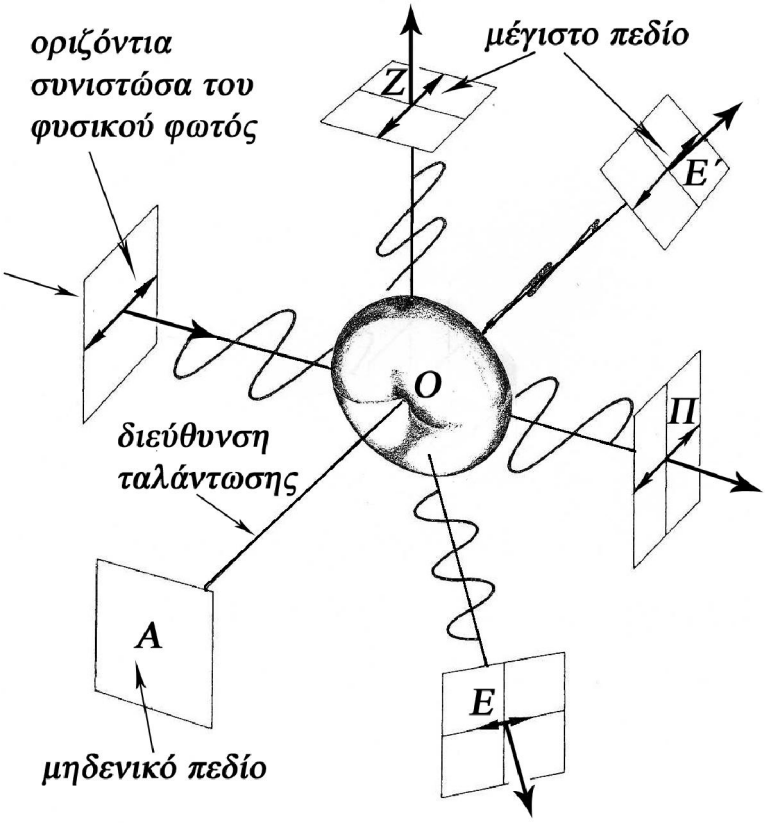


(Σχ. 6.3.2.1)

με διεύθυνση ζενίθ – ναδίρ και μια οριζόντια (Σχ. 6.3.2.2) κάθετη προς την προηγούμενη. Οποιαδήποτε από αυτές τις συνιστώσες θέτει το δίπολο ενός ατομικού εκπομπού – κατά τα γνωστά – σε ταλάντωση. Δηλ. κατά τη διεύθυνση ταλάντωσης η εκπομπή ακτινοβολίας είναι μηδενική και στις άλλες διευθύνσεις η κατανομή της έντασης είναι ανάλογη του παράγοντα $\sin^2\theta/r^2$ και του πλάτους ανάλογη του παράγοντα $\sin\theta/r$ (τοροϊδείς κατανομές). Στα (Σχ. 6.3.2.1,2) σχεδιάζονται τα πλάτη του πεδίου (διαδιδόμενα αμέσως μετά της εξωτερική επιφάνεια των τοροϊδών κατανομών για εποπτικούς λόγους) προς διάφορες διευθύνσεις από το κέντρο του διπόλου. Προκειμένου να μην προκαλείται σύγχυση, δεν σχεδιάζονται οι συμμετρικές τους ως προς το κέντρο σκέδασης. Στο επίπεδο, το κάθετο στη διεύθυνση ταλάντωσης, το πλάτος του πεδίου σ' οποιαδήποτε κατεύθυνση θα είναι μέγιστο.

Στο (Σχ. 6.3.2.1) φαίνονται οι διευθύνσεις *ΟΑ*, *ΟΠ* (προς τον παρατηρητή) και μία ενδιάμεση μεταξύ των δύο προηγούμενων (στο ίδιο επίπεδο το κάθετο στη

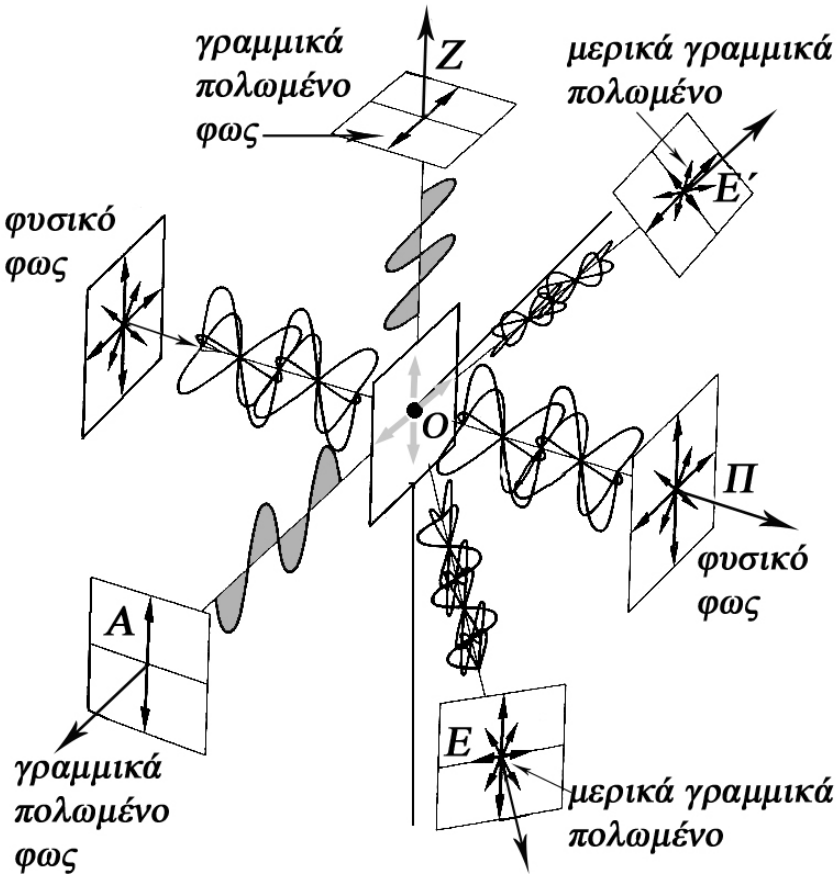
διεύθυνση ταλάντωσης) η *ΟΕ*. Έχουν το ίδιο μέγιστο πλάτος και είναι γραμμικά πολωμένες με διεύθυνση παράλληλη με την κατακόρυφη (διεγείρουσα) συνιστώσα του φυσικού φωτός. Στο ίδιο σχήμα σχεδιαγραφείται το πλάτος προς τη διεύθυνση *ΟΕ΄* που βρίσκεται στο επίπεδο των *ΟΖ* και *ΟΠ*. Είναι γραμμικά πολωμένη σ' αυτό το επίπεδο αλλά η τιμή του πλάτους της δεν είναι η μέγιστη.



(Σχ. 6.3.2.2)

Στο (Σχ. 6.3.2.2) φαίνονται (με τον ίδιο τρόπο όπως και στο προηγούμενο σχήμα) οι τιμές των πλατών καθώς και οι καταστάσεις πόλωσης ταλαντούμενου διπόλου σε ορισμένες χαρακτηριστικές διευθύνσεις , για την περίπτωση όμως που διεγείρουσα αιτία είναι η οριζόντια συνιστώσα του προσπίπτοντος σ' αυτό φυσικού φωτός. Στην περίπτωση αυτή διεύθυνση μηδενικής εκπομπής είναι η *ΟΑ*. Στο κατακόρυφο επίπεδο το κάθετο στη διεύθυνση ταλάντωσης, το πλάτος του πεδίου σ' οποιαδήποτε διεύθυνση θα είναι μέγιστο. Τρεις από αυτές τις διευθύνσεις είναι οι *ΟΖ*, *ΟΠ* και η *ΟΕ΄*. Έχουν το ίδιο μέγιστο πλάτος και είναι γραμμικά πολωμένες με διεύθυνση παράλληλη με την οριζόντια (διεγείρουσα) συνιστώσα του φυσικού φωτός. Στο ίδιο σχήμα σχεδιαγραφείτε και η ενδιάμεση *ΟΕ* μεταξύ των *ΟΑ* και *ΟΠ*. Θα είναι γραμμικά πολωμένη σ' αυτό το επίπεδο αλλά η τιμή του πλάτους της δεν θα είναι η μέγιστη.

Σκοπός μας είναι ν' αναδείξουμε τελικά την κατάσταση πόλωσης που προκύπτει σε διάφορες διευθύνσεις, κατά την πρόσπτωση φυσικού φωτός στα μόρια της ατμόσφαιρας. Για το λόγο αυτό αρκεί να φέρουμε σε 'ασύμφωνη' επαλληλία τις προκύπτουσες διαταραχές από την πρόσπτωση στα μόρια των δύο, 'ασύμφωνων'

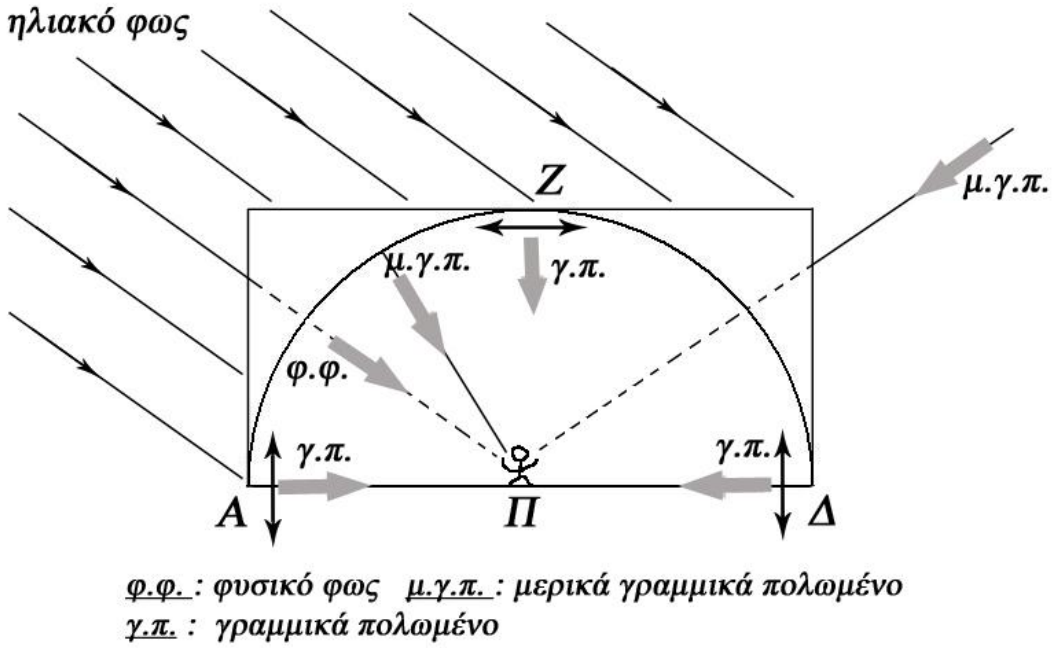


(Σχ. 6.3.2.3)

γραμμικά πολωμένων συνιστωσών του φυσικού φωτός. Η σύνθεση αυτή φαίνεται στο (Σχ. 6.3.2.3). Είναι εμφανές ότι κατά τη διεύθυνση πρόσπτωσης του φωτός το σκεδανύμενο παραμένει φυσικό ('ασύμφωνη' επαλληλία δύο ορθογωνίων γραμμικά πολωμένων φώτων του ιδίου πλάτους). Οι μόνες διευθύνσεις προς τις οποίες εκπέμπεται πλήρως γραμμικά πολωμένο φως, είναι η οριζόντια και η κατακόρυφη – οι κάθετες στη διεύθυνση πρόσπτωσης του φυσικού φωτός – δηλ. οι διευθύνσεις των δύο συνιστωσών στις οποίες το αναλύσαμε. Σ' όλες τις άλλες διευθύνσεις το φως θα είναι μερικά γραμμικά πολωμένο.

Θεωρούμε τελικά (Σχ. 6.3.2.4) έναν παρατηρητή σε μια θέση Π με ανοιχτό μπροστά του πεδίο, ν' ανιχνεύει την κατάσταση πόλωσης του φωτός που προέρχεται από διαφορετικές διευθύνσεις του ουρανού, όταν ο ήλιος βρίσκεται σ' ένα ορισμένο ύψος από τον ορίζοντα. Στο σχήμα βλέπουμε το επίπεδο το οποίο είναι κάθετο

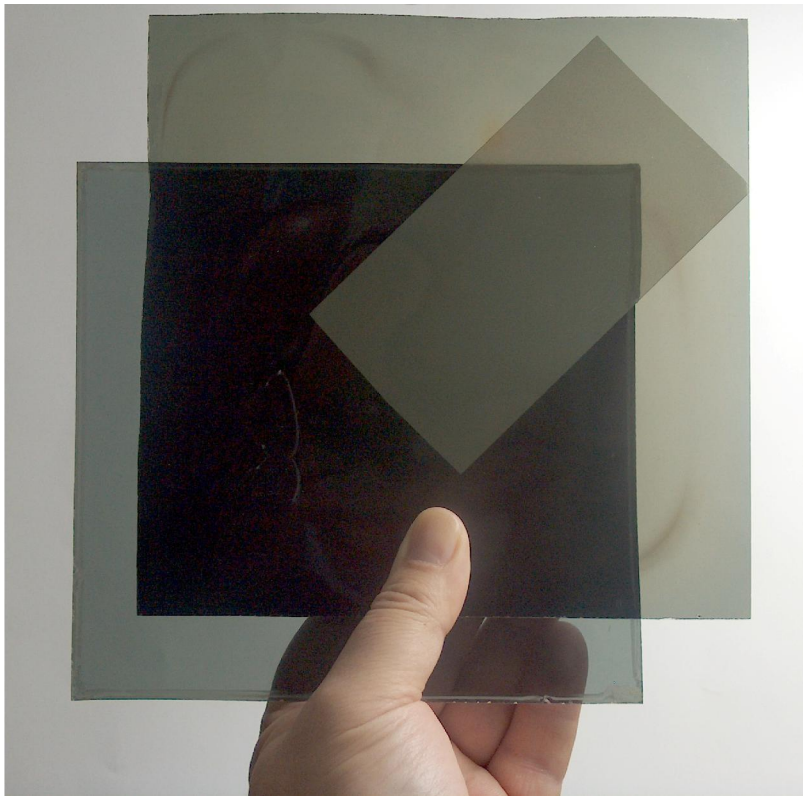
στη διεύθυνση πρόσπτωσης του ηλιακού φωτός. Το φως που σκεδανύεται από τα μόρια στον ενδιάμεσο χώρο με κατεύθυνση ήλιος – παρατηρητής είναι φυσικό. Γραμμικά πολωμένο φως θα έρχεται στον παρατηρητή μόνο από τις διευθύνσεις *ΖΠ*, *ΑΠ* και *ΔΠ* δηλ. από τα μόρια που σκεδανύουν το φως στις περιοχές *Α, Δ, Ζ*. Από οποιαδήποτε άλλη διεύθυνση το φως θα είναι μερικά γραμμικά πολωμένο. Ο έλεγχος αυτών των καταστάσεων πόλωσης μπορεί να γίνει με την βοήθεια ενός γραμμικού πολωτή, όπως ακριβώς περιγράψαμε προηγουμένως.



(Σχ. 6.2.3.4)

Υπάρχουν όμως ορισμένα φαινόμενα τα οποία μεταβάλλουν μερικώς τα συμπεράσματα της προαναφερόμενης θεωρίας. Αυτά είναι η ανισοτροπία των μορίων της ατμόσφαιρας, η παρουσία μεγάλου μεγέθους σωματιδίων (όπως υδρατμών σκόνης κ.λ.π.) καθώς και το φαινόμενο της πολλαπλής σκέδασης που αποτελεί αιτία μέχρις και πλήρους αποπόλωσης του σκεδανύμενου φωτός.

Το γεγονός αυτό είναι δυνατόν να ελεγχθεί σε εργαστηριακή κλίμακα ως εξής. Μεταξύ δύο διασταυρωμένων πολωτών (δηλ. που βρίσκονται σε θέση κατάσβεσης) (Εικ. 6.3.2.5), παρεμβάλλουμε ένα κομμάτι ριζόχαρτου. Το τελευταίο είναι γνωστό ότι συντίθεται από σωματίδια και νημάτια κυτταρίνης τα οποία αποπολώνουν ολικά (λόγω πολλαπλών μεταξύ τους σκεδάσεων) το προσπίπτον σ' αυτά γραμμικά πολωμένο φως, που προέρχεται από τον πρώτο πολωτή. Άρα από την περιοχή του ριζόχαρτου θα εξέρχεται φυσικό φως, του οποίου η μία συνιστώσα θα διέρχεται από τον δεύτερο πολωτή. Αυτό θα έχει σαν αποτέλεσμα το κομμάτι του

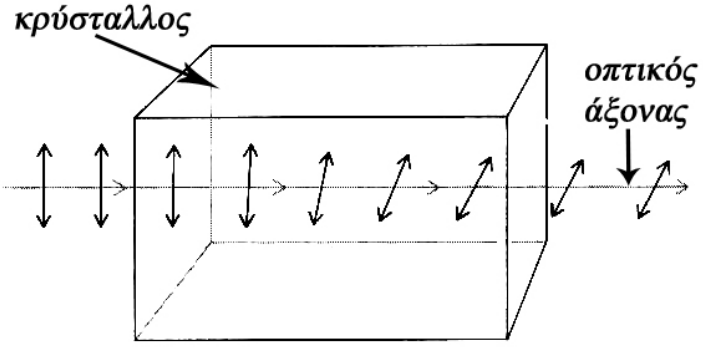


(Εικ. 6.3.2.5)

χαρτιού να φαίνεται φωτεινό, σε σχέση με τις ελεύθερες περιοχές μεταξύ των διασταυρωμένων πολωτών που είναι εντελώς σκοτεινές.

7 *Οπτική ενεργότητα*

Το φαινόμενο της ***οπτικής ενεργότητας (optical activity)*** για πρώτη φορά παρατηρήθηκε από τον F. J. Arago το 1811 σε κρύσταλλο α – Χαλαζία (Σχ. 7.1). Ένα επίπεδο μέτωπο κύματος γραμμικά πολωμένου μονοχρωματικού φωτός προσπίπτει σ' ένα πλακίδιο Χαλαζία ορισμένου πάχους κατά μήκος του οπτικού του άξονα. Το μετ. κύματος στην έξοδό του από το πλακίδιο είναι και πάλι γραμμικά πολωμένο. Η μόνη διαφορά του με το προσπίπτον είναι ότι έχει διαφορετικό αζιμούθιο όπως είναι εύκολο να διαπιστωθεί με την βοήθεια ενός αναλυτή. Το γεγονός

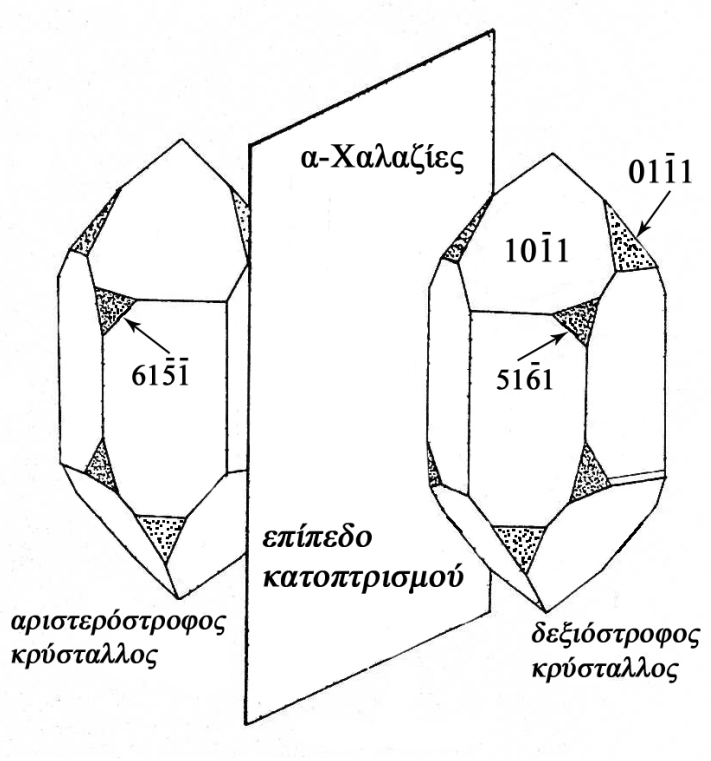


(Σχ. 7.1)

αυτό σημαίνει ότι το επίπεδο ταλάντωσης του γραμμικά πολωμένου φωτός κατά τη διάδοσή του στο εσωτερικό του υλικού για κάποιο λόγο στρέφεται διαδοχικά μέχρις ότου στην έξοδο από αυτό αποκτήσει τον τελικό του προσανατολισμό. Την ίδια περίπου εποχή ο J. B. Biot παρατήρησε ότι στροφή του επιπέδου πόλωσης του γραμμικά πολωμένου φωτός συμβαίνει και όταν το τελευταίο διαδίδεται μέσα από ορισμένα υγρά και αέρια. Συγκεκριμένα για τον Turpentine $\left(C_{10}H_6\right)$ στην υγρή και αέρια μορφή του. Επίσης διαπίστωσε ότι ανάλογα με το εξεταζόμενο υλικό, η φορά περιστροφής του ηλεκτρικού πεδίου $\mathbf{E}$ – για φως το οποίο ερχόταν προς τον παρατηρητή από την πηγή – ήταν δεξιόστροφη (δηλ. κατά τη φορά των δεικτών του ρολογιού), ή αριστερόστροφη (δηλ. αντίθετη της φοράς περιστροφής των δεικτών του ρολογιού).

Υλικά όπως στερεά, υγρά, αέρια ή διαλύματα τα οποία εμφανίζουν την προαναφερόμενη στροφικότητα, ονομάζονται ***οπτικώς ενεργά (optically active)***. Και μάλιστα ***δεξιόστροφα (dextrorotatory, d - rotatory)*** ή ***αριστερόστροφα (levorotatory, l - rotatory)*** ανάλογα με τη φορά περιστροφής του πεδίου $\mathbf{E}$, όπως ήδη έχει αναφερθεί. Μια επίσης αξιοσημείωτη παρατήρηση έγινε το 1822 από τον J. F. W. Herschel και αφορούσε την εξωτερική μορφολογία των κρυστάλλων του α-Χαλαζία σε σχέση με τη στροφικότητα που εκδήλωναν οι τελευταίοι. Πράγματι

παρατηρώντας διαφορετικά συμπλέγματα κρυστάλλων Χαλαζία όπως αυτοί εμφανίζονται στη φύση (δηλ. στην ορυκτή τους μορφή)(βλ. Εικ. 5.2.1β), μπορούμε να ξεχωρίσουμε μορφολογικά δύο μοντέλα τα οποία κατ' αρχή φαίνονται πανομοιότυπα (Σχ. 7.2). Στην πραγματικότητα όμως ενέχουν τη σχέση αντικειμένου και ειδώλου ως προς ένα επίπεδο συμμετρίας (επίπεδο κατοπτρισμού). Η ιδιότητα αυτή των κρυστάλλων ονομάζεται ***εναντιομορφισμός (enantiomorphism)*** και οι κρύσ-



(Σχ. 7.2)

ταλλοι ***εναντιόμορφοι (enantiomorphs)*** μεταξύ τους. Στην Κρυσταλλοφυσική αποδεικνύεται ότι τα διαφανή κρυσταλλικά υλικά (δηλ. αυτά τα οποία δεν εμφανίζουν απορρόφηση) και που είναι εναντιόμορφα, είναι και οπτικά ενεργά. Πράγματι οι κρύσταλλοι του α – Χαλαζία, ανάλογα με την δεξιόστροφη ή αριστερόστροφη εξωτερική μορφολογική εμφάνισή τους είναι και δεξιόστροφα ή αριστερόστροφα οπτικά ενεργοί. Όπως θα δούμε στα επόμενα, η εξωτερική μορφολογία των κρυστάλλων του Χαλαζία είναι άμεσο αποτέλεσμα του τρόπου με τον οποίο είναι διατεταγμένα τα μόρια του SiO_2 στο εσωτερικό τους. Στην περίπτωση π.χ. του άμορφου Χαλαζία (τετηγμένος) (βλ. Σχ. 5.3.11β), δεν εμφανίζεται οπτική ενεργότητα, γεγονός το οποίο οφείλεται στην πλήρη παραμόρφωση της εσωτερικής του δομής.

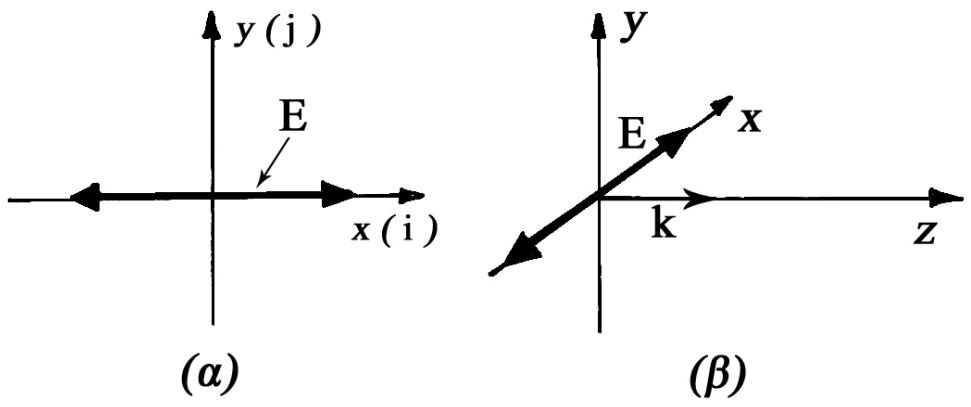
Το φαινόμενο της οπτικής ενεργότητας – όσον αφορά τη μελέτη του – είναι αρκετά περίπλοκο και γίνεται ως επί το πλείστον μέσω της Κβαντομηχανικής. Αναπτύχθηκαν όμως και πλήρεις φαινομενολογικές Η/Μ θεωρίες, που μπορούν να εξετάσουν τέτοιου είδους διαδικασίες και οι οποίες επιβεβαιώνονται πειραματικά.

Σε γενικές γραμμές – όπως ήδη αναφέραμε – οπτική ενεργότητα εμφανίζουν τα κρυσταλλικά στερεά, τα υγρά, τα αέρια όπως και διαλύματα στερεών και υγρών σε συγκεκριμένους ουδέτερους (από άποψη οπτ. ενεργότητας) διαλύτες. Αυτό σημαίνει ότι οπτική ενεργότητα μπορεί να προέλθει όχι μόνο από συγκεκριμένη πλεγματική δομή μορίων σε κρυστάλλους. Αλλά και από τα ίδια ξεχωριστά μόρια (στα υγρά, αέρια ή στα διαλύματά τους). Πράγματι τα τελευταία εμφανίζουν ασυμμετρίες (π.χ. εναντιομορφικής δομής) όσον αφορά τη θέση των ατόμων που τα συγκροτούν. Δηλ. παρά το ότι δύο μόρια αποτελούνται από τον ίδιο αριθμό και είδος ατόμων, μπορεί να συνθέτουν στο χώρο δύο διαφορετικές δομές δηλ. να είναι κατοπτρικά είδωλα σε σχέση με ένα επίπεδο συμμετρίας. Δηλ. τελικά τα ίδια τα μόρια μπορούν να χαρακτηριστούν δεξιόστροφα και αριστερόστροφα.

Πράγματι σ' ένα υγρό που συντίθεται από τέτοιου είδους μόρια (ή σ' ένα διάλυμα τέτοιων μορίων) παρά το ότι τα τελευταία έχουν διαφορετικό προσανατολισμό, υπάρχει η δυνατότητα εμφάνισης οπτικής ενεργότητας, με την προϋπόθεση βέβαια ότι υφίσταται διαφορετικό ποσοστό αριστερόστροφων και δεξιοστρόφων.

7.1 *Φαινομενολογική ερμηνεία της οπτικής ενεργότητας κατά Fresnel.*

Η θεωρία που ακολουθεί προτάθηκε από τον Fresnel το 1825. Βασίζεται στην ανάλυση ενός γραμμικά πολωμένου επιπέδου μετώπου κύματος σε δύο 'συνιστώσες' που αποτελούνται από κυκλικά πολωμένα φώτα της ίδιας συχνότητας,



(Σχ. 7.1.1)

αντίθετης στροφικότητας καθώς και ταχύτητας διάδοσης. Στα επόμενα θ' αναδείξουμε τον τρόπο με τον οποίο στρέφεται το επίπεδο πόλωσης γραμμικά πολωμένου φωτός, όταν αυτό διαδοθεί στο εσωτερικό οπτικά ενεργού μέσου.

Θα θεωρήσουμε κατ' αρχή (Σχ. 7.1.1) τη διάδοση γραμμικά πολωμένου φωτός $\mathbf{E}$ στο επίπεδο xz με $\mathbf{E} \parallel \mathbf{i}$. Κατά τα γνωστά το φως αυτό είναι δυνατόν να περιγραφεί από την επαλληλία (στον ελεύθερο χώρο) δύο κυκλικά πολωμένων φώτων της ίδιας συχνότητας ω. Δηλ.

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_R + \mathbf{E}_L$$

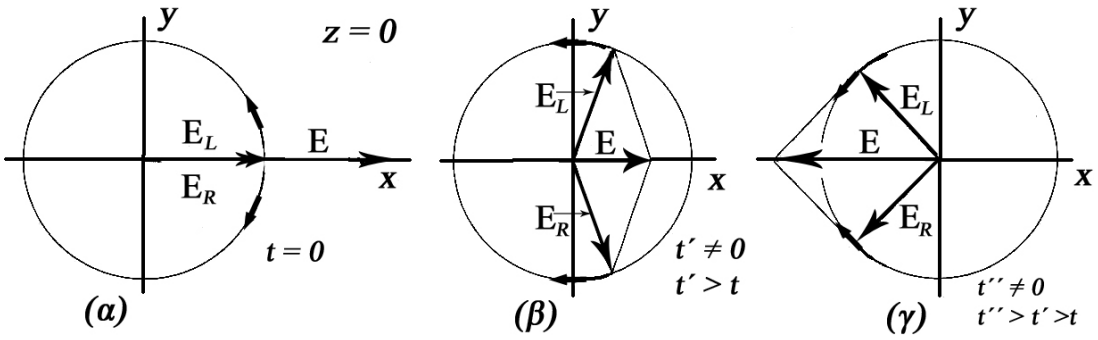
όπου:

$$\left.\begin{aligned}
&\mathbf{E}_R = \frac{E_0}{2}\left[\mathbf{i}\cos(\omega t - kz) - \mathbf{j}\sin(\omega t - kz)\right] = \\
&\frac{E_0}{2}\left[\mathbf{i}\cos(\omega t - kz) + \mathbf{j}\cos(\omega t - kz + \pi/2)\right] \rightarrow \text{(δεξιόστροφο)} \\
&\mathbf{E}_L = \frac{E_0}{2}\left[\mathbf{i}\cos(\omega t - kz) + \mathbf{j}\sin(\omega t - kz)\right] = \\
&\rightarrow \frac{E_0}{2}\left[\mathbf{i}\cos(\omega t - kz) + \mathbf{j}\cos(\omega t - kz - \pi/2)\right] \text{(αριστερόστροφο)}
\end{aligned}\right\} \qquad (7.1.1)$$

πράγματι για $z \neq 0$ θα έχουμε:

$$\mathbf{E} = E_0\mathbf{i}\cos(\omega t - kz) \qquad (7.1.2)$$

και στο (Σχ.7.1.2) βλέπουμε την επαλληλία των R και L φώτων για $z = 0$ σε διάφορες χρονικές στιγμές.



(Σχ. 7.1.2)

Στην περίπτωση όμως που γραμμικά πολωμένο φως διαδίδεται σε οπτικά ενεργό μέσο σε μια ορισμένη απόσταση z, για να δικαιολογήσουμε τη στροφή του επιπέδου πόλωσης θα πρέπει να δεχθούμε ότι στο εσωτερικό του διαδίδονται δύο κυκλικά πολωμένα φώτα (αντίθετης στροφικότητας), με διαφορετικές όμως ταχύ-

τητες διάδοσης (φάσης) υ_R , υ_L και άρα με διαφορετικούς δ.δ. n_R , n_L και κατά προέκταση κυματοκαθέτους (κατά μέτρο) k_R , k_L. Το φαινόμενο αυτό το ονομάζουμε και ***κυκλική διπλοθλαστικότητα (circular birefringence)***.

Σημείωση

1) $\upsilon_R < \upsilon_L \Rightarrow \left(n_R = c/\upsilon_R \,, n_L = c/\upsilon_L\right) \Rightarrow n_R > n_L$
$\left(n_R = \lambda_0/\lambda_R = c/\upsilon_R \,, n_L = \lambda_0/\lambda_L = c/\upsilon_L \,,\, k_R = 2\pi/\lambda_R \,, k_L = 2\pi/\lambda_L\right) \Rightarrow k_R > k_L$
2) $\upsilon_R > \upsilon_L \Rightarrow n_R < n_L \Rightarrow k_R < k_L$

Τα κυκλικά αυτά φώτα στο εσωτερικό του υλικού θα περιγράφονται από τις εξής σχέσεις:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_R &= \frac{E_0}{2}\left[\mathbf{i}\cos\left(\omega t - k_R z\right) - \mathbf{j}\sin\left(\omega t - k_R z\right)\right] \rightarrow \left(\text{δεξιόστροφο}\right) \\ \mathbf{E}_L &= \frac{E_0}{2}\left[\mathbf{i}\cos\left(\omega t - k_L z\right) + \mathbf{j}\sin\left(\omega t - k_L z\right)\right] \rightarrow \left(\text{αριστερόστροφο}\right) \end{aligned} \tag{7.1.3}$$

και η επαλληλία τους στη θέση z (με αρχή το $z = 0$) στο εσωτερικό του υλικού θα μας δώσει:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_R + \mathbf{E}_L \tag{7.1.4}$$

$$\mathbf{E} = E_0 \cos\left[\omega t - \frac{\left(k_R + k_L\right)z}{2}\right]\left[\mathbf{i}\cos\frac{\left(k_R - k_L\right)z}{2} + \mathbf{j}\sin\frac{\left(k_R - k_L\right)z}{2}\right] \tag{7.1.5}$$

Σημείωση

Πράγματι από τις (σχ. 7.1.3,4) θα έχουμε:

$$\begin{aligned} \mathbf{E} = \mathbf{E}_R + \mathbf{E}_L = \frac{E_0}{2}\Big\{&\mathbf{i}\left[\cos\left(\omega t - k_R z\right) + \cos\left(\omega t - k_L z\right)\right] + \\ &+ \mathbf{j}\left[\sin\left(\omega t - k_L z\right) - \sin\left(\omega t - k_R z\right)\right]\Big\} \end{aligned}$$

Εάν θέσουμε:

$$a = \left(\omega t - k_R z\right), \qquad \beta = \left(\omega t - k_L z\right)$$

Τότε θα είναι:

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} \;,\; \sin\beta - \sin\alpha = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\beta-\alpha}{2}$$

Οπότε:

$$\cos\left(\omega t - k_R z\right) + \cos\left(\omega t - k_L z\right) = 2\cos\left[\omega t - \frac{\left(k_R + k_L\right)z}{2}\right]\cos\frac{\left(k_R - k_L\right)z}{2}$$

$$\sin\left(\omega t - k_L z\right) - \sin\left(\omega t - k_R z\right) = 2\cos\left[\omega t - \frac{\left(k_R + k_L\right)z}{2}\right]\sin\frac{\left(k_R - k_L\right)z}{2}$$

Τελικά μετά την αντικατάσταση στην πρώτη σχέση παίρνουμε τη (σχ. 7.1.5).

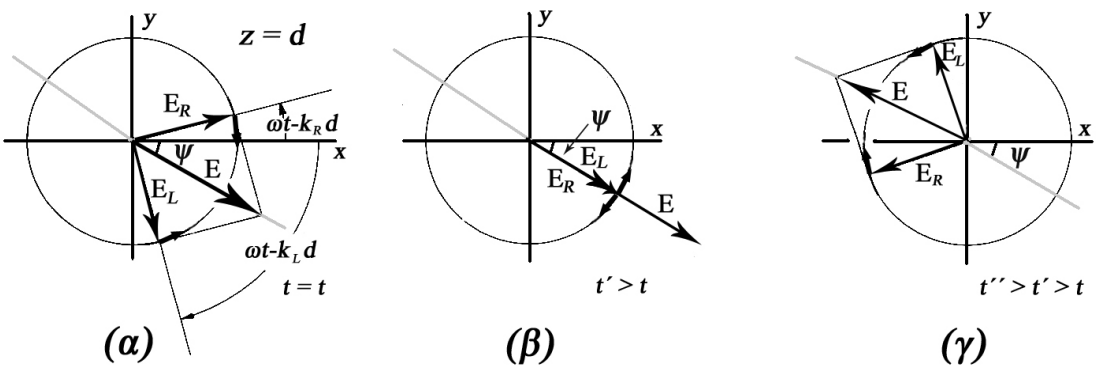
Η τελευταία όμως σχέση περιγράφει ένα γραμμικά πολωμένο φως (στη θέση z) επειδή οι συνιστώσες του κατά τους άξονες x και y έχουν ακριβώς την ίδια χρονική εξάρτηση, δηλ. η διαφορά φάσης τους θα είναι μηδέν λόγω του κοινού παράγοντα:

$\cos\left[\omega t - \frac{\left(k_R + k_L\right)z}{2}\right]$ οπότε πάντοτε θα βρίσκονται σε φάση. Για $z = 0$ θα έχουμε:

$$\mathbf{E} = E_0 \mathbf{i} \cos \omega t$$

δηλ. είναι το προσπίπτον στην είσοδο του υλικού γραμμικά πολωμένο φως.

Το γραμμικά όμως πολωμένο φως στη θέση z είναι στραμμένο κατά αζιμούθιο ψ σε σχέση με τον άξονα x. Στο (Σχ. 7.1.3) φαίνεται η ταλάντωση του $\mathbf{E} = \mathbf{E}_R + \mathbf{E}_L$ για διαφορετικές χρονικές στιγμές t σε απόσταση z εντός του οπτικά



(Σχ. 7.1.3)

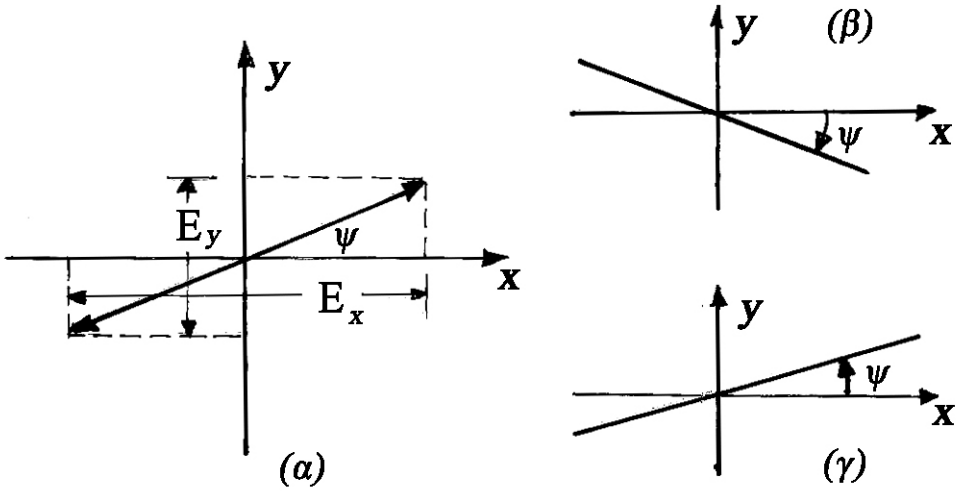
ενεργού υλικού και για $k_R < k_L$. Μπορούμε να υπολογίσουμε το αζιμούθιο (δηλ. τη γωνία στροφής) ψ, από την εφαπτομένη της κλίσης του γραμμικά πολωμένου

φωτός, σε σχέση με τον άξονα x (Σχ. 7.1.4α). Πράγματι από τη γνωστή σχέση: $\tan\psi = \dfrac{E_y}{E_x}$ και τη (σχ. 7.1.5) θα έχουμε:

$$E_x = E_0 \cos\frac{(k_R - k_L)z}{2} \quad \text{και} \quad E_y = E_0 \sin\frac{(k_R - k_L)z}{2}$$

οπότε βρίσκουμε: $\tan\psi = \dfrac{\sin(k_R - k_L)z/2}{\cos(k_R - k_L)z/2} = \tan\left[(k_R - k_L)z/2\right]$. Άρα τελικά:

$$\psi = \frac{(k_R - k_L)}{2} z \tag{7.1.6}$$



(Σχ. 7.1.4)

και επειδή: $\begin{cases} n_R = \lambda_0/\lambda_R \Rightarrow k_R = 2\pi/\lambda_R = (2\pi/\lambda_0)n_R \\ n_L = \lambda_0/\lambda_L \Rightarrow k_L = 2\pi/\lambda_L = (2\pi/\lambda_0)n_L \end{cases}$

$$\psi = \frac{\pi z}{\lambda_0}(n_R - n_L) \tag{7.1.7α}$$

Όταν τώρα $n_R < n_L \ (\upsilon_R > \upsilon_L) \Rightarrow \psi < 0$ (Σχ. 7.1.4β), το επίπεδο πόλωσης περιστρέφεται κατά τη φορά των δεικτών του ρολογιού για φως που διαδίδεται προς τα εμάς. Τη φορά αυτή τη θεωρούμε θετική (δεξιόστροφη). Όταν τώρα $n_R > n_L \ (\upsilon_R < \upsilon_L) \Rightarrow \psi > 0$ (Σχ. 7.1.4γ), το επίπεδο πόλωσης περιστρέφεται αντίθετα της φοράς των δεικτών του ρολογιού για φως που διαδίδεται προς τα εμάς. Τη φορά αυτή τη θεωρούμε αρνητική (αριστερόστροφη). Η σχέση:

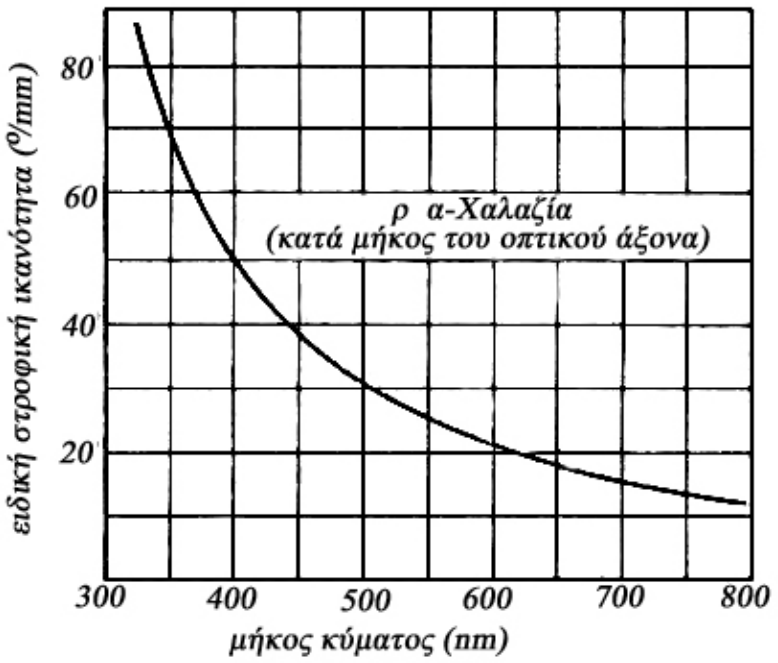
$$\rho = \frac{\psi}{z} = \frac{\pi}{\lambda_0}\left(n_R - n_L\right) \qquad (7.1.8\alpha)$$

που μας δίνει τη γωνία στροφής ανά μονάδα μήκους στο εσωτερικό ενός υλικού, ονομάζεται ***ειδική στροφική ικανότητα (specific rotatory power)***. Όπως αποδεικνύεται και πειραματικά η ρ εξαρτάται από το μ.κ. του φωτός δηλ. εμφανίζει διασκεδασμό. Στον (Πίν. 7.1.5) δίνονται οι τιμές των ρ του α – Χαλαζία (για διάδο-

λ(nm)	ρ($^0/$mm)	λ(nm)	ρ($^0/$mm)	λ(nm)	ρ($^0/$mm)	λ(nm)	ρ($^0/$mm)
226.5	201.9	404.6	48.94	508.5	29.72	670.7	16.53
250.3	153.9	435.8	41.54	546.0	25.53	728.1	13.92
303.4	95.02	447.8	35.60	589.2	21.72	794.7	11.58
340.3	72.45	486.1	32.76	643.8	18.02		

(Πίν. 7.1.5)

ση κατά μήκος του οπτικού του άξονα) για διάφορα μ.κ. και στο (Σχ. 7.1.6) η αν-



(Σχ. 7.1.6)

τίστοιχη καμπύλη διασκεδασμού $\rho(\lambda)$.

Σημείωση

Η αζιμουθιακή γωνία στροφής ψ του επιπέδου πόλωσης είναι αρνητική ($\psi < 0$) όταν $n_R < n_L \left(\upsilon_R > \upsilon_L\right)$ (σχ. 7.1.7α). Στη διεθνή όμως βιβλιογραφία πολλές φορές ζητείται η γωνία αυτή να προκύπτει θετική (όταν δηλ. έχουμε δεξιόστροφη περιστροφή για το φως που έρχεται προς τα εμάς). Για το λόγο αυτό η (σχ. 7.1.7α) θα πρέπει να γραφεί:

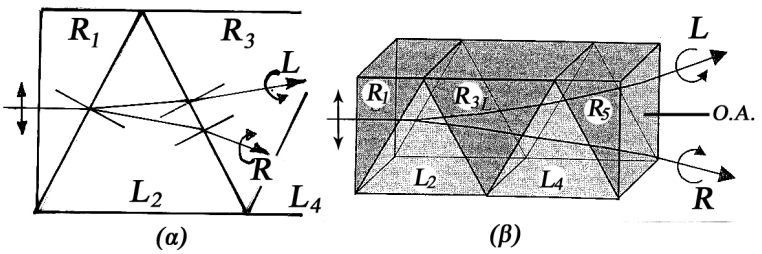
$$\psi = \frac{\pi z}{\lambda_o}\left(n_L - n_R\right) \qquad (7.1.7\beta)$$

Το ίδιο ακριβώς ισχύει και για την ειδική στροφική ικανότητα. Οπότε η (σχ. 7.1.8α) γράφεται:

$$\rho = \frac{\pi}{\lambda_o}\left(n_L - n_R\right) \qquad (7.1.8\beta)$$

7.2 *Πειραματική επιβεβαίωση της θεωρίας του Fresnel για την οπτική ενεργότητα*

Με τη βοήθεια ενός συστήματος πρισμάτων το οποίο περιγράφουμε στα επόμενα, ο Fresnel απέδειξε ότι γραμμικά πολωμένο φως είναι δυνατόν ν' αναλυθεί σε δύο κυκλικά πολωμένα μέτωπα κύματος, τα οποία έχουν αντίθετη στροφικότητα. Πρόκειται για μια αλληλουχία ορθών πρισμάτων κατασκευασμένων από κρυσταλλικό α−Χαλαζία και συγκολλημένων οπτικά μεταξύ τους όπως φαίνεται



(Σχ. 7.2.1)

στο (Σχ. 7.2.1). Τα πρίσματα διαδοχικά συντίθενται από α−Χαλαζία: 1) δεξιόστροφο(R), 2) αριστερόστροφο(L), 3) δεξιόστροφο (R) κ.ο.κ. δηλαδή από μια συστοιχία $:(R-L-R-L-R-\cdots\cdots)$. Κύριο χαρακτηριστικό είναι ότι οι οπτικοί τους άξονες είναι παράλληλοι κατά τη διεύθυνση του προσπίπτοντος φωτός.

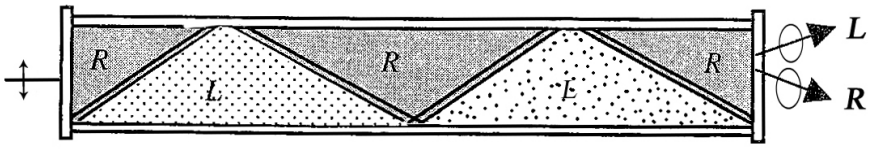
Γραμμικά πολωμένο μονοχρωματικό μετ. κύματος, το οποίο προσπίπτει κάθετα στην πλευρά του πρίσματος R_1 διαδίδεται στο εσωτερικό του με τη μορφή δύο κυκλικά πολωμένων φώτων τα οποία έχουν δ.δ. n_{R_1} και n_{L_1}. Επομένως επειδή στην ενδοεπιφάνεια μεταξύ των πρισμάτων R_1, L_2 το προσπίπτον Δ.Κ.Π. (Δεξιόστροφα Κυκλικά Πολωμένο) φως με δ.δ. n_{R_1} θα διαθλαστεί σαν Δ.Κ.Π. αλλά με δ.δ. n_{R_2} όπου $n_{R_1} < n_{R_2}$, θα συγκλίνει τελικά προς την κάθετο στην ενδοεπιφάνεια. Δηλ.

$$\left.\begin{array}{l}
\underline{\text{πρίσμα}\, R_1}\left(n_{R_1} < n_{L_1}\right) \text{ αλλά } \left(n_{L_1} = n_{R_2} \text{ και } n_{L_2} = n_{R_1}\right)^{*} \text{ οπότε } \left(n_{R_1} < n_{R_2} \text{ και } n_{L_2} < n_{L_1}\right) \\
\underline{\text{πρίσμα}\, L_2}\left(n_{R_2} > n_{L_2}\right) \text{ αλλά } \left(n_{R_2} = n_{L_3} \text{ και } n_{L_2} = n_{R_3}\right) \text{ οπότε } \left(n_{R_2} > n_{R_3} \text{ και } n_{L_3} > n_{L_2}\right) \\
\underline{\text{πρίσμα}\, R_3}\left(n_{R_3} < n_{L_3}\right) \text{ αλλά} \cdots \text{ κ.ο.κ} \\
\\
^{*}\text{(λόγω μετάβασης σε αντίθετης στροφικότητας κρύσταλλο)}
\end{array}\right\}$$

θα στραφεί προς την κάτω βάση του συστήματος των πρισμάτων. Το αντίθετο θα συμβεί με το προσπίπτον Α.Κ.Π. (Αριστερόστροφα Κυκλικά Πολωμένο) φως δ.δ. n_{L_1} το οποίο διαθλώμενο στο πρίσμα L_2 θ' απομακρυνθεί από την κάθετο στην ενδοεπιφάνεια επειδή $n_{L_1} > n_{L_2}$. Δηλ. θα στραφεί προς την πάνω βάση του συστήματος των πριμάτων. Επομένως τα δύο φώτα Δ.Κ.Π. και Α.Κ.Π., θα συνεχίσουν να διαδίδονται στο εσωτερικό του πρίσματος L_2 με μια κλίση μεταξύ τους.

Στην ενδοεπιφάνεια μεταξύ των πρισμάτων L_2 και R_3 θα συμβεί το εξής: Το προσπίπτον Δ.Κ.Π. φως με δ.δ. n_{R_2} θα διαθλαστεί σαν Δ.Κ.Π. αλλά με δ.δ. n_{R_3} όπου $n_{R_2} > n_{R_3}$. Επομένως θ' αποκλίνει από την κάθετη στην ενδοεπιφάνεια και θα συνεχίσει να στρέφεται προς την κάτω βάση του πρίσματος. Το αντίθετο θα συμβεί με το προσπίπτον Α.Κ.Π. φως με δ.δ. n_{L_2}, το οποίο διαθλώμενο στο πρίσμα R_3 θα συγκλείνει προς την κάθετη επειδή $n_{L_3} > n_{L_2}$. Δηλ. θα συνεχίσει να στρέφεται προς την πάνω βάση του συστήματος των πρισμάτων. Σαν τελικό αποτέλεσμα θα έχουμε την αύξηση του γωνιακού ανοίγματος μεταξύ της Α.Κ.Π. και της Δ.Κ.Π. διαταραχής. Η διαδικασία συνεχίζεται η ίδια μέχρις ότου από την έξοδο του συστήματος αναδυθούν υπό συγκεκριμένη γωνία δύο επίπεδα κυκλικά πολωμένα μέτ. κύματος αντίθετης στροφικότητας. Το γεγονός αυτό διαπιστώνεται πειραματικά με τη βοήθεια ενός πλακιδίου καθυστέρησης $\lambda/4$ και ενός αναλυτή. Μετά την παρεμβολή του $\lambda/4$ σ' οποιαδήποτε από τις δύο δέσμες και την περιστροφή του αναλυτή, διαπιστώνουμε πλήρη κατάσβεση του φωτός. Οι σχετικές θέσεις μεταξύ των αξόνων

διέλευσης του αναλυτή και του ταχύ άξονα του πλακιδίου $\lambda/4$ (σε γωνία μεταξύ τους 45^0) θα μας αναδείξει το είδος της στροφικότητας.



(Σχ. 7.2.2)

Με μια παραπλήσια διάταξη (Σχ. 7.2.2), είναι δυνατόν να επιτύχουμε την ανάλυση γραμμικά πολωμένου φωτός σε δύο αντίθετης στροφικότητας κυκλικά πολωμένα με τη βοήθεια οπτικά ενεργών υγρών ή διαλυμάτων. Τα τελευταία εισάγονται με την R ή L σύνθεσή τους σε γυάλινα πρισματικής μορφής δοχεία, με διάταξη πανομοιότυπη αυτής του συστήματος του (Σχ. 7.2.1).

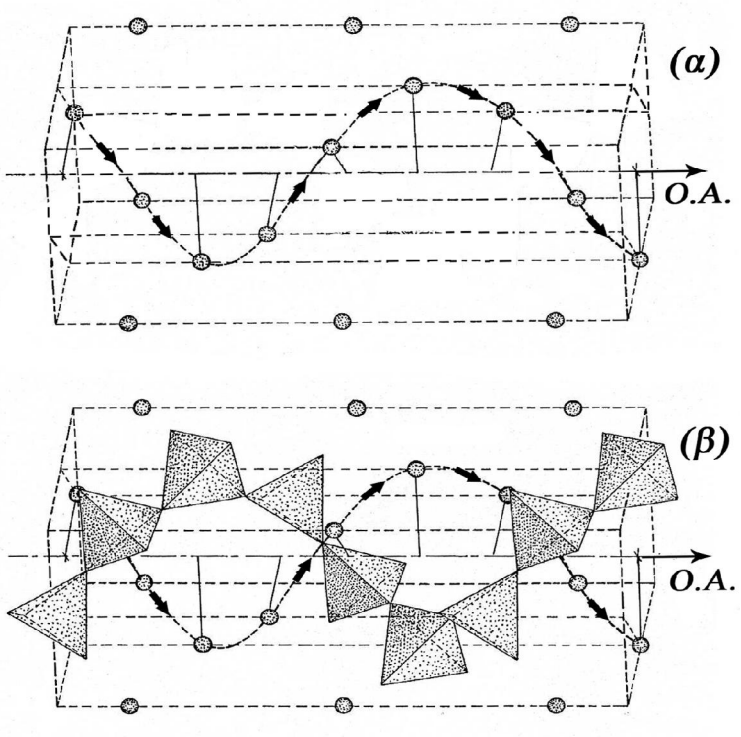
7.3 *Φυσική ερμηνεία της οπτικής ενεργότητας στα ανόργανα και τα οργανικά υλικά*

Οι κρύσταλλοι του α–Χαλαζία και της Ζάχαρης

Στον κρύσταλλο του α–Χαλαζία έχουμε ήδη αναφερθεί στις (§ 5.3,4) κατά τη διαδικασία της μελέτης της διπλής διάθλασης του φωτός. Δύο από τους πολυμορφικούς τρόπους εμφάνισής των Χαλαζιών είναι: α) Ο προαναφερόμενος α-quartz, ο λεγόμενος χαμηλής θερμοκρασιακής σύνθεσης α–Χαλαζίας, που αναπτύσσεται κάτω από τη θερμοκρασία των 575^0C. Κρυσταλλώνεται στο τριγωνικό σύστημα στην ομάδα συμμετρίας σημείου (32) και β) Ο β-quartz, ο λεγόμενος υψηλής θερμοκρασιακής σύνθεσης Χαλαζίας που αναπτύσσεται μεταξύ των θερμοκρασιών $575^0 - 870^0$C και κρυσταλλώνεται στο εξαγωνικό σύστημα στην ομάδα συμμετρίας (622). Τα είδη αυτών των Χαλαζιών μπορούν να βρεθούν στη δεξιόστροφη (R) και την αριστερόστροφη (L) μορφή τους.

Στους κρυστάλλους αυτούς η διάταξη των μορίων του Si και του O στο χώρο, αποτελείται κατά τα γνωστά από ικριώματα σχηματισμών ισοπλεύρων τετραέδρων $\left(SiO_4^{4-}\right)$. Δηλ. το κέντρο του τετραέδρου καταλαμβάνεται από το άτομο του Πυριτίου και οι κορυφές του από άτομο Οξυγόνου. Τα τετράεδρα ανά δύο μοιράζονται ένα κοινό άτομο Οξυγόνου. Στο (Σχ. 7.3.1β) γίνεται εμφανής η σπειροει-

δής διάταξη των τετραέδρων από αριστερά προς τα δεξιά (κατά μήκος του οπτικού άξονα του κρυστάλλου) για την περίπτωση που ο τελευταίος είναι οπτικά δεξιόστροφος (R). Στο (Σχ. 7.3.1α) εμφανίζονται μόνο τα άτομα του Πυριτίου για ν' α-



(Σχ. 7.3.1)

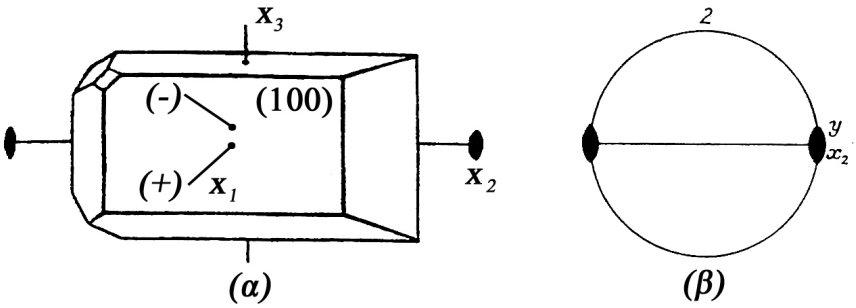
ναδείξουν με μεγαλύτερη έμφαση τον τρόπο που περιελίσσονται στο εσωτερικό του κρυστάλλου. Επομένως μπορούμε να δούμε ότι οι οπτικά ενεργοί κρύσταλλοι συνίστανται από ένα σύστημα στρωμάτων ατόμων, τα οποία συστρέφονται ελαφρά κατά μία φορά καθώς μεταβαίνουν από το ένα στο άλλο έτσι που να δημιουργούν σπείρες γύρω από τον οπτικό τους άξονα. Στους δεξιόστροφους (R) (dextro – rotatory) κρυστάλλους, τα στρώματα περιελίσσονται κατά τη φορά των δεικτών του ρολογιού γύρω από τον οπτικό τους άξονα. Ενώ στους αριστερόστροφους (L) (levo – rotatory) κρυστάλλους περιελίσσονται αντίθετα της φοράς των δεικτών του ρολογιού.

Αναφερόμαστε στα επόμενα σε ένα ακόμα παράδειγμα, που αφορά την οπτική ενεργότητα που εμφανίζει η φυσική ζάχαρη (sucrose). Έχει χημικό τύπο $C_{12}H_{22}O_{11}$ και από κρυστάλλωσή της σε διάλυμα νερού μπορούν να προκύψουν ευμεγέθεις κρύσταλλοι (Εικ. 7.3.2). Κρυσταλλώνεται στο μονοκλινές σύστημα στην τάξη (2) και διαθέτει μόνο ένα άξονα συμμετρίας δεύτερης τάξης. Η ιδανική μορφή του κρυστάλλου (ολοεδρική) φαίνεται στο (Σχ. 7.3.3α). Επομένως είναι διάξο-

νας διπλοθλαστικός κρύσταλλος (δηλ. διαθέτει δύο οπτικούς άξονες) και όπως αποδεικνύεται είναι και οπτικά ενεργός όχι μόνο στην κρυσταλλική του μορφή αλ-

(Εικ. 7.3.2)

λά και σε διάλυματα. Το επίπεδο που βρίσκονται οι δύο οπτικοί του άξονες είναι κάθετο στον άξονα δεύτερης τάξης. Ένας από τους οπτικούς του άξονες είναι συνήθως κάθετος στο επίπεδο (100). Ο άλλος είναι σε γωνία $2V = 45^0\,50'$ από το



(Σχ. 7.3.3)

θετικό άκρο του άξονα x_3 για το φως της λυχνίας Na. Οι κρύσταλλοι της ζάχαρης έχουν δεξιόστροφη οπτική ενεργότητα $\rho = +22^0/\text{mm}$ κατά μήκος του πρώτου οπτικού άξονα και αριστερόστροφη $\rho = -6.4^0/\text{mm}$ κατά μήκος του δεύτερου άξονα για το φως του Na. Σε διάλυμα όμως η φυσική ζάχαρη εκδηλώνει δεξιόστροφη μόνο οπτική ενεργότητα.

Ο (Πίν. 7.3.4) μας δίνει την οπτική ενεργότητα ορισμένων επιπλέον κρυσταλλικών υλικών (για φως της λυχνίας του $\text{Na}: \lambda = 589.2\text{nm}$), κατά μήκος των οπτικών τους αξόνων.

Υλικό	$\rho\left[{}^{0}/\text{mm}\right]$
HgS (Κυνάβαρι)	+32.5
Lead hyposulfate	+5.5
Potassium hyposulfate	+8.4
α-Quartz	+21.684
$NaBrO_3$	+2.8
$NaClO_3$	+3.13

(Πίν. 7.3.4)

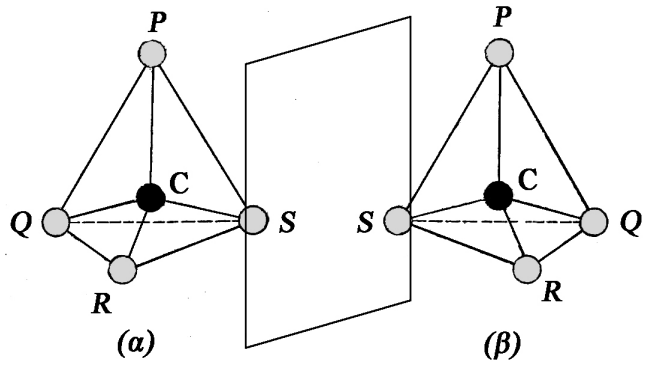
7.4 *Φυσική ερμηνεία της οπτικής ενεργότητας για τα υγρά και τα διαλύματα. Ισομερισμός των μορίων*

Στην περίπτωση των υγρών και διαλυμάτων ουσιών – τα περισσότερα των οποίων είναι οργανικά υλικά – η οπτική ενεργότητα οφείλεται στη μοριακή τους δομή. Δηλ. στο με ποιόν τρόπο είναι διευθετημένα τα άτομα στο εκάστοτε μόριο. Πράγματι αποδεικνύεται ότι τέτοιου είδους μόρια, εκδηλώνουν κάποιου είδους ασυμμετρίες. Όπως λοιπόν στην περίπτωση των κρυστάλλων του $\alpha-$Χαλαζία διακρίνουμε αριστερόστροφους και δεξιόστροφους, με τον ίδιο τρόπο και τα μόρια ενός ορισμένου αριθμού ουσιών διακρίνονται σε αριστερόστροφα και δεξιόστροφα. Όπως θα εξετάσουμε στα επόμενα, το εναντιομορφικό αυτό φαινόμενο στην περίπτωση των μορίων, ονομάζεται ***οπτικός ή κατοπτρικός ισομορφισμός (optical or mirror isomorphism)***. Επομένως υγρά ή διαλύματα που συντίθενται αποκλειστικά από R ή L μόρια ή προεξάρχει ποσοτικά ένας τύπος μορίων σε σχέση με τον άλλο, εμφανίζουν στροφή του επιπέδου πόλωσης προσπίπτοντος Γ.Π.Φ. κατά τη διάδοση διά μέσου τους, δηλ. οπτική ενεργότητα.

Ο L. Pasteur το 1860 δέχτηκε ότι το αίτιο της οπτικής ενεργότητας που εμφανίζουν τα υγρά είναι η λεγόμενη ***μοριακή δισυμμετρία (molecular disymmetry).*** Η ιδέα της δισυμμετρίας αναφέρεται στο γεγονός ότι ένα μοντέλο (π.χ. ένα μόριο που αποτελείται από ένα αριθμό ατόμων), δεν είναι δυνατόν να ταυτιστεί με το κα-

τοπτρικό του απλά με μια υπέρθεση. Ένα κλασσικό παράδειγμα αυτού του είδους 'συμμετρίας' είναι ο κατοπτρισμός του αριστερού μας χεριού από ένα επίπεδο κάτοπτρο (βλ. ΕΡΓΑΣΤ/ΚΗ ΟΠΤΙΚΗ [1]: Γεωμετρική Οπτική (Εικ. 4.1.1.5)). Τότε το είδωλο του παριστάνει το δεξιό μας χέρι, αλλά αντικείμενο και είδωλο δεν είναι δυνατόν να ταυτιστούν με απλή υπέρθεση. Σε μια τέτοιου είδους συμμετρία είναι σαφές ότι δεν περιλαμβάνονται στοιχεία συμμετρίας δεύτερης τάξης όπως: Επίπεδα συμμετρίας, άξονες περιστροφής, κέντρα συμμετρίας κ.λ.π. τα οποία καθορίζουν τις ***συμμετρίες σημείου*** της Κρυσταλλογραφίας. Ούτε όμως η δισσυμμετρία θα πρέπει να ταυτίζεται με την κατάσταση της ***ασυμμετρίας (asymmetry)***, δηλ. την παντελή απουσία συμμετρίας.

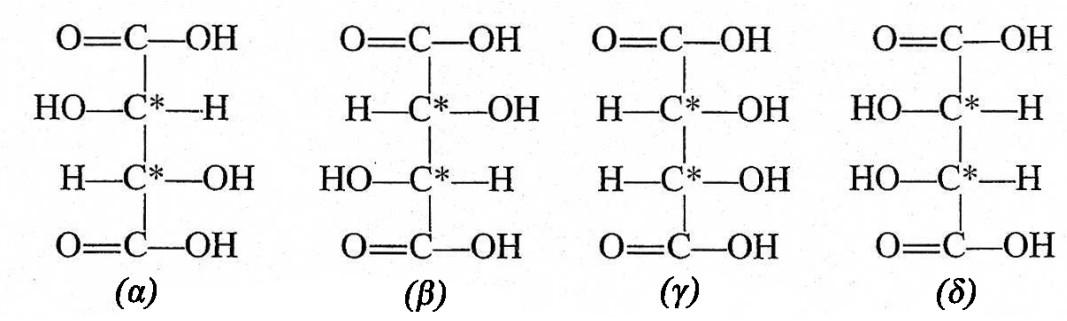
Ο Van't Hoff το 1875 ανέπτυξε την ιδέα του L. Pasteur και πρότεινε το εξής: Η οπτική ισομορφία (εδώ δισυμμετρία), εμφανίζεται σε μοντέλα μορίων που τέσσερα άτομα (ή πιο σύνθετες ομάδες ατόμων) καταλαμβάνουν ανά μία τις κορυφές τετραέδρου και το κέντρο του καταλαμβάνεται από άτομο Άνθρακα. Το άτομο αυτό ονομάζεται ασύμμετρο άτομο Άνθρακα. Δηλ. υφίστανται δεσμοί μεταξύ του τετρασθενούς Άνθρακα και των άλλων ατόμων ή ομάδων στις κορυφές του τετραέδρου. Τέτοιου είδους συστήματα εμφανίζουν δισυμμετρία όπως σαφώς μπορεί να φανεί στο (Σχ. 7.4.1). Εκεί το κάθε άτομο του Άνθρακα C περιβάλλεται από τέσσερα διαφορετικά άτομα (ή ομάδες ατόμων) τα P, Q, R, S. Στο (Σχ. 7.4.1α) τα Q, R, S διευθετούνται κατά φορά αντίθετη των δεικτών του ρολογιού. Ενώ στο (Σχ. 7.4.1β) διευθετούνται κατά τη φορά των δεικτών του ρολογιού όπως τα βλέπουμε κατά μήκος του άξονα PC. Αν τώρα παρατηρούμε κατά μήκος του QC, τα άτομα R, S, P και πάλι θα ιδωθούν να διανύονται στις δύο περιπτώσεις κατ' αντίθετη φορά. Κάτω από αυτές τις συνθήκες τα δύο μόρια εμφανίζουν κατοπτρική συμμετρία. Άρα θα υφίστανται μόρια R και L.



(Σχ. 7.4.1)

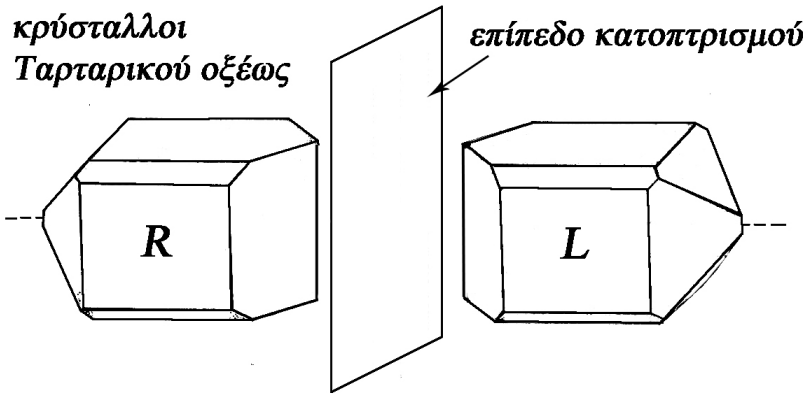
Ένα κλασσικό παράδειγμα αποτελούν τα μόρια του Ταρταρικού οξέος (Tartaric acid)(Σχ. 7.4.2). Το τελευταίο περιλαμβάνει δύο ασύμμετρα άτομα Άν-

θρακα $\left(C^*\right)$και το καθένα του, συνδέεται με το όμοιό του και με τρεις ανόμοιες ομάδες $\left(H, OH, COOH\right)$. Το Ταρταρικό οξύ εμφανίζεται σε τέσσερεις διαφορετικές μορφές από τις οποίες οι δύο (Σχ. 7.4.2α,β) είναι οπτικά ενεργές (αριστερόστροφη και δεξιόστροφη) σε διαλύματα. Το ίδιο ακριβώς συμβαίνει και με την κρυσταλλική τους μορφή. Η ανάδειξη της οπτικής ενεργότητας του Ταρταρικού οξέος



(Σχ. 7.4.2)

έγινε από τον L.Pasteur κατά τη διάρκεια της εκπόνησης της διδακτορικής του διατριβής. Ο δισύμμετρος χαρακτήρας των δύο μορφών του Ταρταρικού οξέος γίνεται ακόμα πιο έντονος στην περίπτωση της σύνθεσης ενός άλατός του που ονομάζεται διπλοταρταρικό νάτριο – αμμώνιο(double tartarate of sodium and ammonium). Για να παρασκευαστεί το τελευταίο ο όξινος δεσμός $\left(COOH\right)$ ουδετεροποιείται από αμμωνία και ο άλλος από νάτριο. Δηλ. η μία καρβοξυλική ρίζα οριοθετείται από



(Σχ. 7.4.3)

ένα ιόν $\left(NH_4^+\right)$ και η άλλη από το ιόν του $\left(Na^+\right)$. Η κρυστάλλωση διαλύματος του τελευταίου, μπορεί να δώσει μικρούς αλλά εξαιρετικής ανάπτυξης κρυστάλλους αριστερόστροφους και δεξιόστροφους (Σχ. 7.4.3), που έχουμε τη δυνατότητα να

τους διακρίνουμε μεταξύ τους. Ο L.Pasteur με τη βοήθεια μικροσκοπίου κατόρθωσε να ξεχωρίσει τους αριστερόστροφους από τους αντίστοιχους δεξιόστροφους. Κατόπιν με διάλυση των τελευταίων, κατόρθωσε να παρασκευάσει διαλύματα τα οποία είχαν καθαρά δεξιόστροφο ή αριστερόστροφο χαρακτήρα.

Ανάμιξη ίσων ποσοτήτων αριστερόστροφου και δεξιόστροφου διαλύματος, δημιουργούν τα λεγόμενα ***ρακεμικά (racemic) μίγματα*** τα οποία δεν εμφανίζουν οπτική ενεργότητα. Μια αξιόλογη παρατήρηση του L.Pasteur – που στην ειδικότητά του ήταν βιολόγος – οδήγησε κατά τα γνωστά στην ανακάλυψη των αντιβιοτικών. Επρόκειτο για την ανάπτυξη σε ρακεμικό μίγμα του διπλοταρταρικού νάτριο – αμμωνίου μιας αποικίας του penicillium glaurum. Το τελευταίο κατάστρεφε συστηματικά τα δεξιόστροφα στοιχεία του μίγματος αφήνοντας ανέγγιχτα τα αριστερόστροφα.

Γενικά η τεχνική παρασκευή ενός οργανικού συστατικού οδηγεί στην ισόποση ύπαρξη αριστερόστροφων και δεξιόστροφων μορίων. Κατά συνέπεια το συστατικό θα είναι (σαν υγρό, αέριο ή μίγμα) οπτικά ανενεργό. Δεν συμβαίνει όμως το ίδιο και για τα οργανικά υλικά τα οποία συντίθενται στη φύση. Είδαμε στην (§ 7.3) ότι η φυσική ζάχαρη (sucrose), σαν διάλυμα εμφανίζει μόνο δεξιόστροφη

Υλικό	$\rho\left[{}^{0}/\mathrm{dm}\right]$
Amyl alcohol	-5.7
Camphor	+70.33
Nicotine	-162
Menthol	-49.7
Turpentine	-49.7

(Πίν. 7.4.4)

οπτική ενεργότητα. Η ιδιότητα αυτή είναι ανεξάρτητη από το αν η ζάχαρη προέρχεται από ζαχαροκάλαμα τεύτλα ή από αλλού. Το ίδιο ακριβώς συμβαίνει και με τα αμινοξέα (amino acids) που αποτελούν τη βάση σύνθεσης των πρωτεϊνών (proteins). Αποδεικνύεται πειραματικά ότι από τα είκοσι αμινοξέα εκτός του ενός (της γλυκίνης – glycine) που τα μόριά της δεν εμφανίζουν εναντιομορφία, τα υπόλοιπα είναι αριστερόστροφα. Το γεγονός αυτό σημαίνει ότι αν από οποιοδήποτε οργανικό συστατικό (από άνθρωπο, ζώο, έντομο κ.λπ.) απομονωθεί ένα από αυτά τα αμινοξέα, θα είναι αριστερόστροφο. Μια σημαντική εξαίρεση αποτελούν τα α-

ντιβιοτικά όπως π.χ. η πενικιλίνη, τα οποία διαθέτουν ένα αριθμό δεξιόστροφων αμινοξέων. Μάλιστα στο γεγονός αυτό οφείλεται και η καταστροφή που προκαλεί η πενικιλίνη στα βακτηρίδια. Τελικά από τα όσα αναφέραμε στην παράγραφο αυτή, διαπιστώνουμε ότι το φαινόμενο της οπτικής ενεργότητας, παίζει σημαντικό ρόλο σε κλάδους της επιστήμης όπως η Κρυσταλλοφυσική, η Κρυσταλλογραφία, η Στερεοχημεία, η Βιολογία κ.λ.π.

Υλικό	Διαλύτης	$\rho\left[{}^{0}/\mathrm{dm}\right]$
Camphor	Alcohol	+54.4
Camphor	Benzene	+56
Camphor	Ether	+57
Galactose	Water	+83.9
d-Glucose (dextrose)	Water	+52.5
l-Glucose	Water	-51.4
Lactose	Water	+52.4
Maltose	Water	+138.48
Nicotine	Water	-77
Nicotine	Benzene	-164
Sucrose	Water	+66.412

(Πίν.7.4.5)

Στον (Πίν. 7.4.4) παρατίθενται οι ειδικές στροφικές ικανότητες ορισμένων υγρών. Για τα υγρά και τα μίγματα όπως και για τα αέρια, λόγω της μικρής τιμής της στροφικής τους ικανότητας ανά mm η τελευταία δίνεται ανά 10cm. Επίσης στον (Πίν. 7.4.5) παρατίθενται οι ειδικές στροφικές ικανότητες ορισμένων ουσιών στους αντίστοιχους διαλύτες τους.

7.5 *Ένα απλοποιημένο μοντέλο ερμηνείας της οπτικής ενεργότητας, με βάση τη δισυμμετρία των μορίων*[*]

Στην (§ 2.2) αναφερθήκαμε στο μοντέλο του μηχανικού ταλαντωτή Lorentz. Δηλ. στην υπόθεση ότι το ηλεκτρονικό νέφος ενός ατόμου μπορεί να ταλαντωθεί σε σχέση με τον υποτιθέμενο ακίνητο πυρήνα του, εφόσον υποστεί την επί-

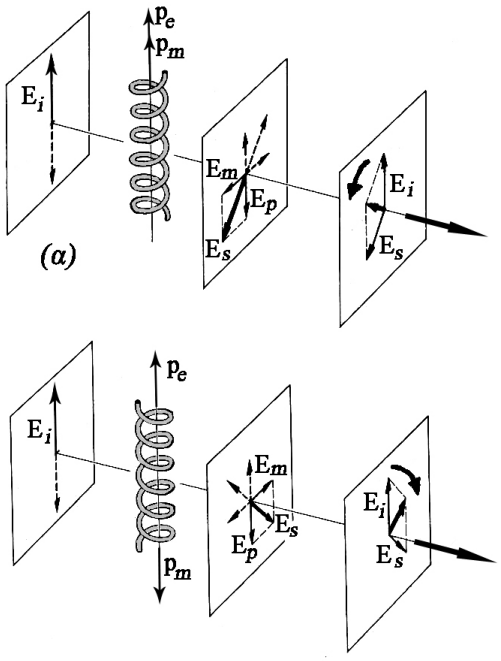
[*] E. Hecht: 'Optics' Addison-Wesley (Third Ed.) Ch.8.

δραση εξωτερικού πεδίου. Στην περίπτωση της ελαστικής σκέδασης, θα έχουμε επανεκπομπή της ακτινοβολίας. Ανάλογα με το αν το υλικό είναι ισότροπο ή ανισότροπο τα 'ελατήρια' ως προς x, y, z που 'συγκρατούν' το ηλεκτρονικό νέφος με τον πυρήνα θα έχουν την ίδια ή διαφορετικές σταθερές. Με τη βοήθεια αυτών των μοντέλων ερμηνεύσαμε το φαινόμενο της διάδοσης του φωτός με σταθερή ταχύτητα προς οποιαδήποτε διεύθυνση στο εσωτερικό των ισοτρόπων υλικών, καθώς και το φαινόμενο της διπλής διάθλασης στα ανισότροπα υλικά (δηλ. τους κρυστάλλους). Μια επιπλέον υπόθεση την οποία μπορούμε να κάνουμε για την περίπτωση των οπτικά ενεργών υλικών είναι η εξής: Τα ηλεκτρόνια των μορίων τους λόγω της δισυμετρίας, αναγκάζονται να κινηθούν εξ αιτίας του εξωτερικά δρώντος ταλαντούμενου πεδίου κατά μήκος τροχιών, που με κάποιο τρόπο θα είναι ελικοειδής. Δηλ. το φορτίο εκτός της γραμμικής του ταλάντωσης, εκτελεί συγχρόνως και μια περιστροφική κίνηση καθιστώντας 'αγώγιμη' την ελικοειδή του τροχιά.

Υποθέτουμε ότι Γ.Π.Φ. έντασης $\mathbf{E}_i$ πέφτει σ' ένα τέτοιο άτομο (Σχ. 7.5.1α) και θέτει το ηλεκτρονικό νέφος σε ταλάντωση κατά μήκος της υποτιθέμενης σπείρας που είναι παράλληλη με το ηλεκ. πεδίο. Κατά τα γνωστά στο δίπολο αναπτύσσεται μια αρμονική ηλεκ. διπολική ροπή $\mathbf{p}_e(t)$ παράλληλη με τον άξονα της σπείρας. Σαν επακόλουθο θα έχουμε επανεκπομπή ακτινοβολίας (λόγω απορρόφησης ποσοστού της προσπίπτουσας) και έστω ότι $\mathbf{E}_p$ είναι αυτό το πεδίο $\mathbf{E}_p \sim -\mathbf{p}_e(t)$ (βλ. ΕΡΓΑΣΤ/ΚΗ ΟΠΤΙΚΗ [3]: Ε.Σ.Σ.Φ. (§ 1.2) (σχ. 1.2.4)). Επιπλέον όμως λόγω της σπειροειδούς κίνησης του ηλεκτρονικού νέφους θα έχουμε και την ανάπτυξη ταλαντούμενου μαγνητικού πεδίου του οποίου η μαγνητική διπολική ροπή $\mathbf{p}_m(t)$ έχει τη διεύθυνση του άξονα της σπείρας. Ταλαντούμενο όμως μαγνητικό πεδίο, αναπτύσσει κάθετα προς την $\mathbf{p}_m(t)$ ηλεκτρικό πεδίο $\mathbf{E}_m$. Επομένως το συνολικό ηλεκτρ. πεδίο της επανεκπεμπόμενης από το άτομο ακτινοβολίας θα είναι το $\mathbf{E}_s = \mathbf{E}_p + \mathbf{E}_m$. Η διεύθυνση όμως αυτού του πεδίου δεν θα είναι η ίδια με αυτήν του προσπίπτοντος πεδίου $\mathbf{E}_i$.

Η διεύθυνση του πεδίου $\mathbf{E}_m$ άρα και του $\mathbf{E}_s$ θα εξαρτώνται από το αν (για οποιαδήποτε χρονική στιγμή) τα διανύσματα $\mathbf{p}_m(t)$ και $\mathbf{p}_e(t)$ είναι παράλληλα ή αντιπαράλληλα. Το τελευταίο βέβαια εξαρτάται από τη στροφικότητα της σπείρας (αριστερόστροφη ή δεξιόστροφη) η οποία ανάγεται τελικά στο αν τα μόρια είναι αριστερόστροφα(L) ή δεξιόστροφα(R). Το επίπεδο ταλάντωσης τελικά του συνολικά διαδιδόμενου πεδίου – με την προϋπόθεση ότι δεν έχουμε πλήρη απορρόφηση του προσπίπτοντος πεδίου $\mathbf{E}_i$ στο άτομο – θα δίνεται από τη διεύθυνση του διανύσματος $\mathbf{E}_s + \mathbf{E}_i$ (Σχ. 7.5.1α,β). Δηλ. θα είναι ένα πεδίο στραμμένο αριστερόστροφα (Σχ. 7.5.1α), ή δεξιόστροφα (Σχ. 7.5.1β) και θα καθορίζεται από τη στροφικότητα

των σπειρών του μοντέλου του ατόμου. Το τελευταίο γεγονός ερμηνεύει την οπτική ενεργότητα που εμφανίζουν τέτοιου είδους άτομα. Θα πρέπει να σημειώσουμε ότι ίδια συλλογιστική ισχύει και για τα διαμεσολαβούντα μαγνητικά πεδία της προσπίπτουσας διαταραχής καθώς και γι' αυτά που αναπτύσσονται λόγω της ταλάντωσης του ηλεκτρικού πεδίου του διπόλου. Δηλ. σαν αποτέλεσμα θα έχουμε ένα στραμμένο κατά την ίδια γωνία (δεξιόστροφα ή αριστερόστροφα) τελικό μαγνητικό πεδίο $\mathbf{B}_s + \mathbf{B}_i$ (ορθογώνιο προς το $\mathbf{E}_s + \mathbf{E}_i$) στην περιοχή της ζώνης ακτινοβολίας.



(Σχ .7.5.1)

Παρά το ότι η παραπάνω προτεινομένη ερμηνευτική διαδικασία είναι ανεπαρκώς τεκμηριωμένη, εντούτοις μια πειραματική προσομοίωσή της στην περιοχή των μικροκυμάτων την επιβεβαιώνει πλήρως*. Σ' ένα δοχείο με κάθετες πλευρές τοποθετήθηκε μεγάλος αριθμός από χάλκινες σούστες (σπείρες) διαμέτρου 0.5cm και μήκους 1cm σε εντελώς τυχαία διάταξη. Μεταξύ τους ήταν πλήρως μονωμένες και η στροφικότητά τους ήταν η ίδια (δηλ. όλες αριστερόστροφες ή δεξιόστροφες). Κάθετα προς τη μία έδρα του δοχείου προσέπεσε δέσμη μικροκυμάτων μ.κ. 3cm γραμμικά πολωμένη σε μία διεύθυνση. Το αποτέλεσμα έδειξε ότι στην έξοδο του δοχείου η δέσμη των μικροκυμάτων είχε υποστεί σαφή στροφή του επιπέδου πόλωσής της σε σχέση με την προσπίπτουσα.

* I. Tinoco and M. P. Freeman, 'The Optical Activity of Oriented Copper Helices' J. Phys. Chem. **61** 1196 (1975).

7.6 *Διπλοθλαστικότητα και οπτική ενεργότητα*[*]

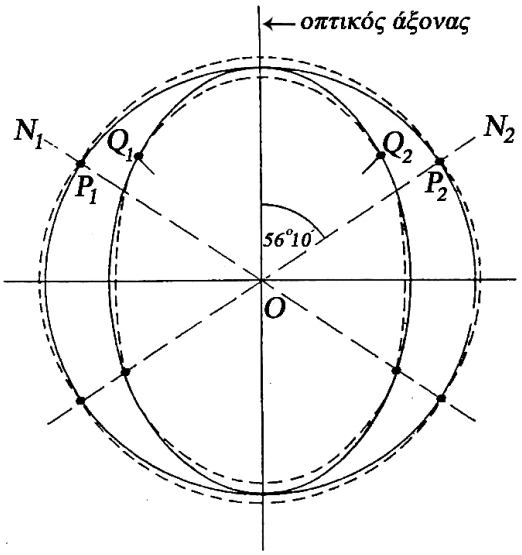
Η θεωρία της οπτικής ενεργότητας την οποία αναπτύξαμε στις προηγούμενες παραγράφους, ισχύει για ισότροπα στροφικά υλικά όπως: Υγρά (και τα διαλύματά τους), αέρια, κρυστάλλους του κυβικού συστήματος καθώς και για ανισότροπα υλικά, όπου όμως η διάδοση του φωτός γίνεται κατά τη διεύθυνση του οπτικού τους άξονα. Ένας τέτοιος κρύσταλλος στον οποίο αναφερθήκαμε πολλές φορές ήταν αυτός του α – Χαλαζία. Και όπως γνωρίζουμε (βλ. § 5.3) πρόκειται για ένα μονοάξονα διπλοθλαστικό κρύσταλλο ο οποίος όμως είναι οπτικά ενεργός σε αντίθεση με τον κρύσταλλο του Ασβεστίτη, που είναι μεν αρνητικός διπλοθλαστικός αλλά στερείται οπτικής ενεργότητας. Γνωρίζουμε βέβαια το γεγονός ότι κατά μήκος του οπτικού τους άξονα οι διπλοθλαστικοί κρύσταλλοι δεν εμφανίζουν το φαινόμενο της διπλής διάθλασης. Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι οι ταχύτητες διάδοσης τακτικής και έκτακτης διαταραχής είναι ίδιες. Επομένως για οπτικά ενεργούς διπλοθλαστικούς κρυστάλλους στη διεύθυνση αυτή, η ταχύτητες διάδοσης του φωτός καθώς και οι καταστάσεις πόλωσης των δύο διαταραχών, θα καθορίζονται εκτός της διπλοθλαστικότητας και από την οπτική τους ενεργότητα. Το ερώτημα λοιπόν που μπορεί να τεθεί είναι το εξής: Τι ακριβώς φαινόμενα θα προκύψουν, όταν η διεύθυνση διάδοσης του φωτός στο εσωτερικό του οπτικά ενεργού και διπλοθλαστικού κρυστάλλου είναι διαφορετική από αυτήν του οπτικού άξονα. Αποδεικνύεται ότι στην περίπτωση αυτή, τα φαινόμενα της οπτικής ενεργότητας έρχονται σε 'επαλληλία' με τα της διπλοθλαστικότητας και μπορούν να θεωρηθούν σαν 'διαταραχές' πάνω στα τελευταία.

Θα περιγράψουμε εδώ ποιοτικά (βλ. ΠΑΡ/ΜΑ 4-Η) το φαινόμενο με ένα παράδειγμα, στηριζόμενοι στον κρύσταλλο του α – Χαλαζία (§ 5.3,4). Πρόκειται για θετικό μονοάξονα κρύσταλλο, όπου αν θεωρήσουμε αρχικά ότι δεν είναι οπτικά ενεργός τότε οι επιφάνειες κύματος (οι λεγόμενες και επιφάνειες ταχύτητας ακτίνας (βλ. (§ 5.4)) δίνονται στο (Σχ. 7.6.1) (συνεχείς γραμμές). Θ' αποτελούνται στο επίπεδο του (Ο.Α.) από ένα κύκλο ο οποίος θα περιβάλλει μία έλλειψη και θα έρχονται σε επαφή μόνο κατά μήκος του οπτικού άξονα (Ο.Α.), όπου δηλ. οι ταχύτητες ακτίνας (που στη διεύθυνση αυτή ταυτίζονται με τις ταχύτητες φάσης) είναι ίδιες. Οι κύριοι δ.δ. του είναι $n_e = 1.553$ και $n_o = 1.544$. Επομένως ο λόγος των ακτίνων των δύο επιφανειών κύματος σε διεύθυνση κάθετη στον (Ο.Α.) (βλ. Σχ. 7.4.6β) θα είναι:

$$\frac{R_o}{R_e} = \frac{1/n_o}{1/n_e} = \frac{n_e}{n_o} = \frac{1.553}{1.544} = 1.006$$

[*] J. F. Ney, 'Physical Properties of Crystals' Oxford (1967) ch. XIV: Optical Activity.

Η συμμετοχή όμως και του φαινόμενου της οπτικής ενεργότητας στη διαμόρφωση των επιφανειών αυτών, έρχεται να διαταράξει (έστω και κατ' ολίγο) τη μορφολογία τους όπως διαπιστώνουμε από το (Σχ. 7.6.1) (διακεκομμένες γραμμές). Βλέπουμε (έστω κατ' αρχή) ότι κατά μήκος του (Ο.Α.) οι επιφάνειες κύματος δεν εφάπτονται πλέον. Η απόσταση μεταξύ τους οφείλεται στο ότι οι ταχύτητες διάδοσης των

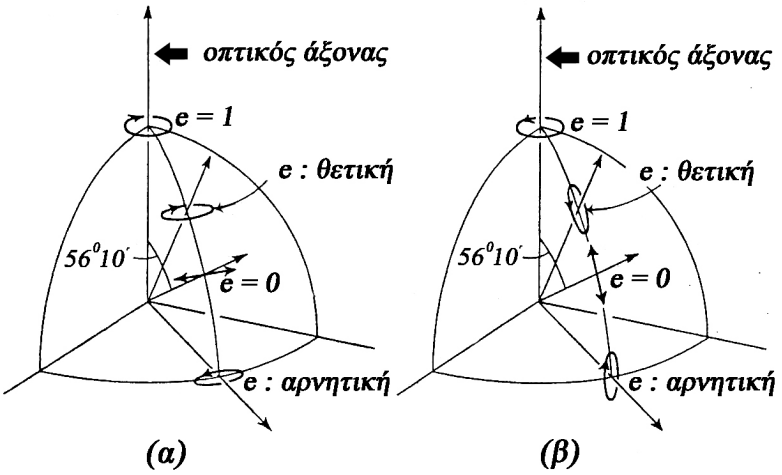


(Σχ. 7.6.1)

δύο κυκλικά πολωμένων διαταραχών (λόγω οπτικής ενεργότητας) δεν έχουν ίδια τιμή. Κάτω από αυτές τις συνθήκες αποδεικνύεται ότι η διαφορά των δύο ακτίνων κατά μήκος του (Ο.Α.) είναι πολύ μικρή αλλά διάφορη του μηδενός (της τάξης του 5×10^{-5} της μέσης ακτίνας των R_o, R_e). Στο σχήμα για εποπτικούς λόγους η διαφορά αυτή υπερτονίζεται.

Στην ((§ 5.4) (Σχ. 5.4.1β)), πριν εισάγουμε την έννοια της οπτικής ενεργότητας, θεωρήσαμε ότι οι δύο επιφάνειες κύματος του κρυστάλλου του α-Χαλαζία (τακτική και έκτακτη) αντιπροσώπευαν την ταχύτητα διάδοσης προς κάθε διεύθυνση, των εκπεμπόμενων διαταραχών από μια σημειακή πηγή στο κέντρο του. Οι διαταραχές αυτές αποτελούνταν από δύο γραμμικά πολωμένα επίπεδα μέτωπα κύματος, ορθογώνια μεταξύ τους, που διαδίδονταν στην ίδια διεύθυνση αλλά με διαφορετικές ταχύτητες (τακτική και έκτακτη διαταραχή)(ταχύτητες διάδοσης της ενέργειας). Στην περίπτωση όμως που ο κρύσταλλος είναι οπτικά ενεργός, αποδείξαμε (και πειραματικά) ότι τουλάχιστον κατά μήκος του οπτικού του άξονα οι δύο διαταραχές είναι κυκλικά πολωμένες με διαφορετικές ταχύτητες διάδοσης καθώς και αντίθετες στροφικότητες. Αποδεικνύεται τελικά ότι στη γενικότερη περίπτωση που η διάδοση στο εσωτερικό του κρυστάλλου γίνεται προς μια τυχαία διεύθυνση (κυματοκάθετη)

ως προς τον (Ο.Α.) διαδίδονται προς τα εκεί και πάλι δύο επίπεδα μέτωπα κύματος που είναι ορθογώνια μεταξύ τους. Μόνο που η κατάσταση πόλωσής τους είναι ελλειπτική και η ταχύτητα διάδοσής τους διαφορετική. Η ελλειπτικότητα (δηλ. ο λόγος του μικρού προς τον μεγάλο άξονα) των ελλειπτικά πολωμένων καταστάσεων είναι η ίδια αλλά η στροφικότητά τους αντίθετη.



(Σχ. 7.6.2)

Στον α – Χαλαζία η ελλειπτικότητα e, εξαρτάται από τη γωνία που σχηματίζουν η διεύθυνση διάδοσης στο εσωτερικό του κρυστάλλου (κυματοκάθετη) και ο οπτικός του άξονας. Στο (Σχ. 7.6.2) δίνεται παραστατικά η ελλειπτικότητα σε διάφορες από τις προαναφερόμενες γωνίες, για την τακτική (Σχ. 7.6.2α) και την έκτακτη (Σχ. 7.6.2β) διαταραχή. Βλέπουμε ότι κατά τη διεύθυνση του (Ο.Α.) $e = 1$. Δηλ. έχουμε τις κυκλικά πολωμένες καταστάσεις. Αποδεικνύεται ότι για γωνία διάδοσης ως προς τον (Ο.Α.) $\phi = 56^0 10'$ θα είναι $e = 0$. Δηλ. μόνο προς αυτή τη διεύθυνση διάδοσης οι καταστάσεις πόλωσης των δύο ορθογωνίων διαταραχών είναι γραμμικά πολωμένα μετ. κύματος. Σε οποιαδήποτε άλλη διεύθυνση οι καταστάσεις θα είναι ελλειπτικά πολωμένες. Ποσοτικοί υπολογισμοί της ειδικής στροφικής ικανότητας, των καταστάσεων πόλωσης καθώς και των ταχυτήτων φάσης προς οποιαδήποτε διεύθυνση διάδοσης στο εσωτερικό του κρυστάλλου κατά της διεύθυνση μια κυματοκαθέτου $\mathbf{k}$, προϋποθέτει τον προσδιορισμό ενός μεγέθους G (μικρού σε μέγεθος σε σχέση με τη μονάδα). Είναι το μέτρο του λεγόμενου ***στροφικού διανύσματος*** **G** παραλλήλου προς την $\mathbf{k}$ του οποίου το μέτρο G μεταβάλλεται κατά διεύθυνση και μας δίνει το μέγεθος της οπτικής ενεργότητας (βλ. ΠΑΡ/ΜΑ 4-Η). Εξαρτάται από το είδος του κρυστάλλου καθώς και τη συμμετρία του.

8 *Εφαρμογές με τη χρήση διπλοθλαστικών οπτικών συστημάτων*

Στη σύγχρονη οπτική τεχνολογία χρησιμοποιείται ένα πολύ μεγάλο πλήθος τεχνημάτων και διατάξεων που στη σύνθεσή τους περιλαμβάνονται διπλοθλαστικά κρυσταλλικά υλικά, με εξαιρετικά πολυπληθή πεδία εφαρμογών. Στις επόμενες παραγράφους αυτού του κεφαλαίου θα εκθέσουμε ένα περιορισμένο αριθμό εφαρμογών όπως είναι: α)Τα ***πολωτικά φασματικά φίλτρα Lyot (Lyot spectrum polarized filters***). Πρόκειται για οπτικά γραμμικά φίλτρα από τα οποία διέρχεται μια εξαιρετικά στενή φασματική περιοχή, δηλ. φως με υψηλή μονοχρωματικότητα. β) Η ***φωτοελαστικότητα (Photoelasticity)*** για τα ισότροπα υλικά. Η τελευταία αποτελεί τη βάση ανάπτυξης μιας οπτικής μεθόδου μετρολογίας μεγάλης ακρίβειας. γ) Οι ***ηλεκτροοπτικοί διαμορφωτές (electro-optic modulators)***. Που συνιστούν κατ' εξοχή συστήματα χρονικής διαμόρφωσης οπτικών πληροφοριών, οι οποίες διαδίδονται σε οπτικούς κυματοδηγούς (οπτικές ίνες) και χρησιμοποιούνται τα μέγιστα στις τηλεπικοινωνίες.

Είναι απαραίτητο βέβαια ν' αναφέρουμε ότι οι γνώσεις οι οποίες αποκτήθηκαν μέχρις εδώ από τα προηγούμενα κεφάλαια, δεν επαρκούν (αν εξαιρέσουμε τη θεωρία των φίλτρων Lyot) για την κατανόηση των εφαρμογών που θα παρατεθούν. Οι γνώσεις αυτές αναπτύσσονται λεπτομεριακά στο (ΠΑΡ/ΜΑ 4-Ζ). Αφορούν τη λεγόμενη επαγόμενη διπλόθλαστικότητα την οποία μπορούν ν' αποκτήσουν οι κρύσταλλοι. Αναφερόμαστε πιο συγκεκριμένα στο ***ηλεκτρο-οπτικό φαινόμενο(electro-optic effect)*** δηλ. την εμφάνιση διπλοθλαστικότητας κατά την εφαρμογή ηλεκτρικού πεδίου σ' αυτούς. Επίσης αναφερόμαστε στο ***φωτοελαστικό φαινόμενο (photo-elastic effect)***. Δηλ. την εμφάνιση διπλοθλαστικότητας (ακόμη και σε ισότροπα υλικά) κατά την εφαρμογή σ' αυτούς μηχανικής τάσης.

8.1 *Το φίλτρο Lyot*

Τα μονοχρωματικά φίλτρα, είναι γνωστό ότι έχουν ιδιαίτερη σημασία στην οπτική. Χρησιμοποιούνται όταν από ένα ευρύ φάσμα ακτινοβολιών (π.χ. από το λευκό φως) πρέπει για διάφορους λόγους ν' απομονωθεί μια πολύ στενή περιοχή. Μια κατηγορία τους, είναι τα κοινά ***συμβολομετρικά(interference filers)*** (βλ. ΕΡΓΑΣΤ/ΚΗ ΟΠΤΙΚΗ [3]: Ε.Σ.Σ.Φ. (§ 8.3.5)) για τα οποία το φασματικό τους εύρος είναι μεταξύ 50-100 Å. Υπάρχουν όμως περιπτώσεις για τις οποίες αυτό το εύρος θα πρέπει να γίνει 1 Å ή και ακόμη μικρότερο. Μια από αυτές π.χ. είναι η επιθυμία μας για φωτογράφηση περιοχών της χρωμόσφαιρας του ηλίου. Ως γνωστό εκεί, έχουμε έντονη εκπομπή στη γραμμή H_α του υδρογόνου. Έχουμε όμως ταυτόχρονα και εκπομπή ενός συνεχούς φάσματος ακτινοβολιών οι οποίες υπό μορφή

θορύβου θα συνυπάρχουν με το επιθυμητό σήμα. Για το λόγο αυτό θα πρέπει στο φωτογραφικό σύστημα του τηλεσκοπίου, να παρεμβάλλουμε ένα ειδικό φίλτρο που θα επιτρέπει μόνο τη διέλευση ακτινοβολιών στην περιοχή της γραμμής H_α, αποκόπτοντας τις υπόλοιπες. Ένα τέτοιο φίλτρο κατασκευάσθηκε με τη βοήθεια γραμμικών πολωτών και πλακιδίων καθυστέρησης, από τους Lyot-Öhman. Η θεωρητική του ανάλυση καθώς και μια κατασκευαστική του προσέγγιση θα δοθεί στα επόμενα.

Προσδιορισμός των χαρακτηριστικών του φίλτρου Lyot

Το φασματικό αυτό φίλτρο συντίθεται από N τον αριθμό κρυσταλλικά πλακίδια καθυστέρησης το καθένα της ίδιας διπλοθλαστικότητας Δn των οποίων τα αντίστοιχα πάχη είναι ίσα με: $d, 2d, 4d, 8d, 16d$ κ.ο.κ. Το καθένα από αυτά βρίσκεται μεταξύ δύο γραμμικών πολωτών με τους άξονες διέλευσής τους παράλληλους (Σχ. 8.1.1). Ταχείς άξονες και άξονες διέλευσης έχουν κλίση 45^0.

Αν υποθέσουμε ότι το πάχος του πρώτου πλακιδίου είναι d, τότε η διαφορά φάσης Φ μεταξύ τακτικής και έκτακτης διαταραχής θα δίνεται από τη γνωστή σχέση:

$$\Phi = \frac{2\pi}{\lambda}\left(n_e - n_o\right)d \tag{8.1.1}$$

όπου $\Delta n = n_e - n_o$ η διπλοθλαστικότητα του κρυστάλλου και λ το μ.κ. του προσπίπτοντος φωτός. Τότε για το $k-$ τάξης πλακίδιο πάχους $2^{k-1}d$ η επιβαλλόμενη διαφορά φάσης θα είναι:

$$\Phi_k = \frac{2\pi}{\lambda}\left(n_e - n_o\right)2^{k-1}d = 2^{k-1}\Phi \tag{8.1.2}$$

Θα θεωρήσουμε στα επόμενα ότι οι άξονες διέλευσης των πολωτών είναι παράλληλοι με τον άξονα x του εργαστηριακού συστήματος συντεταγμένων και ότι οι ταχείς άξονες των πλακιδίων είναι στραμμένοι κατά γωνία $\theta = 45^0$ ως προς τον x. Τότε με βάση τη (σχ. 5.49) του (ΠΑΡ/ ΜΑΤΟΣ 5) ο πίνακας Jones του πλακιδίου καθυστέρησης για $\Phi = \Phi_k$ και $\theta = 45^0$ γίνεται:

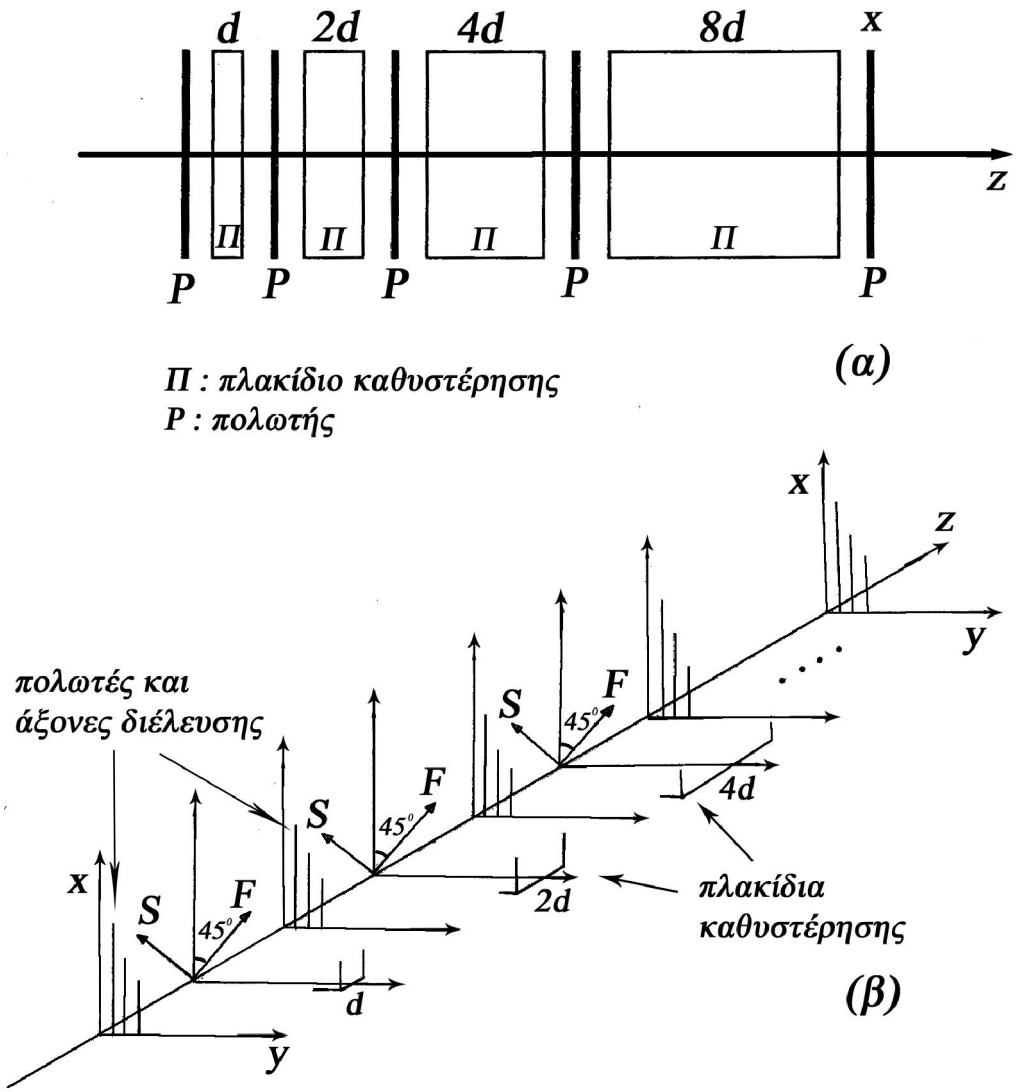
$$\mathbf{M}^{(k)} = \begin{pmatrix} \cos\left(\Phi_k/2\right) & i\sin\left(\Phi_k/2\right) \\ i\sin\left(\Phi_k/2\right) & \cos\left(\Phi_k/2\right) \end{pmatrix} \tag{8.1.3}$$

Επίσης ο πίνακας Jones $\mathbf{P}$ του πολωτή, που ο άξονας διέλευσής του είναι κατά τη διεύθυνση του άξονα x, δίνεται από τη (σχ. 5.31) του (ΠΑΡ/ ΜΑΤΟΣ 5):

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{8.1.4}$$

Τότε ο συνολικός πίνακας του συστήματος των N πλακιδίων και των $N+1$ γραμμικών πολωτών θα δίνεται από τη σχέση:

$$\mathbf{J} = \mathbf{P}\mathbf{M}^{N}\mathbf{P}\mathbf{M}^{N-1}\mathbf{P} \cdots\cdots \mathbf{P}\mathbf{M}^{2}\mathbf{P}\mathbf{M}^{1}\mathbf{P} \tag{8.1.5}$$



(Σχ. 8.1.1)

Επειδή όμως: $\mathbf{P}^2 = \mathbf{P}\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{P}$ η (σχ. 8.1.5) γίνεται:

$$\mathbf{J} = \left(\mathbf{PM}^{N}\mathbf{P}\right)\left(\mathbf{PM}^{N-1}\mathbf{P}\right)\mathbf{P}\cdots\cdots\mathbf{P}\left(\mathbf{PM}^{2}\mathbf{P}\right)\left(\mathbf{PM}^{1}\mathbf{P}\right) \tag{8.1.6}$$

Δηλ. το οπτικό σύστημα του φίλτρου Lyot θα μπορούσαμε να πούμε ότι αποτελείται από N τον αριθμό υποσυστήματα της μορφής $\mathbf{J}^k = \mathbf{PM}^k\mathbf{P}$ όπου:

$$\mathbf{PM}^k\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos(\Phi_k/2) & i\sin(\Phi_k/2) \\ i\sin(\Phi_k/2) & \cos(\Phi_k/2) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\Phi_k/2) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{8.1.7}$$

Επομένως η τελική μορφή του συνολικού πίνακα $\mathbf{J}$ θα δίνεται από τον N τον αριθμό γινόμενα των τριάδων: $\mathbf{PM}^k\mathbf{P}$ με $k = 1, 2, ..., N$. Δηλ.

$$\mathbf{J} = \prod_{k=1}^{N}\mathbf{PM}^k\mathbf{P} = \prod_{k=1}^{N}\begin{pmatrix} \cos(\Phi_k/2) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \prod_{k=1}^{N}\cos(\Phi_k/2) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{8.1.8}$$

Αν τώρα $\mathbf{E} = \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \end{pmatrix}$ το διάνυσμα Jones του προσπίπτοντος φωτός στον πρώτο πολωτή και $\mathbf{E}' = \begin{pmatrix} E'_x \\ E'_y \end{pmatrix}$ του εξερχομένου από τον τελευταίο, τότε:

$$\mathbf{E}' = \begin{pmatrix} E'_x \\ E'_y \end{pmatrix} = \mathbf{J}\begin{pmatrix} E_x \\ E_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \prod_{k=1}^{N}\cos(\Phi_k/2) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E_x \\ E_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_x\prod_{k=1}^{N}\cos(\Phi_k/2) \\ 0 \end{pmatrix} \tag{8.1.9}$$

Και επειδή από τη (σχ. 5.8) του (ΠΑΡ/ΜΑΤΟΣ 5) $I_t = \mathbf{E}'^{T*}\mathbf{E}'$, θα έχουμε για την ένταση του εξερχομένου φωτός από το φίλτρο:

$$\begin{aligned} I_t &= \begin{pmatrix} E_x^*\prod_{k=1}^{N}\cos(\Phi_k/2) & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E_x\prod_{k=1}^{N}\cos(\Phi_k/2) \\ 0 \end{pmatrix} = \\ &= E_xE_x^*\prod_{k=1}^{N}\cos(\Phi_k/2)\prod_{k=1}^{N}\cos(\Phi_k/2) = (I_0/2)\prod_{k=1}^{N}\left[\cos(\Phi_k/2)\right]^2 \end{aligned} \tag{8.1.10}$$

όπου I_0 η ένταση του προσπίπτοντος φυσικού φωτός. Τότε η (σχ. 8.1.10) γίνεται:

$$I_t = \left(I_0/2\right)\prod_{k=1}^{N}\left[\cos\left(\Phi_k/2\right)\right]^2 = \left(I_0/2\right)t^2 \qquad (8.1.11)$$

όπου t^2 η διαπερατότητα του φίλτρου.

Το ενδιαφέρον μας στα επόμενα εστιάζεται στην απλοποίηση της (σχ. 8.1.11) και πιο συγκεκριμένα της διαπερατότητας t^2. Το αποτέλεσμα αυτό θα μας οδηγήσει στον προσδιορισμό ορισμένων φασματικών ιδιοτήτων της δέσμης εξόδου όπως είναι:Το ***φασματικό εύρος (transmission bandwidth-FWHM)***, της ***ελεύθερης φασματικής περιοχής(free spectral range)*** και της ***λεπτότητας(finesse)*** των φασματικών ζωνών. Για το λόγο αυτό θα εκκινήσουμε από την απλοποίηση του:

$$t = \prod_{k=1}^{N}\cos\left(\Phi_k/2\right) = \cos\frac{\Phi_1}{2}\cdot\cos\frac{\Phi_2}{2}\cdot\ \cdot\ \cdot\cos\frac{\Phi_k}{2}\cdot\ \cdot\ \cdot\cos\frac{\Phi_N}{2} \qquad (8.1.12)$$

Με τη βοήθεια της (σχ. 8.1.2): $\Phi_k = \frac{2\pi}{\lambda}\left(n_e - n_o\right)2^{k-1}d = 2^{k-1}\Phi$ αν θέσουμε:

$$\beta_k = \frac{\Phi_k}{2}\ ,\ \beta = \frac{\Phi}{2} \quad \text{η} \quad \frac{\Phi_k}{2} = 2^{k-1}\frac{\Phi}{2} \quad \text{γίνεται} \quad \beta_k = 2^{k-1}\ \beta \qquad (8.1.13)$$

Τότε η (σχ. 8.1.12) παίρνει τη μορφή:

$$t = \cos\beta\cdot\cos 2\beta\cdot\cos 4\beta\cdot\ \cdot\ \cdot\cos 2^{k-1}\ \beta \qquad k = 1,2,\cdots,N \qquad (8.1.14)$$

Είναι όμως: $\cos m\beta = \frac{e^{im\beta}}{2}\left(1+e^{-2im\beta}\right)$. Οπότε για $N=3$ η (σχ. 8.1.14) γίνεται:

$$\begin{aligned} t &= \frac{1}{2^3}e^{i\beta}e^{i2\beta}e^{i4\beta}\left(1+e^{-2i\beta}\right)\left(1+e^{2(-2i\beta)}\right)\left(1+e^{4(-2i\beta)}\right) = \\ &= \frac{1}{2^3}e^{i\beta(1+2+4)}\left(1+e^{(-2i\beta)}+e^{2(-2i\beta)}+e^{3(-2i\beta)}+e^{4(-2i\beta)}+e^{5(-2i\beta)}+e^{6(-2i\beta)}+e^{7(-2i\beta)}\right) \end{aligned} \qquad (8.1.15)$$

και προκειμένου να την γενικεύσουμε για $N = N$:

$$\frac{1}{2^3}e^{i\beta(1+2+4)} \quad N=3 \quad \rightarrow \quad \frac{1}{2^N}\,e^{i\beta\left(\sum_{k=1}^{N}2^{k-1}\right)} \quad N=N \qquad (8.1.16)$$

Είναι όμως: $\sum_{p=1}^{N} 2^p = 2^{N+1} - 2$,

οπότε: $\sum_{k=1}^{N} 2^{k-1} = 1 + 2 + 4 + 8 + .. = 1 + \left(2 + 4 + 8 + ...\right) = 1 + \sum_{p=1}^{N} 2^p$ και τελικά:

$$\sum_{k=1}^{N} 2^{k-1} = 1 + \sum_{p=1}^{N} 2^p = 1 + 2^{N+1} - 2 = 2^{N+1} - 1 \;\Rightarrow\; \sum_{k=1}^{N} 2^{k-1} = 2^{N+1} - 1 \qquad (8.1.17)$$

Επομένως η γενικευμένη (σχ. 8.1.16) με τη βοήθεια της (σχ. 8.1.17) γίνεται:

$$\frac{1}{2^N}\, e^{i\beta\left(\sum_{k=1}^{N} 2^{k-1}\right)} = \frac{1}{2^N}\, e^{i\beta\left(2^{N+1}-1\right)} \qquad N = N \qquad (8.1.18)$$

Στην επόμενη φάση γενικεύουμε τον όρο:

$$1 + e^{(-2i\beta)} + e^{2(-2i\beta)} + e^{3(-2i\beta)} + e^{4(-2i\beta)} + e^{5(-2i\beta)} + e^{6(-2i\beta)} + e^{7(-2i\beta)} \qquad N = 3$$

της (σχ. 8.1.15). Ο τελευταίος μπορεί να γραφεί:

$$\sum_{k=1}^{8} e^{-(k-1)i2\beta} = \sum_{k=1}^{2^3} e^{-(k-1)2i\beta} \quad N = 3 \quad \rightarrow \quad \sum_{k=1}^{2^N} e^{-(k-1)2i\beta} \quad N = N \qquad (8.1.19)$$

Η σχέση όμως $\sum_{k=1}^{2^N} e^{-(k-1)i2\beta}$ αποτελεί μια γεωμετρική πρόοδο με πρώτο όρο $a = 1$, $N-$οστό όρο τον $\tau = e^{\left(2^N-1\right)(-i2\beta)}$ και λόγο $\omega = e^{-i2\beta}$. Επομένως:

$$\sum_{k=1}^{2^N} e^{-(k-1)i\beta} = \frac{\tau\omega - \alpha}{\omega - 1} = \frac{1 - e^{2^N(-2i\beta)}}{1 - e^{(-2i\beta)}} \qquad (8.1.20)$$

Επομένως με τη βοήθεια των (σχ. 8.1.18, 20) η (σχ. 8.1.14) παίρνει τη μορφή:

$$t = \frac{1}{2^N}\left[e^{i\beta\left(2^{N+1}-1\right)}\right]\left[\frac{1 - e^{2^N(-2i\beta)}}{1 - e^{(-2i\beta)}}\right] \qquad (8.1.21)$$

Έχουμε όμως από τη (σχ. 8.1.11): $I_t = \left(I_0/2\right)t^2$ όπου $t^2 = tt^*$. Επομένως :

$$t^2 = tt^* = \left(\frac{1}{2^N}\right)^2 \frac{\left(1-e^{-2^N(2i\beta)}\right)\left(1-e^{2^N(2i\beta)}\right)}{\left(1-e^{-(2i\beta)}\right)\left(1-e^{(2i\beta)}\right)} \tag{8.1.22}$$

Επίσης:

$$\begin{aligned} &\left(1-e^{-(2i\beta)}\right)\left(1-e^{(2i\beta)}\right) = 2\left(1-\cos 2\beta\right) = 4\sin^2\beta \\ &\left(1-e^{-2^N(2i\beta)}\right)\left(1-e^{2^N(2i\beta)}\right) = 2\left(1-\cos 2^N 2\beta\right) = 4\sin^2 2^N\beta \end{aligned} \tag{8.1.23}$$

Επομένως η (σχ. 8.1.11) με τη βοήθεια των (σχ.8.1.22,23) γίνεται:

$$I_t = \frac{I_0}{2}\left[\frac{1}{2^N}\frac{\sin 2^N\left(\Phi/2\right)}{\sin\left(\Phi/2\right)}\right]^2 \tag{8.1.24}$$

επειδή $\beta = \Phi/2$.

Στα επόμενα θα επιχειρήσουμε να αποδώσουμε γραφικά – κατ' αρχή μία προς μία – τις κατανομές των εντάσεων που οφείλονται σε πέντε διαδοχικά υποσυστήματα (πολωτής-πλακίδιο-πολωτής) του φίλτρου Lyot, για πρόσπτωση στο καθένα φυσικού φωτός σε μια περιοχή του ορατού φάσματος. Τα διαδοχικά τους πάχη κατά τα γνωστά θα είναι: $d, 2d, 4d, 8d, 16d$ και οι φάση Φ_k για το k υποσύστημα δίνεται από τη γνωστή (σχ. 8.1.2): $\Phi_k = \frac{2\pi}{\lambda}\left(n_e - n_o\right)2^{k-1}d = 2^{k-1}\Phi$. Τότε με τη βοήθεια της (σχ. 8.1.7) η εξερχόμενη ένταση από το k υποσύστημα για πρόσπτωση σ' αυτό φυσικού φωτός θα είναι:

$$I = \frac{I_0}{2}\cos^2\frac{\Phi_k}{2} = \frac{I_0}{2}\cos^2 2^{k-1}\frac{\Phi}{2} = \frac{I_0}{4}\left(1+\cos 2^{k-1}\Phi\right) \tag{8.1.25}$$

Τότε: (α) Για $k=1$, $I = \left(I_0/4\right)\left(1+\cos\Phi\right)$. (β) Για $k=2$, $I = \left(I_0/4\right)\left(1+\cos 2\Phi\right)$ (γ) Για $k=3$, $I = \left(I_0/4\right)\left(1+\cos 4\Phi\right)$. (δ) Για $k=4$, $I = \left(I_0/4\right)\left(1+\cos 8\Phi\right)$. (ε) Για $k=5$, $I = \left(I_0/4\right)\left(1+\cos 16\Phi\right)$.

Στο (Σχ. 8.1.2) φαίνονται οι γραφικές παραστάσεις της διαπερατότητας ($t^2 = I/I_0$) των παραπάνω συναρτήσεων. Στο ίδιο σχήμα (Σχ. 8.1.2στ) παραθέτουμε και τη γραφική παράσταση του γινομένου των πέντε προαναφερόμενων συναρ-

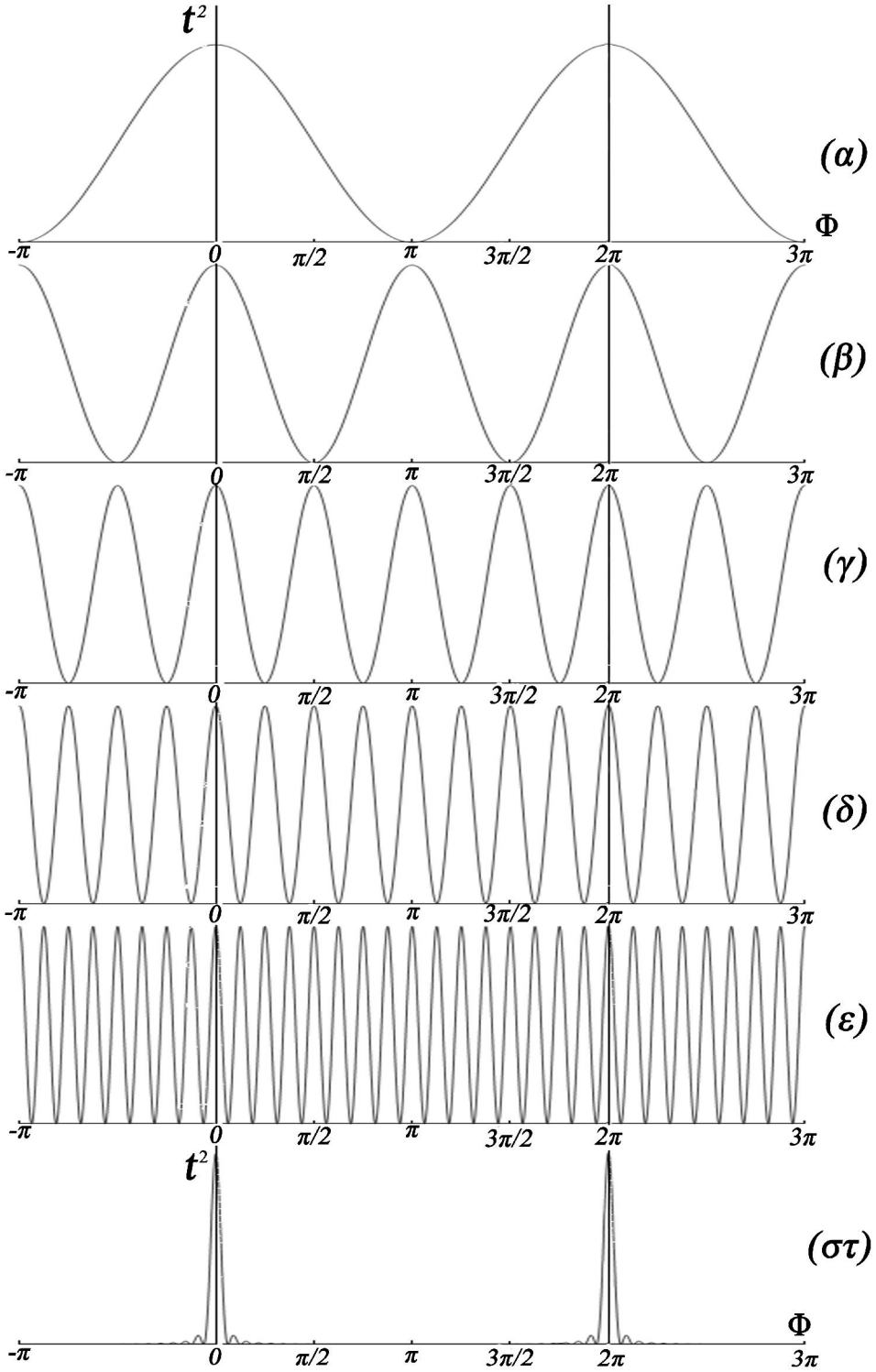
τήσεων με αυθαίρετη όμως την κλίμακα του t^2. Πρόκειται για την διαπερατότητα του φίλτρου Lyot, που απαρτίζεται από τα πέντε υποσυστήματα.

Στο (Σχ. 8.1.3) είναι δυνατόν να παρακολουθήσουμε τη σταδιακή επίδραση των πέντε διαδοχικών υποσυστημάτων, του προσπίπτοντος στο φίλτρο φυσικού φωτός. Οι κλίμακες των τεταγμένων είναι ακριβείς και οι διαπερατότητες t^2 δίνονται συναρτήσει της καθυστέρησης φάσης Φ για δύο περιόδους μεταξύ $-\pi \le \Phi \le 3\pi$ για μια ορισμένη περιοχή του φάσματος. Το (Σχ. 8.1.3α) μας δίνει την t^2 του πρώτου υποσυστήματος . Το (Σχ. 8.1.3β) μας δίνει την t^2 του συνόλου του πρώτου και του δευτέρου των υποσυστημάτων. Ήδη γίνεται εμφανής η δραστική περικοπή σε ικανοποιητικό βαθμό, μεγάλων τμημάτων του συνεχούς φάσματος σ' εκείνη την περιοχή. Η επίδραση του συνδυασμού τριών και τεσσάρων υποσυστημάτων μαζί στην ίδια φασματική περιοχή, φαίνεται αντίστοιχα στα (Σχ. 8.1.3γ,δ). Τέλος στο (Σχ. 8.1.3ε) μας δίνετε η συνολική διαπερατότητα t^2 – που οφείλεται στο συνδυασμό των πέντε στοιχείων του φίλτρου Lyot – για το προσπίπτον πολυχρωματικό φυσικό φως σε μια συγκεκριμένη περιοχή του φάσματος.

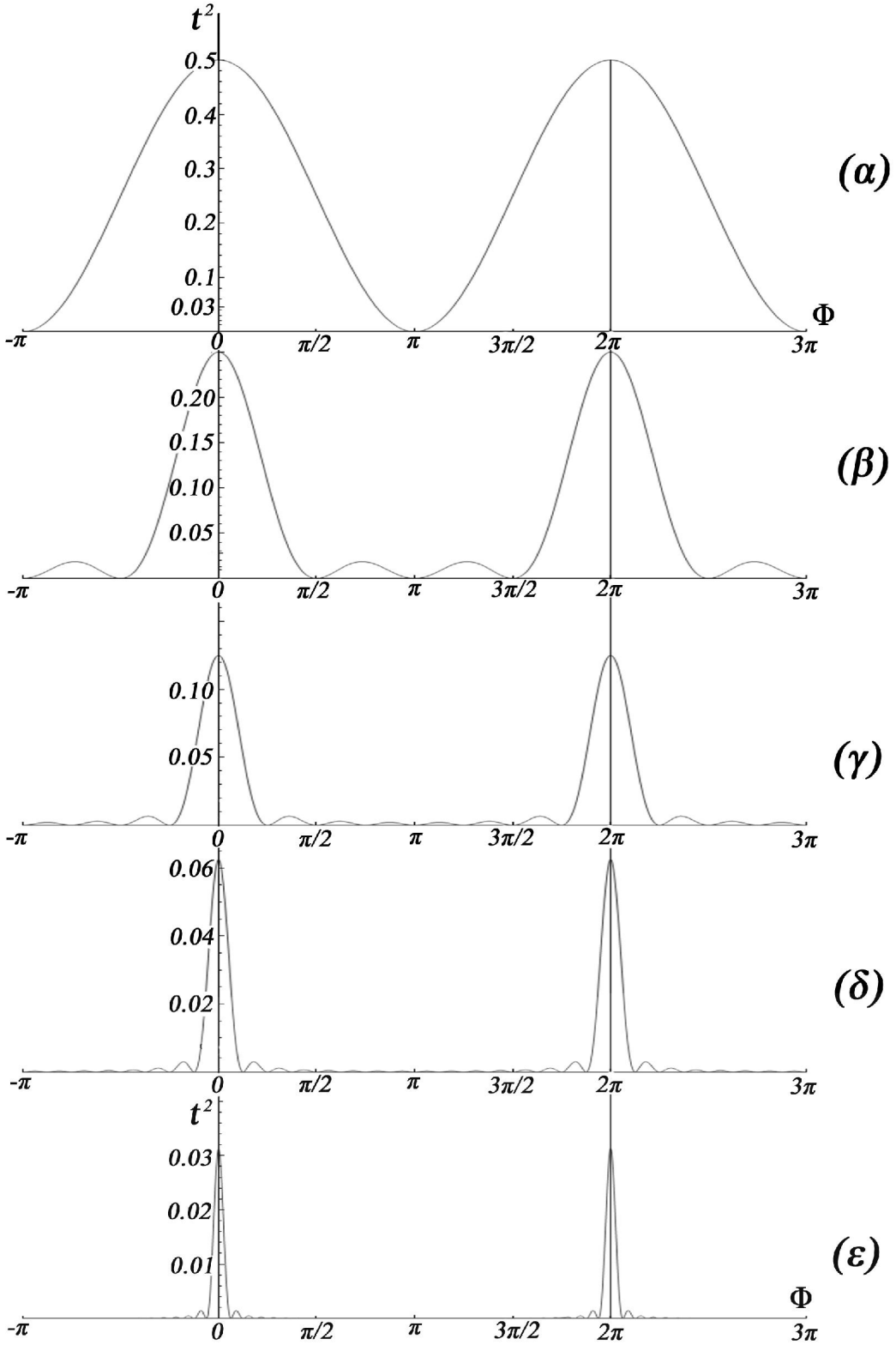
Είναι φανερό ότι επειδή $\Phi = \frac{2\pi}{\lambda}(n_e - n_o)d$, σημαίνει ότι οι καθυστερήσεις φάσεις Φ καθώς και οι διαφορές τους $\Delta\Phi$ μπορούν να εκφραστούν συναρτήσει του μ.κ. λ και του $\Delta\lambda$ αντίστοιχα, ή επειδή $c = \lambda\nu$, συναρτήσει των ν και $\Delta\nu$. Το τελευταίο μας δίνει τη δυνατότητα να αναδείξουμε μερικά φασματικά χαρακτηριστικά της διερχόμενης από το φίλτρο ακτινοβολίας, τα οποία ήδη έχουμε αναφέρει. Το κυριότερο από αυτά είναι το φασματικό εύρος $\Delta\lambda$ της διερχόμενης από το φίλτρο ακτινοβολίας, γύρω από ένα κεντρικό μ.κ. λ_m. Πράγματι όπως βλέπουμε από το (Σχ. 8.1.3ε) σημαντική ισχύ της διερχόμενης από τον τελευταίο πολωτή του φίλτρου ακτινοβολίας έχουμε όταν: $\Phi = \pm 2m\pi, \quad m = 0,1,2,3,\cdots$, επειδή όλοι οι πολωτές είναι παράλληλοι. Για να δείξουμε την εξάρτιση της Φ ως προς το μ.κ. λ στη γειτονία ενός μέγιστου διερχόμενης έντασης π.χ. όπου $\Phi = 2m\pi$ και $\lambda = \lambda_m$, αναπτύσσουμε την τελευταία στην περιοχή γύρω από το σημείο αυτό. Κατά Taylor θα έχουμε:

$$\Phi(\lambda) = \Phi(\lambda_m) + \Phi'(\lambda_m)(\lambda - \lambda_m) + \frac{1}{2!}\Phi''(\lambda_m)(\lambda - \lambda_m)^2 + \cdots \qquad (8.1.26)$$

Για $\lambda - \lambda_m \ll \lambda_m$ και m αρκετά μεγάλο, ο τρίτος και οι ανώτεροι όροι της σειράς δεν λαμβάνονται υπόψη. Επίσης $\Phi'(\lambda_m) = -\frac{2\pi}{\lambda_m^2}(n_e - n_o)d$ και $\Phi(\lambda_m) = 2m\pi$. Επομένως η (σχ. 8.1.26) γίνεται:



(Σχ. 8.1.2)


t²
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
0.03
Φ
-π
0
π/2
π
3π/2
2π
3π
(α)
0.20
0.15
0.10
0.05
(β)
0.10
0.05
(γ)
0.06
0.04
0.02
(δ)
t²
0.03
0.02
0.01
(ε)
Φ

(Σχ. 8.1.3)

$$\Phi(\lambda) = 2m\pi - \frac{2m\pi}{\lambda_m}(\lambda - \lambda_m) = \Phi(\lambda_m) + \Delta\Phi \qquad (8.1.27)$$

που μας δείχνει μια μορφή εξάρτησης της Φ από το λ στη περιοχή για την οποία $\Phi(\lambda_m) = 2m\pi$. Δεν θα επιχειρήσουμε αντικατάσταση της (σχ. 8.1.27) στη (σχ. 8.1.24) επειδή η αναλυτική μορφή της τελευταίας είναι σχετικά απλή λόγω του ότι παράγοντας 2^N είναι ακέραιος αριθμός.

Υπολογισμός του φασματικού εύρους $\Delta\lambda$

Το ***φασματικό εύρος (transmission bandwidth-FWHM)*** μιας κατανομής έντασης με μέγιστη τιμή $I = I_0$ σε ένα συγκεκριμένο μ.κ. λ_m, είναι η τιμή της διαφοράς $\Delta\lambda = \lambda_2 - \lambda_1$ (περί το λ_m) για την οποία $I = I_0/2$. Στα επόμενα θα υπολογίσουμε προσεγγιστικά το $\Delta\lambda$ βασιζόμενοι στην αναλυτική έκφραση της έντασης του διερχομένου από το φίλτρο Lyot φωτός που δίνεται από τη (σχ. 8.1.24):

$$I_t = I_t(\Phi/2) = \left[\frac{\sin 2^N(\Phi/2)}{\sin(\Phi/2)}\right]^2 \qquad (8.1.28)$$

όπου από την I_t παραλείψαμε τις σταθερές αναλογίας. Θα προσεγγίσουμε το $\Delta\lambda$ υποθέτοντας ότι είναι περίπου ίσο με το μισό της διαφοράς καθυστέρησης φάσης $\Delta\Phi$ (εκφρασμένης σε διαφορά μ.κ. $\Delta\lambda$) που αντιστοιχεί μεταξύ των δύο πρώτων ελάχιστων ένθεν και ένθεν του κεντρικού μ.κ. λ_m. Στο (Σχ. 8.1.3ε) ή στη γενικότερη περίπτωση στο (Σχ. 8.1.4) γίνεται εμφανής η $\Delta\Phi$ (όπως και η αντίστοιχη $\Delta\lambda$ και $\Delta\nu$).

Για το λόγο αυτό θα πρέπει να υπολογίσουμε τις ακραίες τιμές της συνάρτησης 8.1.28). Πράγματι η παράγωγός της ως προς $\Phi/2$ είναι:

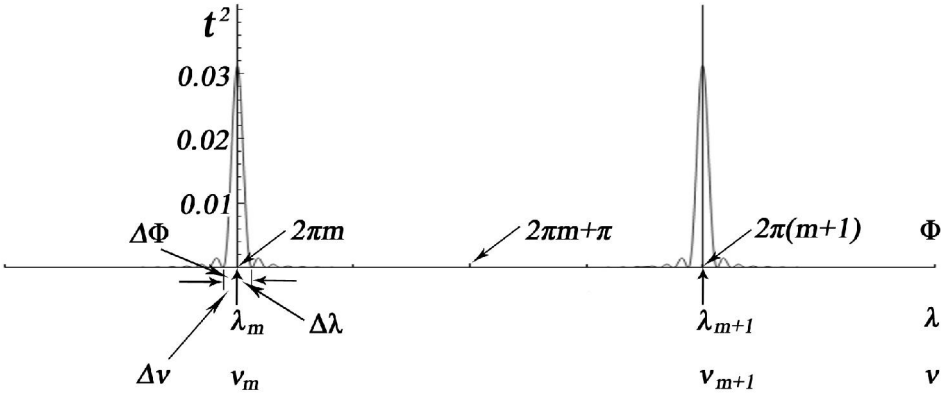
$$\left[I_t(\Phi/2)\right]' = \frac{2\cdot 2^N \sin 2^N(\Phi/2)\sin(\Phi/2)\cos 2^N(\Phi/2) - 2\sin^2 2^N(\Phi/2)\cos(\Phi/2)}{\sin^3(\Phi/2)}$$

Ακραίες τιμές της $I_t(\Phi/2)$ θα έχουμε για τις τιμές του $\Phi/2$ που επαληθεύουν την $\left[I_t(\Phi/2)\right]' = 0$ δηλ.

$$\sin\left[2^N(\Phi/2)\right]\left\{2^N\sin(\Phi/2)\cos\left[2^N(\Phi/2)\right] - \sin\left[2^N(\Phi/2)\right]\cos(\Phi/2)\right\} = 0 \qquad (8.1.29)$$

άρα ή όταν : $\sin 2^N(\Phi/2) = 0$ (8.1.30)

ή όταν:
$$2^N \sin(\Phi/2)\cos 2^N(\Phi/2) - \sin 2^N(\Phi/2)\cos(\Phi/2) = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 2^N \tan(\Phi/2) = \tan\left[2^N(\Phi/2)\right] \quad (8.1.31)$$



(Σχ.8.1.4)

Για να διαπιστώσουμε τι είδους ακρότατα έχουμε για τις τιμές του $(\Phi/2)$ που επαληθεύουν την $\sin 2^N(\Phi/2) = 0$ (σχ. 8.1.30), οι οποίες είναι:

$$\sin 2^N(\Phi/2) = 0 = \sin p\pi \quad p = \pm 1, \pm 2, ..., \pm\left(2^N - 1\right)$$

θα πρέπει τελικά: $\Phi/2 = \pi \dfrac{p}{2^N} \quad p = \pm 1, \pm 2, ..., \pm\left(2^N - 1\right)$ (8.1.32)

Για τις τιμές αυτές των $\Phi/2$, η δεύτερη παράγωγος $\left[I_t(\Phi/2)\right]''$ μετά τους υπολογισμούς θα έχει τιμές:

$$\left[I_t(\Phi/2)\right]'' = \left[I_t\left(\pi \frac{p}{2^N}\right)\right]'' = \frac{2}{\sin^2\left(\pi \dfrac{p}{2^N}\right)} \quad (8.1.33)$$

η οποία για $p = \pm 1, \pm 2, ..., \pm\left(2^N - 1\right)$ διαπιστώνουμε ότι είναι μεγαλύτερη του μηδενός. Άρα για τις θέσεις με $\Phi/2 = \pi \dfrac{p}{2^N} \quad p = \pm 1, \pm 2, ..., \pm\left(2^N - 1\right)$ θα έχουμε ελάχιστα. Τα ελάχιστα αυτά μεταξύ δύο διαδοχικών κυρίων μεγίστων τάξης m και $m+1$ θα είναι $2^N - 1$ τον αριθμό. Από τη σχέση επίσης:

$$I_t(\Phi/2)=\left[\frac{\sin 2^N(\Phi/2)}{\sin(\Phi/2)}\right]^2=\left[\frac{\sin 2^N\pi\frac{p}{2^N}}{\sin\pi\frac{p}{2^N}}\right]^2=\left[\frac{\sin p\pi}{\sin\pi\frac{p}{2^N}}\right]^2=\frac{0}{\left(\sin\pi\frac{p}{2^N}\right)^2}=0$$

βλέπουμε ότι τα ελάχιστα αυτά είναι μηδενικά.

Επίσης για $p=0,\pm 2^N,\pm 2\cdot 2^N,\pm 3\cdot 2^N,\cdots$ (επειδή $\Phi/2=\pi\frac{p}{2^N}$) θα είναι: $\Phi=0$, $\pm 2\pi$, $\pm 4\pi$, $\pm 6\pi$, $\cdots$. Δηλ. εκεί θα έχουμε τα κύρια μέγιστα της $I_t=I_t(\Phi/2)$(σχ. 8.1.28). Πράγματι για $\Phi\to 0$ ή $(\pm 2\pi$, $\pm 4\pi$, $\pm 6\pi$, $\cdots)$ με βάση τον κανόνα του L'Hospital θα έχουμε:

$$\frac{\sin^2 2^N(\Phi/2)}{\sin^2(\Phi/2)}=\frac{0}{0}=\frac{\left[\sin^2 2^N(\Phi/2)\right]'}{\left[\sin^2(\Phi/2)\right]'}=\left(2^N\right)\frac{\sin 2^N(\Phi/2)\cos 2^N(\Phi/2)}{\sin(\Phi/2)\cos(\Phi/2)}=\frac{0}{0}=$$

$$=\left(2^N\right)\frac{\left[\sin 2^N(\Phi/2)\cos 2^N(\Phi/2)\right]'}{\left[\sin(\Phi/2)\cos(\Phi/2)\right]'}=\left(2^N\right)^2\frac{\cos^2 2^N(\Phi/2)-\sin^2 2^N(\Phi/2)}{\cos^2(\Phi/2)-\sin^2(\Phi/2)}=$$

$$=\left(2^N\right)^2\frac{\cos\left[2\cdot 2^N(\Phi/2)\right]}{\cos\left[2\cdot(\Phi/2)\right]}=\left(2^N\right)^2\quad(\ \Phi\to 0)$$ Δηλ. μέγιστο.

Προκειμένου τώρα να υπολογίσουμε το φασματικό εύρος $\Delta\lambda$ βρίσκουμε κατ' αρχή από τη (σχ. 8.1.32) το εύρος $\Delta\Phi'$ μεταξύ των ελάχιστων $p=\pm 1$. Πράγματι επειδή: $\frac{\Phi_{p=1}}{2}=\frac{\pi}{2^N}$, $\frac{\Phi_{p=-1}}{2}=\frac{-\pi}{2^N}$ θα έχουμε: $\frac{\Phi_{p=1}-\Phi_{p=-1}}{2}=\frac{\Delta\Phi'}{2}=\frac{2\pi}{2^N}$. Είναι όμως $\Delta\Phi_{BP}=\frac{\Delta\Phi'}{2}=\frac{2\pi}{2^N}$ (το μισό της διαφοράς μεταξύ των δύο ελαχίστων). Επειδή όμως $\Phi_{BP}=\frac{2\pi}{\lambda}(n_e-n_o)d$ και $c=\lambda\nu$, τότε $\Delta\Phi_{BP}=\frac{2\pi}{c}(n_e-n_o)d\Delta\nu=\frac{2\pi}{2^N}$. Άρα

$$\Delta\nu_{BP}=\frac{c}{2^N(n_e-n_o)d} \tag{8.1.34}$$

Αλλά: $c=\lambda\nu\Rightarrow\Delta\lambda=-\frac{c\Delta\nu}{\nu^2}\Rightarrow\Delta\nu=\frac{c\Delta\lambda}{\lambda^2}$. Αντικαθιστώντας τώρα το $\Delta\nu$ στη (σχ. 8.1.34) και παραλείποντας το αρνητικό πρόσημο βρίσκουμε:

$$\Delta\lambda_{BP} = \frac{\lambda^2}{2^N\left(n_e - n_o\right)d} \tag{8.1.35}$$

Υπολογισμός της ελεύθερης φασματικής περιοχής $\Delta\nu_{fsr}$

Η ***ελεύθερη φασματική περιοχή (free spectral range)*** καθορίζεται από την περίοδο των ζωνών που δημιουργεί (στο συνεχές φάσμα) το πρώτο υποσύστημα (πολωτής – πλακίδιο – πολωτής) του φίλτρου Lyot, για το οποίο ως γνωστόν το πλακίδιο καθυστέρησης έχει το μικρότερο πάχος (Σχ. 8.1.2α). Η διαφορά $\Delta\Phi_{fsr}$ στην καθυστέρηση φάσης για μια περίοδο των μεγίστων των ζωνών αυτών θα είναι κατά τα γνωστά: $\Phi = \frac{2\pi}{\lambda}\left(n_e - n_o\right)d$, $c = \lambda\nu$, $\Delta\Phi = \frac{2\pi}{c}\left(n_e - n_o\right)d\Delta\nu$,

$\Delta\Phi_{fsr} = \frac{2\pi}{c}\left(n_e - n_o\right)d\Delta\nu_{fsr}$ και επειδή $\Delta\Phi_{fsr} = 2\pi$ (Σχ. 8.1.2α), τότε από τις δύο τελευταίες σχέσεις βρίσκουμε:

$$\Delta\nu_{fsr} = \frac{c}{\left(n_e - n_o\right)d} \tag{8.1.36}$$

Ή επειδή: $\Delta\nu = \frac{c\Delta\lambda}{\lambda^2}$ $\qquad \Delta\lambda_{fsr} = \frac{\lambda^2}{\left(n_e - n_o\right)d}$ (8.1.37)

Υπολογισμός της λεπτότητας των ζωνών

Η ***λεπτότητα (finesse)*** των φασματικών ζωνών, του φάσματος της εξερχόμενης ακτινοβολίας από το φίλτρο Lyot, ορίζεται κατά τα γνωστά από το λόγο: $\mathcal{F} = \Delta\nu_{fsr}/\Delta\nu_{BP}$. Τότε με τη βοήθεια των (σχ. 8.1.36,34) θα έχουμε:

$$\mathcal{F} = 2^{\mathrm{N}} \tag{8.1.38}$$

Για την περίπτωση μας όπου $N = 5$ θα είναι $\mathcal{F} = 32$.

ΑΡ. ΒΟΥΛΓΑΡΗ: (Ανεξάρτητου ερευνητή και κατασκευαστή οργάνων)

Κατασκευή φίλτρου Lyot για τη φωτογράφηση του ηλιακού στέμματος στην περιοχή λ = 5303 *Å της γραμμής του* Fe XIV

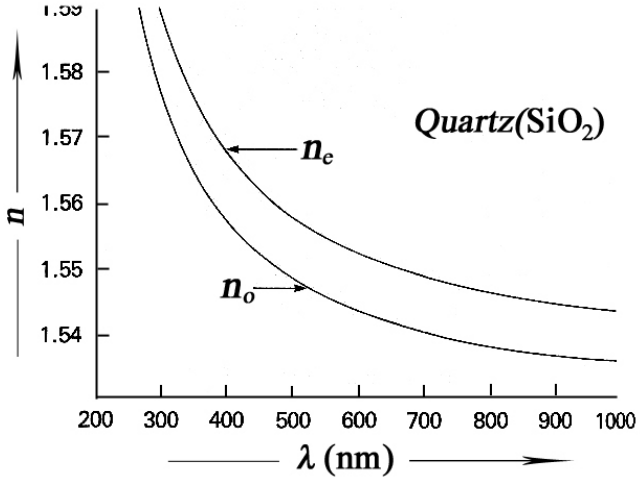
Σκοπός της κατασκευής του φίλτρου Lyot ήταν η φωτογράφηση του ηλιακού στέμματος κατά τη διάρκεια της ολικής έκλειψης του ηλίου της 29ης Μαρτίου 2006 στο Καστελόριζο της Δωδεκανήσου. Το φίλτρο θα έπρεπε να είναι συντονισμένο στην πράσινη γραμμή εκπομπής του Fe XIV μήκους κύματος $\lambda = 5303$ Å.

Στις περιοχές του ηλιακού στέμματος, σε απόσταση από τη φωτόσφαιρα του ηλίου περίπου όσο το μισό της ακτίνας του, όπου η επικρατούσα θερμοκρασία είναι $2-2.5\times10^6$ ^{0}C, βρίσκονται κατανεμημένα τα άτομα του Fe XIV δηλ. αυτά που έχουν χάσει 13 από τα 26 ηλεκτρόνια των στοιβάδων τους. Στην κατάσταση αυτή εκπέμπουν μια χαρακτηριστική ακτινοβολία στην πράσινη περιοχή του Η/Μ φάσματος με κεντρικό μ.κ. $\lambda = 5303$ Å. Η φωτογράφηση όμως αυτής της κατανομής είναι πολύ δύσκολη. Πράγματι φως από το συνεχές φάσμα εκπομπής της φωτόσφαιρας του Ηλίου διαχέεται στην περιοχή του στέμματος, αυξάνοντας σε υπερβολικό βαθμό το θόρυβο, με αποτέλεσμα την υπερκάλυψη της πληροφορίας που θέλουμε ν' αποκομίσουμε. Προκειμένου όμως ν' αυξήσουμε το λόγο σήματος προς θόρυβο, παρεμβάλλουμε μεταξύ του τηλεσκοπίου μας και του συστήματος φωτογράφησης ένα ειδικής κατασκευής φίλτρο. Στην προκειμένη περίπτωση το φίλτρο Lyot. Το τελευταίο κατασκευάζεται με τέτοιο τρόπο ώστε το φασματικό του εύρος να είναι $\Delta\lambda \simeq 4$ Å με κεντρικό μ.κ. $\lambda = 5303$ Å. Συνέπεια αυτής της παρεμβολής θα είναι η πλήρης σχεδόν αποκοπή όλων των παράσιτων ακτινοβολιών ένθεν και ένθεν της ζώνης των 4 Å .

α) Γενική περιγραφή του οπτικού συστήματος του φίλτρου Lyot

Επιλέξαμε το φίλτρο ν' αποτελείται από πέντε τον αριθμό υποσυστήματα (πολωτής – πλακίδιο καθυστέρησης – πολωτής) (Σχ. 8.1.1α,β) με τον ταχύ άξονα του πλακιδίου σε θέση 45^0 σε σχέση με τον άξονα διέλευσης του πρώτου πολωτή. Η ίδια διευθέτηση ακολουθείται και για τα υπόλοιπα υποσυστήματα. Οι πολωτές που χρησιμοποιούμε είναι Polaroid του τύπου (HN42×0.0010″) και τα πλακίδια από κρυσταλλικό Χαζία (Quartz) οκταγωνικού σχήματος με απόσταση μεταξύ δύο απέναντι κορυφών $d \simeq 35$ mm. Κατά τα γνωστά οι άξονες (ταχύς-βραδύς) όλων των πλακιδίων είναι παράλληλοι με τις δύο απέναντι έδρες τους. Οι επιφάνειες των πλακιδίων είναι σε μεγάλο βαθμό οπτικά επίπεδες. Στο (Σχ. 8.1.5) φαίνονται οι κα-

μπύλες διασκεδασμού των δ.δ. n_o, n_e του κρυσταλλικού Χαλαζία από τις οποίες πρακτικά μπορούμε να υπολογίσουμε τη διαφορά $(n_e - n_o)$. Η τελευταία αφορά την καθυστέρηση φάσης $\Phi = (2\pi/\lambda)(n_e - n_o)d$ που εισάγεται μεταξύ τακτικής και έκτακτης διαταραχής κατά τη διάδοσή τους σε απόσταση d που είναι το πάχος του πλακιδίου. Τη διαφορά $n_e(\lambda) - n_o(\lambda)$ μπορούμε επίσης να την υπολογίσουμε



(Σχ. 8.1.5)

από γνωστούς τύπους διασκεδασμού που αναφέρονται στο υλικό αυτό. Κατά τους Coode-Adams* θα είναι:

$$n_o^2 = A_0 + \frac{A_1}{\lambda^2 - B_1} + \frac{A_2}{\lambda^2 - B_2} + \frac{A_3}{\lambda^2 - B_3} \qquad (8.1.39)$$

Όπου: $A_0 = 3.53445$, $A_1 = 0.008067$, $A_2 = 0.002682$, $A_3 = 127.2$, $B_1 = 0.0127493$, $B_2 = 0.000974$, $B_3 = 108$ και το μ.κ. λ σε μm. Επίσης κατά τον T.H.Havelock♣:

$$\frac{1}{n_o^2 - 1} - \frac{1}{n_e^2 - 1} = 0.014416 \qquad (8.1.40)$$

* Roy.Soc.Proc., A, vol. 117, p. 209 (1927)

♣ T.H.Havelock: 'The Dispersion of Double Refraction in Quartz' Roy.Soc.Proc.,A vol. 124 N° 793 p.46 (1929).

Οπότε από τις (σχ. 8.1.39,40) μπορούμε να υπολογίσουμε τη διπλοθλαστικότητα $(n_e - n_o)$ του Χαλαζία, με μεγάλη ακρίβεια μεταξύ των 3961Å και 8320 Å.

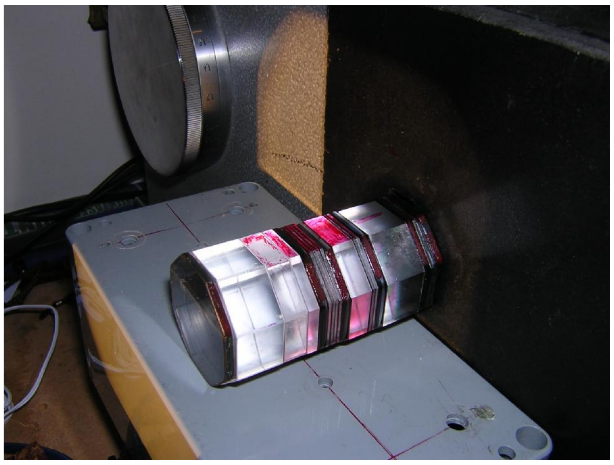
β) Κατασκευαστική διαδικασία

Το πρώτο υποσύστημα περιλαμβάνει πλακίδιο καθυστέρησης πάχους $d = d_1 = 2.06\,\text{mm}$. Επειδή όμως δεν διαθέταμε τα ακριβή πάχη των επόμενων πλακιδίων σε μονοκρυστάλλους, αναγκαστήκαμε να τα επιτύχουμε με συνδυασμούς πλακιδίων διαφόρων παχών. Τα σφάλματα στην επιβαλλόμενη από τη θεωρία διαδοχή παχών των διαδοχικών υποσυστημάτων $(d, 2d, 4d, 8d, 16d)$, φαίνεται στον (Πίν. 8.1.6) και δεν επηρέασε αισθητά το αναμενόμενο αποτέλεσμα.

Υποσύστημα	**Πάχος πλακιδίου**	**Πάχη πλακιδίων υποσυστημάτων**
1	$\mathbf{d_1}$	(2.06) mm
2	$\mathbf{d_2}$	(1.03+1.02+1.03+1.01=4.9) mm
3	$\mathbf{d_3}$	(1.03+1.01+6.60=8.64) mm
4	$\mathbf{d_4}$	(13.2+2.06=15.26) mm
5	$\mathbf{d_5}$	(13.2+13.2+2.06+2.06=30.52) mm

(Πίν. 8.1.6)

Τα διαδοχικά πλακίδια όπως και οι πολωτές αποτέλεσαν ένα συνολικό σύστημα, ερχόμενα σε επαφή μεταξύ τους μέσω ενός λεπτότατου στρώματος παραφινέλαιου κατόπιν συμπίεσης. Το υλικό αυτό είναι διαφανές, ισότροπο και δεν προκαλεί αλλοιώσεις στους πολωτές. Μία άποψη του οπτικού συστήματος φαίνεται στην (Εικ. 8.1.7).

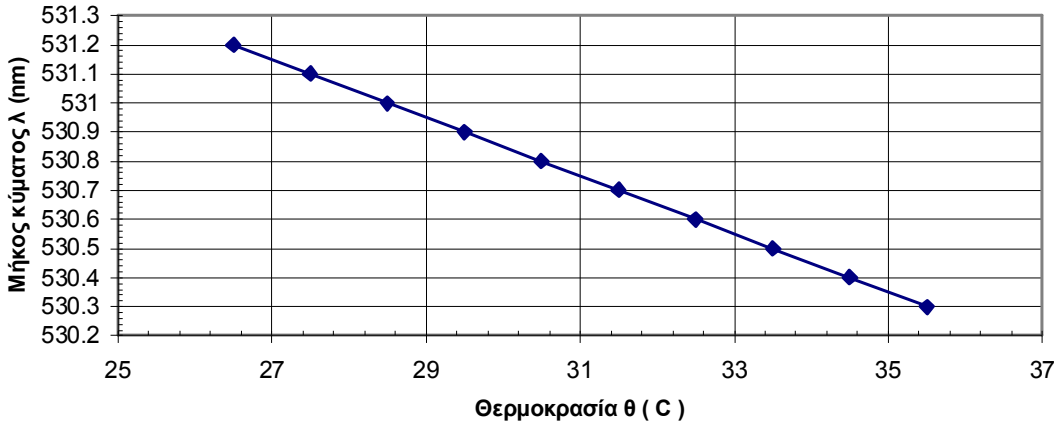


(Εικ. 8.1.7)

Υποθέσαμε ότι κατά τη μεταβολή της θερμοκρασίας, η πολυβινυλική αλκοόλη – από την οποία συντίθενται οι πολωτές – καθώς και το υλικό συνένωσης των στοιχείων του φίλτρου (παραφινέλαιο) διαστέλλονται ομοιόμορφα σ' όλο το εύρος των επιφανειών τους. Το γεγονός αυτό θα έχει σαν αποτέλεσμα να μην προκαλείται μεταβολή στην καθυστέρηση φάσης δια μέσου οποιουδήποτε υποσυστήματος του φίλτρου. Η διαστολή όμως του Χαλαζία (εδώ σε διεύθυνση διάδοσης του φωτός κάθετα στους άξονές ταχύ και βραδύ, ένας από τους οποίους είναι και ο οπτικός άξονας του εκάστοτε πλακιδίου), προκαλεί αρκούντως σημαντική μεταβολή. Σαν συνέπεια θα έχουμε αξιοσημείωτη μετατόπιση του μ.κ. συντονισμού της ακτινοβολίας που εξέρχεται από το φίλτρο. Τα πειραματικά δεδομένα φαίνονται στον επόμενο πίνακα και η γραφική τους παράσταση στο (Σχ. 8.1.8).

Πρόκειται για γραμμική σχέση της μορφής $\lambda = a + b\theta$ και η μέθοδος των ελαχίστων τετραγώνων μας οδήγησε στον προσδιορισμό των a, b. Βρήκαμε: $a = 533.85$ και $b = -0.1$ και η σχέση αυτή μας φανερώνει ότι η μετατόπιση της γραμμής συντονισμού γίνεται προς την ιώδη περιοχή του φάσματος κατά 0.5Å ανά ^{0}C.

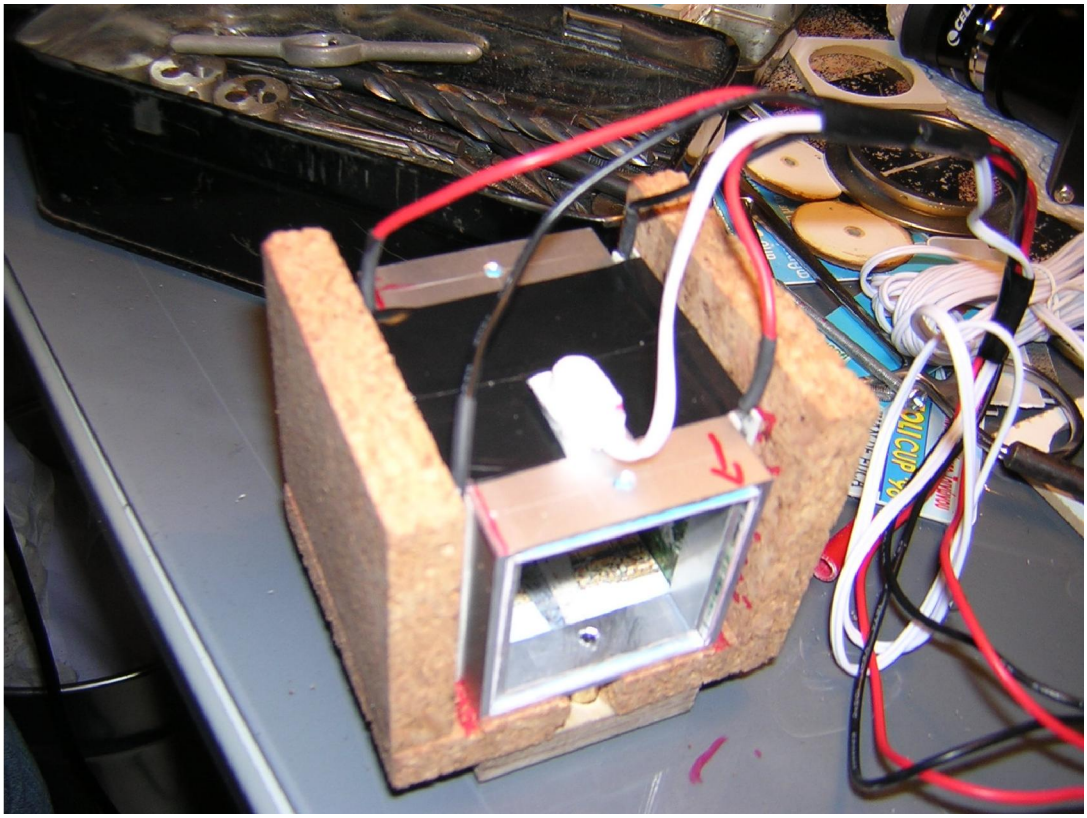
θ ^{o}C	26.5	27.5	28.5	29.5	30.5	31.5	32.5	36.5	37.5	38.5
λ(nm)	531.2	531.1	531	530.9	530.8	530.7	530.6	530.5	530.4	530.3



(Σχ. 8.1.8)

Προκειμένου να ελέγξουμε τέτοιες μεταβολές, το οπτικό σύστημα των πολωτών και των πλακιδίων καθυστέρησης βρίσκονται σ' όλη τη διάρκεια της χρήσης του φίλτρου σε επιθυμητή σταθερή θερμοκρασία. Το προαναφερόμενο επιτυγχάνεται με το να περικλείουμε το οπτικό σύστημα μεταξύ δύο επιπέδων στοιχείων Peltier (σε λειτουργία θέρμανσης), τα οποία ελέγχονται μέσω θερμοστάτη (Εικ. 8.1.9).

Το όλο σύστημα της (Εικ. 8.1.9) έχει από μηχανική άποψη τη δυνατότητα μηχανικής κλόνισης περί την διεύθυνση πρόσπτωσης του φωτός. Η διαδικασία αυτή συμβάλει έτσι ώστε το οπτικό σύστημα να μπορεί να καθετοποιείται πλήρως ως προς την προσπίπτουσα δέσμη φωτός. Σε διαφορετική περίπτωση θα είχαμε μετατόπιση του μ.κ συντονισμού. Θα πρέπει ν' αναφέρουμε ότι η γραμμή $\lambda = 5303\,\text{Å}$



(Εικ. 8.1.9)

δεν εμφανίζεται σαν γραμμή απορρόφησης στο Ηλιακό φάσμα. Επομένως για τη διευθέτηση του φίλτρου μας (τον συντονισμό του) στο προαναφερόμενο μ.κ. χρησιμοποιήθηκαν οι εξής παραπλήσιες φασματικές γραμμές: α) Του στοιχείου Ne (540.06,534,41,533.08 nm) και β) Του διοδικού Laser στο μ.κ. 532 nm.

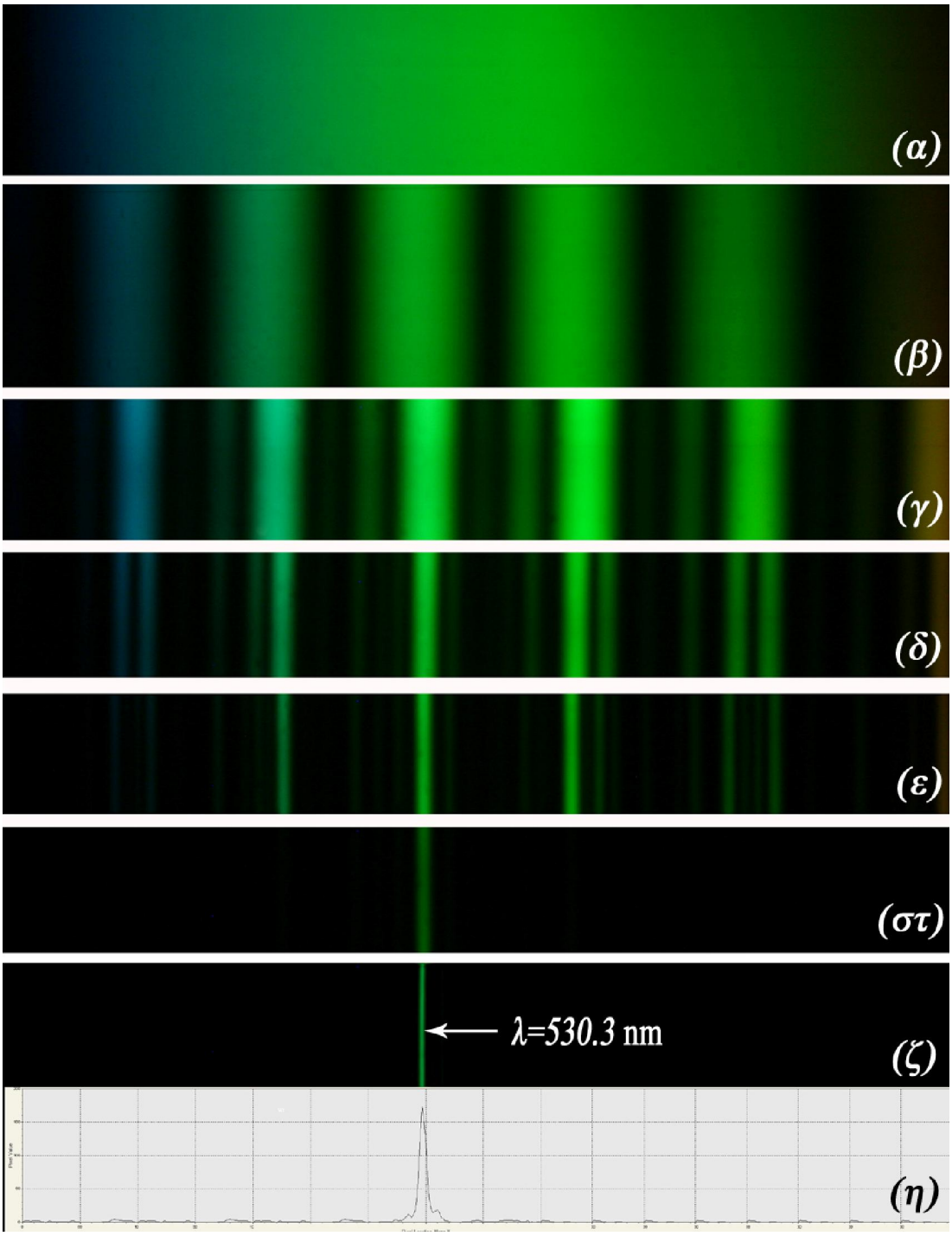
Τα περιφερειακά συστήματα που χρησιμοποιήθηκαν ήταν ένας φασματογράφος μεγάλης διακριτικής ικανότητας, στον οποίο προσαρμόστηκε αναλογική CCD-camera συνδεδεμένη με σε TV-monitor. 1mm επί της οθόνης αντιστοιχούσε σε $\Delta\lambda = 1\,\text{Å}$. Το συνολικό οπτικό σύστημα επί τραπέζης περιλάμβανε: α) Πηγές λευκού φωτός ή φασματικές λυχνίες β) Το σύστημα του φίλτρου και γ) Το σύστημα του φασματογράφου και της κάμερας.

γ) Πειραματικά αποτελέσματα

Στην (Εικ. 8.1.10) παραθέτουμε τα διαδοχικά φάσματα διέλευσης των διαφόρων συνόλων των υποσυστημάτων του υπό κατασκευή φίλτρου Lyot. Τα τελευταία είναι δυνατόν να τα συγκρίνουμε ευθέως με τα θεωρητικά αποτελέσματα που παρατίθενται στο (Σχ. 8.1.3). α) Η (Εικ. 8.1.10α) παριστάνει το συνεχές φάσμα μιας ευρείας ($\simeq 400$ Å) περιοχής τμήματος του ορατού φάσματος περί το μ.κ. συντονισμού $\lambda = 5303$ Å της γραμμής του Fe XIV. β) Η (Εικ. 8.1.10β) μας δίνει το 'τεμαχισμένο' φάσμα της ακτινοβολίας (δηλ. σε μορφή ζωνών) μετά τη διέλευση της από το πρώτο υποσύστημα, με πάχος πλακιδίου καθυστέρησης $d_1 = 2.06\,\text{mm}$. Συγκρίνεται ευθέως με το (Σχ. 8.1.3α). γ) Η (Εικ. 8.1.10γ) μας δίνει το φάσμα μετά τη διέλευση του προσπίπτοντος φωτός από το πρώτο και το δεύτερο υποσύστημα του φίλτρου και μπορεί να συγκριθεί με το (Σχ. 8.1.3β). δ) Η (Εικ. 8.1.10δ) μας δίνει το φάσμα μετά τη διέλευση του προσπίπτοντος φωτός από το σύνολο των τριών πρώτων υποσυστημάτων του φίλτρου. Συγκρίνεται ευθέως με το (Σχ. 8.1.3γ). ε) Η (Εικ.8.1.10ε) μας δίνει το φάσμα μετά τη διέλευση του προσπίπτοντος φωτός από το σύνολο των τεσσάρων πρώτων υποσυστημάτων του φίλτρου και μπορεί να συγκριθεί με το (Σχ. 8.1.3δ). στ) Επειδή όμως μας ενδιαφέρει αποκλειστικά η φασματική περιοχή περί το μ.κ. $\lambda = 5303$ Å, θα πρέπει όπως φαίνεται από την (Εικ. 8.1.10ε) ν' απομονωθούν τα γειτονικά μέγιστα ένθεν και ένθεν της κατανομής που μας ενδιαφέρει.

Για το λόγο αυτό παρεμβάλλουμε στην είσοδο του φίλτρου (δηλ. πριν από το πρώτο υποσύστημα) ένα συμβολομετρικό φίλτρο στο μ.κ. $\lambda = 5400$ Å με φασματικό εύρος 100 Å. Για να 'μεταφέρουμε' την περιοχή αποκοπής του περί το μ.κ. $\lambda = 5303$ Å , το περιστρέφουμε περί άξονα κάθετο σ' αυτόν του οπτικού συστήματος κατά 25^0. Το αποτέλεσμα φαίνεται στην (Εικ. 8.1.10στ). ζ) Η (Εικ. 8.1.10ζ) μας δίνει το τελικό φάσμα της εξερχόμενης ακτινοβολίας μετά την προσθήκη και του τελευταίου υποσυστήματος του φίλτρου Lyot και μπορεί να συγκριθεί με το (Σχ. 8.1.3ε). η). Στην (Εικ. 8.1.10η) απεικονίζεται το φασματογράφημα της κατανομής έντασης της (Εικ. 8.1.10ζ). Η μέτρηση του φασματικού εύρους της κατανομής αυτής περί το μ.κ. $\lambda = 5303$ Å μας έδωσε $\Delta\lambda \simeq 4$ Å.

Το πειραματικό αυτό αποτέλεσμα έχει ενδιαφέρον να το συγκρίνουμε με τους θεωρητικούς υπολογισμούς για το φασματικό εύρος $\Delta\lambda$ με τη βοήθεια της (σχ. 8.1.35): $\Delta\lambda_{BP} = \dfrac{\lambda^2}{2^N\left(n_e - n_o\right)d}$. Κατά τα γνωστά $N = 5$, $d = 2.06\,\text{mm}$ και $\lambda = 5303$ Å. Ο υπολογισμός του παράγοντα $\left(n_e - n_o\right)$ μπορεί να γίνει μέσω του διαγράμματος του (Σχ. 8.1.5) ή με τη βοήθεια των τύπων διασκεδασμού (σχ. 8.1.39) και (σχ. 8.1.40) για $\lambda = 0.5303\,\mu\text{m}$. Βρήκαμε: $n_e - n_o = 0.009202$ και τελικά $\Delta\lambda \simeq 4.63$ Å η τιμή του οποίου προσεγγίζει άριστα το πειραματικό αποτέλεσμα.

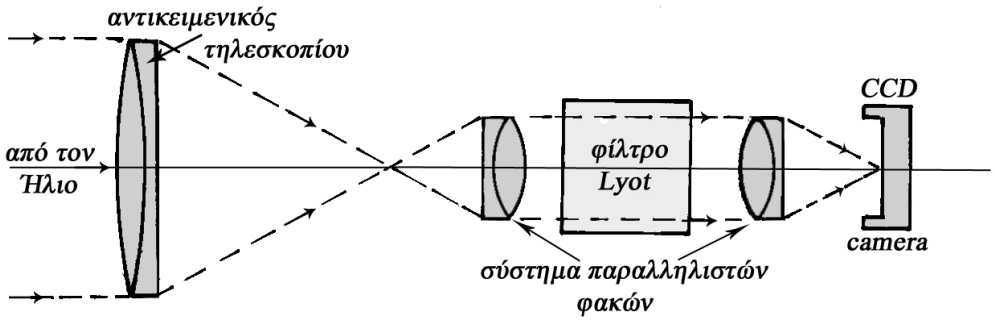


(Εικ. 8.1.10)

δ) Η χρήση του φίλτρου Lyot

Το φίλτρο Lyot – με τις προδιαγραφές που κατορθώσαμε να επιτύχουμε – χρησιμοποιήθηκε για τη φωτογράφηση του ηλιακού στέμματος κατά τη διάρκεια της ολικής έκλειψης του ηλίου στις 29 Μαρτίου του 2006 στο Καστελόριζο της

Δωδεκάνησου. Χρησιμοποιήθηκε σαν εξάρτημα διοπτρικού (Ισημερινής στήριξης) τηλεσκοπίου με διάμετρο αντικειμενικού φακού $d = 80\text{mm}$ και εστιακής απόστασης $f = 600\text{mm}$. Ο τρόπος παρεμβολής του φίλτρου φαίνεται στο (Σχ. 8.1.11).



(Σχ. 8.1.11)

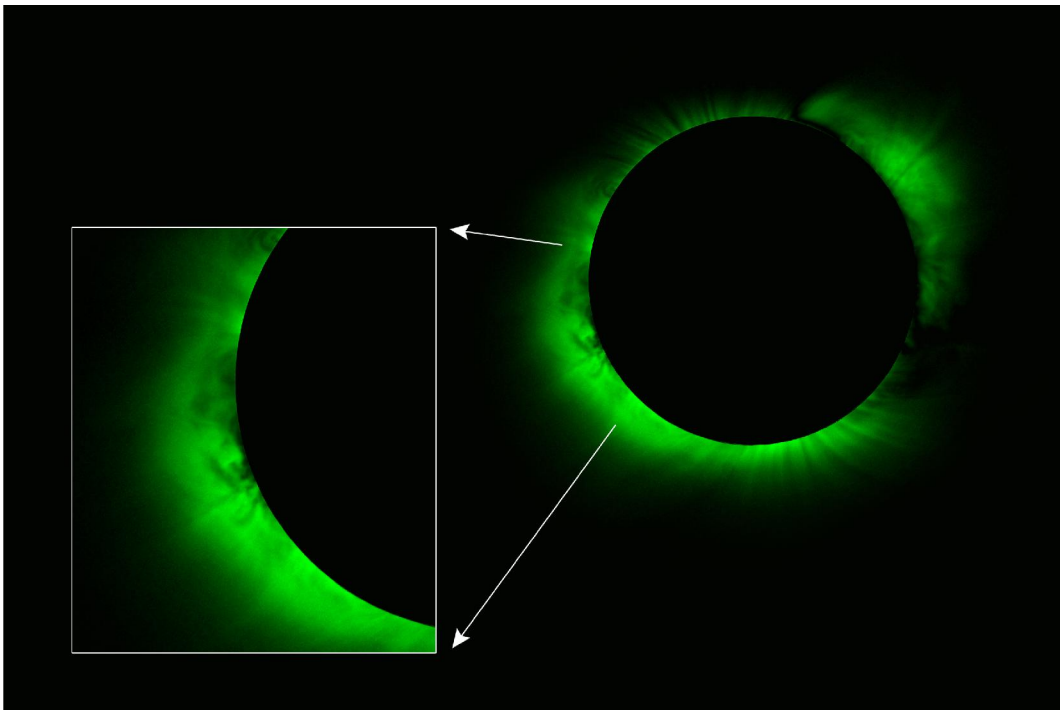
Επειδή το τελευταίο εργάζεται με προσπίπτον παράλληλο μέτωπο κύματος, τοποθετήθηκε μεταξύ δύο αχρωματικών φακών με τα κυρτά τους μέρη στραμμένα προς τα μέσα. Το μπρος εστιακό επίπεδο του πρώτου φακού συμπίπτει με το πίσω εστιακό επίπεδο του αντικειμενικού φακού του τηλεσκοπίου. Επίσης το πίσω εστιακό επίπεδο του δεύτερου φακού συμπίπτει με την ενεργό επιφάνεια της CCD-camera.

Το αποτέλεσμα της φωτογραφήσεις του στέμματος μέσω του φίλτρου Lyot, φαίνεται στην (Εικ. 8.1.12). Εκεί μπορούμε να δούμε την κατανομή του Fe XIV με τη μορφή της μεταβολής της φωτοαντίθεσης της έντασης πάνω στο ισημερινό επίπεδο του ηλίου. Έντονη συγκέντρωση παρατηρείται περί τον ισημερινό (κοντά στο χείλος του ηλίου) και κυρίως σε περιοχές συσσωρευμένης ενέργειας. Τέτοιες ενεργές περιοχές βρίσκονται κοντά και πάνω από τις ηλιακές κηλίδες. Η φωτογράφηση της κατανομής αυτής αποσκοπεί στην έρευνα για την ανακάλυψη του μηχανισμού θέρμανσης του ηλιακού στέμματος. Πράγματι δεν έχει ερμηνευθεί ακόμη πως από μια θερμοκρασία 5680^0C (αυτή της φωτόσφαιρας – επιφάνειας του Ηλίου) γίνεται μετάβαση στους $2.500.000^0$C που είναι η θερμοκρασία των περιοχών που κατανέμεται ο Fe XIV. Θα πρέπει να σημειώσουμε τέλος ότι η (Εικ. 8.1.12) προέκυψε μετά την αφαίρεση του συνεχούς υποβάθρου της φωτόσφαιρας του ηλίου που οφείλεται στο μ.κ. $\lambda = 5303$ Å.

Σημείωση

Ο ήλιος σαν ουράνιο σώμα έχει διάμετρο $R \simeq 1392000\text{km}$. Η επιφάνειά του η οποία ονομάζεται ***φωτόσφαιρα (photosphere)*** βρίσκεται σε διάπυρη κατάσταση

και η θερμοκρασία της είναι $\theta \simeq 5685^{o}\mathrm{C}$. Εκπέμπει κατά συνέπεια ένα συνεχές φάσμα ακτινοβολιών του οποίου η σχετική φασματική κατανομή ισχύος (Σ.Φ.Κ.Ι.) έχει μέγιστο στην ορατή περιοχή του Η/Μ φάσματος και συγκεκριμένα στο μ.κ. $\lambda \simeq 555\mathrm{nm}$ (βλ. ΕΡΓΑΣΤ/ΚΗ ΟΠΤΙΚΗ [5]: Π.Α.Α.Φ. (§ 2.1.1. (Σχ. 2.1.1.3)).



(Εικ. 8.1.12)

Η φωτόσφαιρα περιβάλλεται από ένα αραιό στρώμα πάχους $\simeq 15\mathrm{km}$ και θερμοκρασίας $\theta' \simeq 20000^{o}\mathrm{C}$ που ονομάζεται ***χρωμόσφαιρα (chromo sphere)***. Αναδεικνύεται στην ορατή περιοχή, σαν κοκκινωπή απόχρωση που περιβάλλει τον ηλιακό δίσκο όταν ο τελευταίος μπορεί ν' αποκρυφτεί, όπως π.χ. κατά τη διάρκεια μιας ολικής ηλιακής έκλειψης. Στην περιοχή αυτή συνυπάρχουν πληθώρα χημικών στοιχείων που βρίσκονται σε διεγερμένη κατάσταση λόγω της υψηλής θερμοκρασίας του περιβάλλοντος. Συνεπώς το φως που εκπέμπεται από τη φωτόσφαιρα του ηλίου και διαπερνά το στρώμα της χρωμόσφαιρας υφίσταται απορρόφηση. Η τελικά προκύπτουσα φασματική κατανομή αυτού του φωτός, είναι η λεγόμενη εξωδιαστημική ακτινοβολία του ηλίου. Πρόκειται για ένα γραμμικό εν γένει φάσμα απορρόφησης (επί του συνεχούς υποβάθρου του ορατού φωτός) (βλ. ΕΡΓΑΣ/ΚΗ ΟΠΤΙΚΗ [5]: Π.Α.Α.Φ. (Εικ. 1.3.6) , (Πίν. 1.3.7) , (Σχ. 2.1.1.3)), που οι γραμμές του ονομάζονται ***γραμμές απορρόφησης Fraunhofer*** .

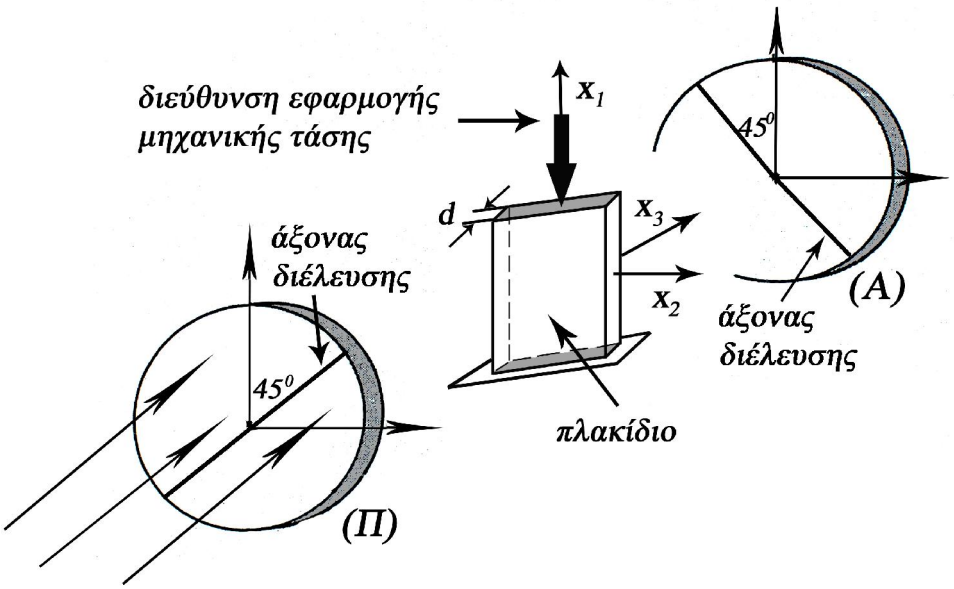
Από τα όρια του εξωτερικού στρώματος της χρωμόσφαιρας και σε έκταση δεκάδων εκατομμυρίων χιλιομέτρων εκτείνεται το λεγόμενο ***ηλιακό στέμμα (solar corona)***. (η γη π.χ. βρίσκεται 'πλέουσα' στο εσωτερικό του ηλιακού στέμματος). Σε

περιοχές του ηλίου όπου παρατηρείται ενεργός δράση (π.χ. ηλιακές κηλίδες κ.λ.π.), διαπιστώνεται η ανάπτυξη (στις αντίστοιχες περιοχές του στέμματος) μεγάλων συγκεντρώσεων ιονισμένου $\mathrm{Fe\,XIV}$. Η θερμοκρασία αυτών των περιοχών – γεγονός που δεν έχει ακόμα διευκρινιστεί – ανέρχεται σε $\simeq 2.500.000^{o}\mathrm{C}$. Αυτός ακριβώς είναι ο λόγος – όπως προαναφέραμε – για τον οποίο μας ενδιαφέρει ο τρόπος που κατανέμεται ο ιονισμένος Fe.

8.2 *Φωτοελαστικό φαινόμενο στα ισότροπα υλικά.*

Αρχή της φωτοελαστικής μεθόδου, για τον υπολογισμό του μέτρου και της διεύθυνσης των εφαρμοζόμενων μηχανικών τάσεων στο εσωτερικό των ισότροπων υλικών

Έστω ότι διαθέτουμε ένα διαφανές πλακίδιο από ισότροπο υλικό (π.χ. από το πλαστικό Polystyrene), με τη μορφή ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου (Σχ. 8.2.1). Στις δύο απέναντι έδρες του π.χ. κατά τη διεύθυνση του άξονα x_1, εφαρ-



(Σχ. 8.2.1)

μόζουμε ομογενή (σ' όλο το εύρος των δύο απέναντι εδρών του) συμπιεστική τάση σ_1 και θέλουμε να δούμε ποια θα είναι η συμπεριφορά του υλικού.

Κατ' αρχή, πριν την εφαρμογή της τάσης, το ελλειψοειδές των δ.δ. που περιγράφει το ισότροπο υλικό θα είναι μια σφαίρα που δίνεται κατά τα γνωστά από τη σχέση:

$$\left(1/n^2\right)\left(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2\right) = 1 \qquad (8.2.1)$$

όπου n ο δ.δ. του ισοτρόπου υλικού. Με την εφαρμογή όμως της τάσης θα πάρει τη μορφή (βλ. ΠΑΡ/ΜΑ 4-Ζ (σχ. Ζ-138-1)):

$$B_{ij}(\sigma)x_i x_j = \left[B_{ij}(0) + \pi_{ijrs}\sigma_{rs}\right]x_i x_j = 1 \tag{8.2.2}$$

<u>Συντελεστές p_{ij} για ισότροπα υλικά</u>

$$\begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{12} & 0 & 0 & 0 \\ p_{12} & p_{11} & p_{12} & 0 & 0 & 0 \\ p_{12} & p_{12} & p_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(p_{11}-p_{12}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(p_{11}-p_{12}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(p_{11}-p_{12}) \end{pmatrix}$$

(Polystyrene)

$p_{11} = \pm\ 0.30$
$p_{12} = \pm\ 0.31$
$\lambda = 0.6328\ \mu m$

(Σχ. 8.2.2)

όπου έχουμε εκτελέσει τις αντικαταστάσεις: $p_{ijrs} \to \pi_{ijrs}$ και $\varepsilon_{rs} \to \sigma_{rs}$ δηλ. τους ελαστοοπτικούς συντελεστές με τους πιεζοοπτικούς και τα στοιχεία της σχετικής παραμόρφωσης με αυτά της μηχανικής τάσης. Η σε συντομία γραφή των στοιχείων του πίνακα $[\pi]$ (για ισότροπα υλικά) έχει τη μορφή του πίνακα $[p]$ στο (ΠΑΡ/ΜΑ 4-Z (Σχ. Z-27)) χωρίς τους συντελεστές (1/2) στα στοιχεία p_{44}, p_{55}, p_{66}. Με το δεδομένο αυτό, και το γεγονός ότι για το συγκεκριμένο μας πρόβλημα ο πίνακας των στοιχείων των τάσεων γραμμένων και αυτών σε συντομία είναι ο:

$$\begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{8.2.3}$$

(δηλ. μόνο το στοιχείο $\sigma_1 \neq 0$), η (σχ. 8.2.2) η οποία σε αναλυτική μορφή γράφεται (βλ. την αντίστοιχη (σχ. Z-138-2) στο ΠΑΡ/ΜΑ 4-Z):

$$\begin{aligned} &\left(1/n_1^2 + \pi_{11}\sigma_1 + \pi_{12}\sigma_2 + \pi_{13}\sigma_3 + \pi_{14}\sigma_4 + \pi_{15}\sigma_5 + \pi_{16}\sigma_6\right)x_1^2 + \\ &\left(1/n_2^2 + \pi_{21}\sigma_1 + \pi_{22}\sigma_2 + \pi_{23}\sigma_3 + \pi_{24}\sigma_4 + \pi_{25}\sigma_5 + \pi_{26}\sigma_6\right)x_2^2 + \\ &\left(1/n_3^2 + \pi_{31}\sigma_1 + \pi_{32}\sigma_2 + \pi_{33}\sigma_3 + \pi_{34}\sigma_4 + \pi_{35}\sigma_5 + \pi_{36}\sigma_6\right)x_3^2 + \\ &2\left(\pi_{41}\sigma_1 + \pi_{42}\sigma_2 + \pi_{43}\sigma_3 + \pi_{44}\sigma_4 + \pi_{45}\sigma_5 + \pi_{46}\sigma_6\right)x_2 x_3 + \\ &2\left(\pi_{51}\sigma_1 + \pi_{52}\sigma_2 + \pi_{53}\sigma_3 + \pi_{54}\sigma_4 + \pi_{55}\sigma_5 + \pi_{56}\sigma_6\right)x_1 x_3 + \\ &2\left(\pi_{61}\sigma_1 + \pi_{62}\sigma_2 + \pi_{63}\sigma_3 + \pi_{64}\sigma_4 + \pi_{65}\sigma_5 + \pi_{66}\sigma_6\right)x_1 x_2 = 1 \end{aligned} \tag{8.2.4}$$

παίρνει τελικά τη μορφή:

$$\left(\frac{1}{n^2}+\pi_{11}\sigma_1\right)x_1^2+\left(\frac{1}{n^2}+\pi_{12}\sigma_1\right)x_2^2+\left(\frac{1}{n^2}+\pi_{12}\sigma_1\right)x_3^2=1 \qquad (8.2.5)$$

όπου $n_1=n_2=n_3=n$.

Βλέπουμε δηλ. από τη (σχ. 8.2.5) ότι κάτω από τις δεδομένες συνθήκες της συμπιεστικής τάσης, το ισότροπο υλικό μετατράπηκε σε μονοάξον διπλοθλαστικό. Πράγματι για τον υπολογισμό των κυρίων δ.δ. του νέου ελλειψοειδούς εφόσον αυτό είναι της μορφής:

$$\frac{x_1'^2}{n_1'^2}+\frac{x_1'^2}{n_1'^2}+\frac{x_1'^2}{n_1'^2}=1 \qquad (8.2.6)$$

με $x_1\equiv x_1', x_2\equiv x_2', x_3\equiv x_3'$ (δηλ. δεν έχουμε αλλαγή του προσανατολισμού των αξόνων x_1,x_2,x_3 από τις διευθύνσεις που επιλέξαμε τυχαία αρχικά στο ισότροπο υλικό), θα έχουμε:

$$\frac{1}{n_1'^2}=\frac{1}{n^2}+\pi_{11}\sigma_1 \ , \ \frac{1}{n_2'^2}=\frac{1}{n^2}+\pi_{12}\sigma_1 \ , \ \frac{1}{n_3'^2}=\frac{1}{n^2}+\pi_{12}\sigma_1 \qquad (8.2.7)$$

Επειδή το φωτοελαστικό φαινόμενο προκαλεί μεταβολές του δ.δ. της τάξης του $\sim 10^{-4}$ τότε $n_1',n_2',n_3'\simeq n$ οπότε κατά τα γνωστά:

$$n_1'=n-\frac{1}{2}n^3\pi_{11}\sigma_1 \ , \ n_2'=n-\frac{1}{2}n^3\pi_{12}\sigma_1 \ , n_3'=n-\frac{1}{2}n^3\pi_{12}\sigma_1 \qquad (8.2.8)$$

Από τις σχέσεις αυτές βλέπουμε χαρακτηριστικά τη μετατροπή του ισοτρόπου υλικού σε μονοάξον, με τον οπτικό του άξονα στη διεύθυνση του x_1, που είναι και η διεύθυνση εφαρμογής της μηχανικής τάσης.

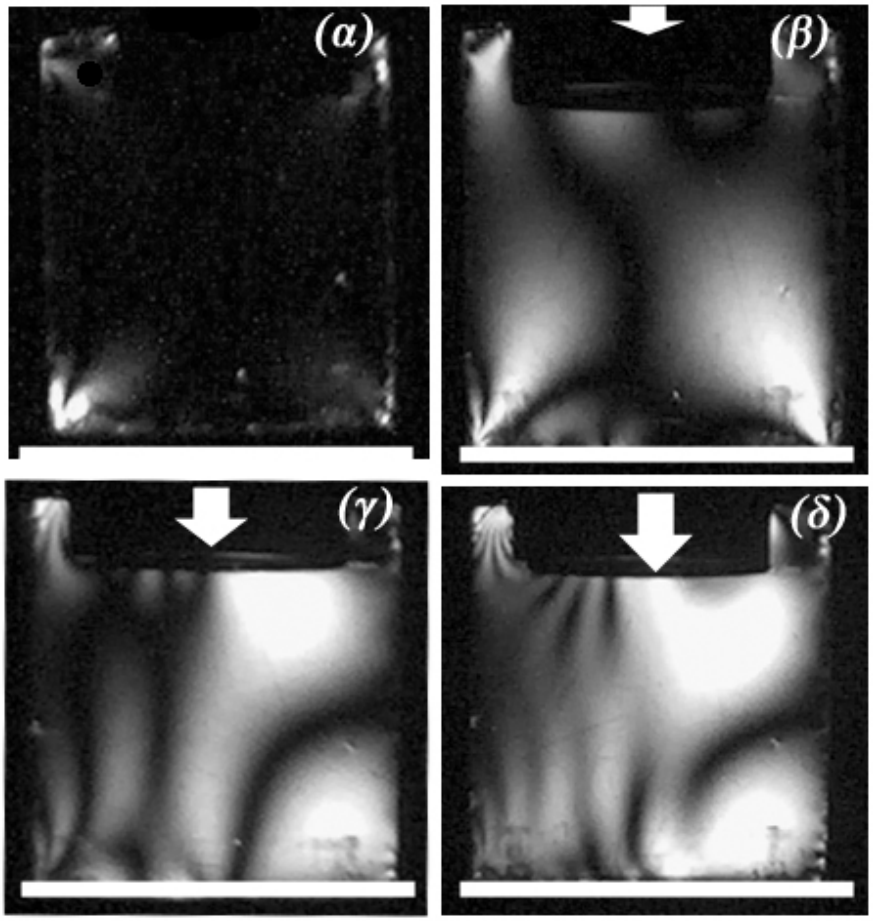
Υποθέτουμε τώρα (Σχ. 8.2.1) ότι φωτίζουμε τον κρύσταλλο ο οποίος βρίσκεται υπό τάση, με γραμμικά πολωμένο φως που διαδίδεται στη διεύθυνση του x_3 μέσω ενός πολωτή με τον άξονα διέλευσής του στη διεύθυνση των 45^0 μεταξύ των αξόνων x_1,x_2 με δεδομένη τη διπλοθλαστικότητα του υλικού στη διεύθυνση διάδοσης να είναι:

$$n_1'-n_2'=\frac{1}{2}n^3\left(\pi_{12}-\pi_{11}\right)\sigma_1 \qquad (8.2.9)$$

Αν μετά το υλικό τοποθετήσουμε έναν αναλυτή σε θέση διασταύρωσης με τον πολωτή, τότε η ένταση του φωτός κατά την έξοδό του από αυτόν θα δίνεται από τη ((σχ. 5.75) ΠΑΡ/ΜΑ 5)):

$$I = \frac{1}{2}\sin^2\left[\frac{\pi\left(n_1 - n_2\right)d}{\lambda}\right] = \frac{1}{2}\sin^2\left[\frac{\pi d}{2\lambda}n^3\left(\pi_{12} - \pi_{11}\right)\sigma_1\right] \qquad (8.2.10)$$

Στην περίπτωση αυτή και εφόσον έχουμε υποθέσει ότι η τάση κατανέμεται ομογενώς μεταξύ των δύο απέναντι εδρών του (διεύθυνση του x_1 και υποτίθεται στο εσωτερικό του), η απεικόνισή του μέσω ενός οπτικού συστήματος, θα χαρακτηρίζει το πλακίδιο από την ίδια ένταση από σημείο σε σημείο. Δεν θα συμβαίνει όμως το ίδιο, από τη στιγμή που οι τάσεις δεν κατανέμονται ομογενώς στο εσωτερικό του κατά τη δράση της εξωτερικής δύναμης. Δηλ. η σ_1 θα μεταβάλλεται από σημείο σε σημείο) . Αυτό που θα δούμε τότε, θα είναι ένα πρότυπο έντασης που διατρέχεται από φωτεινούς και σκοτεινούς 'κροσσούς' όπως αυτοί στις (Εικ. 8.2.3).

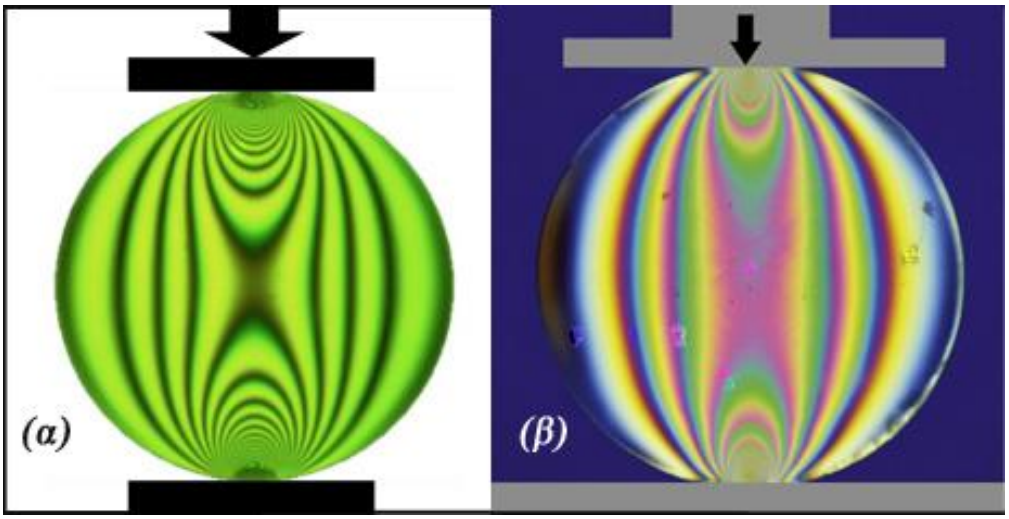


(Εικ. 8.2.3)

Οι τελευταίες αφορούν την ανάδειξη βήμα προς βήμα του φωτοελαστικού φαινομένου σε ένα πλακίδιο polystyrene διαστάσεων $(10\times12\text{mm})$ και πάχους 3mm τοποθετημένου στη διάταξη του (Σχ. 8.2.1) και φωτιζόμενου με μονοχρωματικό φως . Η κάτω από τις δύο απέναντι βάσεις των 10mm εδράζεται σταθερά ενώ στο κέντρο της πάνω, έχουμε τη δυνατότητα να ασκήσουμε δύναμη (άξονας x_1). Η (Εικ. 8.2.3α) αντιστοιχεί στην περίπτωση μη εφαρμογής της εξωτερικής δύναμης. Κάτω από αυτές τις συνθήκες το πρότυπο της έντασης θα έπρεπε να είναι τελείως σκοτεινό λόγω της παρεμβολής του ισοτρόπου πλακιδίου μεταξύ των δύο διασταυρωμένων πολωτών. Το ότι από τις τέσσερις γωνίες του διέρχεται μια στοιχειώδης ποσότητα φωτός, δηλώνει την ύπαρξη παραμενουσών τάσεων (κατά τη διαδικασία κοπής του πλακιδίου), για τις οποίες θα μιλήσουμε στα επόμενα. Οι (Εικ. 8.2.3β,γ,δ) αντιστοιχούν στα εμφανιζόμενα πρότυπα έντασης λόγω της εφαρμογής συνεχώς και μεγαλύτερης δύναμης στο δείγμα μας. Είναι χαρακτηριστική η εμφάνιση 'κροσσών' ιδίως στην περίπτωση της μέγιστης εφαρμοζόμενης τάσης (Εικ. 8.2.3δ). Θεωρητικά, τα πρότυπα των 'κροσσών' θα έπρεπε να είναι συμμετρικά λόγω των συμμετρικά εφαρμοζόμενων τάσεων στο δείγμα. Το τελευταίο γίνεται εμφανές μερικώς μόνο στην (Εικ. 8.2.3β) όχι όμως και στις δύο επόμενες. Το γεγονός οφείλεται κυρίως στον μη συμμετρικό τρόπο κοπής του δείγματος και στη μη εντελώς κατακόρυφη διεύθυνση εφαρμογής της δρώσας εξωτερικά δύναμης.

Με βάση τη (σχ. 8.2.10) μπορούμε να συμπεράνουμε ότι για μονοχρωματικό φωτισμό, οι ισόφωτοι 'κροσσοί' (δηλ. αυτοί που έχουν την ίδια ένταση) αντιπροσωπεύουν περιοχές που κατά μέτρο η μηχανική τάση από σημείο σε σημείο στο εσωτερικό του υλικού είναι η ίδια. Υποθέτουμε βέβαια ότι το πάχος d του υλικού που διατρέχεται από το φως (διεύθυνση του x_3), είναι σχετικά μικρό σε σχέση με την απόσταση των δύο απέναντι εδρών στις οποίες εφαρμόζονται οι τάσεις (διεύθυνση x_1). Όπως αποδεικνύεται αν στρέψουμε πολωτή και αναλυτή ταυτόχρονα κατά την ίδια γωνία, τότε βλέπουμε τους 'κροσσούς' ν' αλλάζουν θέσεις, υποδεικνύοντάς μας πάλι περιοχές που χαρακτηρίζονται από την ίδια τάση. Η τιμή των τάσεων εξαρτάται από την 'τάξη' των 'κροσσών' που εκκινούν από τα όρια της επιφάνειας που εξετάζουμε. Επίσης για την πλήρη επίλυση του προβλήματος, υπάρχουν και μέθοδες προσδιορισμού των διευθύνσεων των τάσεων από σημείο σε σημείο κατά μήκος των 'κροσσών'. Στην προκειμένη περίπτωση πρέπει να χρησιμοποιηθούν εκτός των δύο πολωτών και δύο πλακίδια καθυστέρησης $\lambda/4$. Στην (Εικ. 8.2.4α) μπορούμε να δούμε το πρότυπο των ισοτασικών 'κροσσών', κατά την μονοχρωματική φωτοελαστική εξέταση ενός πλακιδίου κυκλικού σχήματος στη διάταξη του (Σχ. 8.2.1). Το τελευταίο εδράζεται σταθερά σε βάση στο κάτω μέρος του και η δύναμη συμπίεσης εφαρμόζεται στην κορυφή του. Τα προηγούμενα από-

τελούν στοιχειώδη περιγραφή του φαινομένου της ***φωτοελαστικότητας (photoelasticity)*** που συνιστά αξιόλογο επιστημονικό κλάδο μετρολογίας στην περιοχή της μηχανικής των παραμορφώσεων και της αντοχής των υλικών.*



(Εικ. 8.2.4)

Τέλος στα επόμενα θεωρούμε σημαντικό να αναφέρουμε μια εκδοχή, η οποία αφορά την ανάδειξη του φαινομένου, για την περίπτωση όμως που στα αντικείμενα δεν εφαρμόζεται κάποια εξωτερικά δρώσα δύναμη. Π.χ. η (Εικ. 8.2.5)

(Εικ. 8.2.5)

μας δείχνει ένα διαφανές ισοπαχές καμπυλόγραμμο σχεδίασης από ισότροπο πλαστικό, μεταξύ δύο διασταυρωμένων πολωτών που ο πρώτος φωτίζεται με μονοχρω-

* Ε. Γδούτος: 'Η φωτοελαστική μέθοδος ως θεωρία και πράξη'. Εκδ. Α/φοί Κυριακίδη Θεσσαλονίκη (1987).

ματικό φως. Στην πραγματικότητα το πρότυπο αυτό των 'κροσσών' δεν θα έπρεπε να εμφανίζεται (πλήρης αμαύρωση), επειδή το φως που το διατρέχει μετά τον πρώτο πολωτή θα έπρεπε να είναι και πάλι γραμμικά πολωμένο στην ίδια διεύθυνση (ισότροπο υλικό χωρίς την εφαρμογή οποιασδήποτε εξωτερικής μηχανικής δύναμης). Η ερμηνεία του γεγονότος αυτού παραπέμπει στις λεγόμενες ***παραμένουσες τάσεις*** εντός του υλικού κατά την διαδικασία της παρασκευής του και της κατεργασίας του. Παρά το ότι το φύλλο του υλικού μπορεί να είναι ομογενές (χωρίς παραμένουσες τάσεις στο εσωτερικό του, δύσκολα θα μπορέσουμε ν' αποφύγουμε τη ανάπτυξή τους κατά τη διαδικασία της επεξεργασίας του (π.χ. κοπή από πρέσα του φύλλου, για την δημιουργία του καμπυλόγραμμου ή συμπίεση του υλικού βάσης σε καλούπι). Και πάλι βέβαια εδώ οι ισόφωτες των 'κροσσών', μας δίνουν τις περιοχές που χαρακτηρίζονται από την ίδια μηχανική παραμένουσα τάση. Στην (Εικ. 8.2.6) βλέπουμε το πρότυπο από τις έγχρωμες ισόφωτες του ίδιου ακριβώς μοντέλου (του καμπυλόγραμμου), για την περίπτωση που ο πρώτος πολωτής φωτίζεται από επίπεδο μέτωπο κύματος λευκού φωτός. Ο φωτισμός με λευκό φως είναι δυ-

(Εικ. 8.2.6)

νατόν να συνεισφέρει επί πλέον πληροφορίες κατά τη φωτοελαστική μελέτη ενός μοντέλου. Με παρόμοια μέθοδο (δηλ. του φωτισμού με λευκό φως) στην (Εικ. 8.2.4β), μπορούμε να δούμε την ανάπτυξη των έγχρωμων ισοφώτων 'κροσσών' σε κυκλικό πλακίδιο υπό την επίδραση εξωτερικής συμπιεστικής δύναμης.

Όπως γίνεται κατανοητό, η φωτοελαστική μέθοδος της ανάδειξης των παραμενουσών τάσεων σε διαφανή υλικά, έχει επίσης ιδιαίτερη σημασία για την κατα-

σκευή οπτικών στοιχείων όπως φακών, πρισμάτων, οπτικά επιπέδων επιφανειών κ.λ.π. Π.χ. για μια οπτικά επίπεδη πλάκα από γυαλί με παραμένουσες τάσεις στο εσωτερικό της, δεν είναι οπτικά πλέον ισότροπη αλλά καθίσταται αντικείμενο φάσεως από σημείο σε σημείο.

8.3 *Ηλεκτροπτικοί διαμορφωτές*

Είναι γνωστό από την κλασσική θεωρία των τηλεπικοινωνιών, ότι προκειμένου να διαδοθεί ένα π.χ. ηχητικό (φωνητικό) σήμα εύρους συχνοτήτων $(\simeq 4\,\mathrm{kHz})$ σ' ένα αγωγό, κυματοδηγό ή στον ελεύθερο χώρο, θα πρέπει να μετατραπεί κατ' αρχή σε ηλεκτρικό. Κατόπιν το τελευταίο θα πρέπει να διαμορφώσει μ' ένα ορισμένο τρόπο (κατά πλάτος ή κατά φάση ή με άλλη διαδικασία) ένα αρμονικό σήμα υψηλότερης συχνότητας (τη λεγόμενη φέρουσα συχνότητα). Το διαμορφωμένο αυτό σήμα, μετά τη διάδοσή του στο τόπο προορισμού του, υφίσταται αποδιαμόρφωση και μετατροπή πάλι από ηλεκτρικό σε ηχητικό, προκειμένου να γίνει ακουστό. Αποδεικνύεται ότι όσο υψηλότερη είναι η χρησιμοποιούμενη φέρουσα συχνότητα, τόσες περισσότερες τον αριθμό μπάντες συχνοτήτων (των $4\,\mathrm{kHz}$) μπορούμε να διαδώσουμε μέσα από έναν αγωγό, διαμορφώνοντάς τες κατάλληλα με υποπολλαπλάσια της αρχικής φέρουσας. Η επιλογή των φερουσών συχνοτήτων μπορεί να γίνει από την περιοχή των ***ραδιοκυμάτων (radiowaves)*** με όριο $\sim 10^6\,\mathrm{Hz}$ και των ***μικροκυμάτων (microwaves)*** με όριο $\sim 10^{10}\,\mathrm{Hz}$ που εξυπηρετούν τις επίγειες και διαστημικές επικοινωνίες. Οι διαμορφωτές και αποδιαμορφωτές των προαναφερομένων συχνοτήτων συνίστανται από ηλεκτρονικά και μικροκυματικά συστήματα.

Η ιδέα όμως της χρησιμοποίησης πλέον του φωτός σαν φορέα μεταφοράς και επεξεργασίας πληροφοριών, έχει προκαλέσει ραγδαία μεταβολή στο τοπίο των τηλεπικοινωνιών, αν και αποτελεί ερευνητική προσπάθεια των τελευταίων τουλάχιστον τριάντα ετών. Πράγματι για την περίπτωση αυτή το όριο των φερουσών συχνοτήτων (συχνότητες που χαρακτηρίζουν το φωτός) της τάξης των ($\sim 10^{15}\,\mathrm{Hz}$), που σχετίζονται με την περιοχή του ορατού και του εγγύς υπερύθρου του Η/Μ φάσματος, δίνει τη δυνατότητα της μεταφοράς και επεξεργασίας τεραστίου όγκου πληροφοριών. Δύο σημαντικοί τομείς της σύγχρονης οπτικής τεχνολογίας συνεισφέρουν σ' αυτή την κατεύθυνση: Πρόκειται γι' αυτόν των ***Οπτικών Ινών (Fiber Optics)*** και αυτόν της ***Ολοκληρωμένης Οπτικής (Integrated Optics)***.

Ο πρώτος τομέας ασχολείται με τη μεταφορά οπτικών πληροφοριών μέσω οπτικών κυματοδηγών. Δηλ. σε γενικές γραμμές με την οδήγηση και διάδοση του φωτός μέσω κατάλληλης κατασκευής γυάλινων κυλινδρικών αγωγών διαμέτρου δεκάτων του χιλιοστού. Στην κλασσική περίπτωση η ίνα αποτελείται από έναν πυρήνα ορισμένου δ.δ. που περιβάλλεται από ένα διαφανές και πάλι υλικό ελαφρά μικρότερου δ.δ. Αρχή λειτουργίας της διάδοσης του φωτός μέσω ενός τέτοιου οπτικού συστήματος είναι οι συνεχείς ολικές ανακλάσεις του λόγω της πρόσπτωσής του από οπτικά πυκνότερο σε οπτικά αραιότερο μέσο. Το μήκος των οπτικών ινών μπορεί ν' αναπτυχθεί σε εκατοντάδες χιλιόμετρα συνδέοντας τους διάφορους τερματικούς σταθμούς. Οι απώλειες που παρουσιάζουν οι σημερινά κατασκευαζόμενες

οπτικές ίνες είναι πολύ μικρές (της τάξης του $\sim 0.2\text{dB/km}$), με συνέπεια ενίσχυση ενός σήματος χρειάζεται να γίνεται κάθε 250km. Σε μία από τις προαναφερόμενες οπτικές ίνες είναι δυνατόν να μεταφέρονται πληροφορίες 140Mb/s μεταξύ δύο τερματικών σταθμών που απέχουν μεταξύ τους 220km. Το τελευταίο ισοδυναμεί με 450.000 τηλεφωνικά κανάλια ανά χιλιόμετρο!!! Για σύγκριση μπορούμε ν' αναφέρουμε ότι για τα υπάρχοντα (και ταχύτατα αντικαθιστάμενα) δίκτυα των χάλκινων καλωδίων όπου οι φέρουσες συχνότητες είναι μεταξύ $1\text{kHz}-1\text{MHz}$ οι απώλειες είναι περίπου μεταξύ $(7-50)\text{dB/km}$ οπότε απαιτείται ενίσχυση των σημάτων κάθε λίγα χιλιόμετρα. Τέλος το σχετικά χαμηλό σήμερα κόστος παραγωγής των οπτικών ινών καθιστά δυνατή όχι μόνο την επικοινωνία μεταξύ μακρινών αποστάσεων αλλά και την εξυπηρέτηση αυτών των αναγκών σε τοπικό επίπεδο (Local Area Networks (LANS)). Τέτοιες είναι η τηλεφωνία, η τηλεόραση, οι Η/Υ και άλλα.

Όσον αφορά το αντικείμενο έρευνας και εφαρμογών της Ολοκληρωμένης Οπτικής, και αυτή γνωρίζει στις μέρες μας αλματώδη εξέλιξη. Βασίζεται στο γεγονός ότι το φως μπορεί να περιοριστεί και να οδηγηθεί διαμέσου πολύ λεπτών στο πάχος υμένιων διαφανών υλικών και πλάτους ακόμη και της τάξης του μ.κ. Τα υμέναια αυτά επιστρώνονται σε διάφορα υλικά. Με κατάλληλη εκλογή των υποστρωμάτων και των υμένιων και κατάλληλη διευθέτηση των κυματοδηγών, μπορεί να επιτευχθεί μεγάλη ποικιλία λειτουργιών. Οι τελευταίες οδηγούν στην κατασκευή οπτικών εξαρτημάτων όπως: ***διαμορφωτών (modulators)*** του φωτός μέσω κυματοδηγών, ***διακοπτών (switchers)*** του φωτός κατά βούληση, ***πολυπλεκτών (multiplexers)***, φίλτρων κ.τ.λ. Η σπουδαιότητα των παραπάνω έγκειται στις πολύ μικρές τους διαστάσεις (της τάξης των mm) με συνέπεια να είναι δυνατή η επίτευξη μεγάλης συγκέντρωσης οπτικών εξαρτημάτων στο χώρο σε αντιδιαστολή με τις συνήθεις διατάξεις της οπτικής. Η δυνατότητα αναπαραγωγής τους σε μεγάλη κλίμακα με αξιόπιστο τρόπο και η πολύ χαμηλή κατανάλωση ισχύος για τη λειτουργία τους, τα καθιστά ευθέως χρησιμοποιήσιμα σε συνδυασμό με την τεχνολογία των επικοινωνιών μέσω των οπτικών ινών. Όπως ήδη αναφέραμε οι επικοινωνίες μέσω των οπτικών ινών παρέχουν τη δυνατότητα μεταφοράς ενός τεράστιου όγκου πληροφοριών. Η Ολοκληρωμένη Οπτική παίζει σπουδαίο ρόλο στην επεξεργασία αυτών των πληροφοριών κατά τη διαμόρφωση και αποδιαμόρφωσή τους στους τερματικούς σταθμούς καθώς και τους σταθμούς ενίσχυσής τους.

Το αντικείμενο της μελέτης μας εδώ, θα είναι ο τρόπος λειτουργίας των ***ευμεγεθών ηλεκτροοπτικών διαμορφωτών (bulk electro-optic modulators)***, καθώς και η περιγραφή ορισμένων κατασκευαστικών προδιαγραφών και κριτηρίων τους. Όπως θ' αποδείξουμε το ***ηλεκτροοπτικό φαινόμενο (electro-optic effect)*** – το οποίο εκτενώς περιγράφουμε στο (ΠΑΡ/ΜΑ 4-Ζ) – αποτελεί έναν από τους βασικότερους τρόπους για να διαμορφώσουμε μια Η/Μ διαταραχή της περιοχής του ορα-

τού φάσματος δηλ. σε μια δέσμη φωτός, περιλαμβανομένης και της εγγύς περιοχής του υπερύθρου. Οπτικά εξαρτήματα που λειτουργούν με βάση το Η/Ο φαινόμενο αφορούν εφαρμογές: Στις τηλεπικοινωνίες, την αναλογική και ψηφιακή επεξεργασία, την επεξεργασία πληροφοριών, τους οπτικούς υπολογιστές τους ανιχνευτές κ.τ.λ. Τέτοια παραδείγματα αποτελούν: Οι διαμορφωτές πλάτους και φάσης (modulators), οι πολυπλέκτες (multiplexers), οι διακόπτες φωτός switch arrays), οι ζεύκτες (couplers), οι ελεγκτές των διαφόρων καταστάσεων πόλωσης (polarization controllers), οι εκτροπείς φωτός (deflectors), οι συσχετιστές (correlators), οι μετατροπείς από αναλογικό σε ψηφιακό σήμα (A/D converters), οι μετρητές θερμοκρασίας, υγρασίας, Η/Μ ακτινοβολιών καθώς και πλείστα άλλα συστήματα. Βασική αρχή λειτουργίας των παραπάνω, είναι η μεταβολή των οπτικών ιδιοτήτων ενός υλικού, (βασικά του δ.δ) με την εφαρμογή μιας ηλεκτρικής τάσης με ελεγχόμενο τρόπο.

Σημείωση

Όπως προαναφέραμε η μελέτη μας θ' αφορά τους ευμεγέθεις Η/Ο διαμορφωτές. Εντελώς τυπικό παράδειγμα τέτοιου διαμορφωτή είναι ένας κατάλληλος κρύσταλλος ορθογώνιας διατομής π.χ. $5mm^2$ και μήκους $2cm$, δια μέσου του οποίου θα διέρχεται η δέσμη φωτός και στα άκρα του οποίου (κατά μήκος του ή κάθετα σ' αυτόν) θα εφαρμόζεται η ηλεκτρική τάση. Το παραπάνω παράδειγμα αναφέρεται σε αντιδιαστολή με τους Η/Ο διαμορφωτές τους οποίους αναδεικνύει η Ολοκληρωμένη Οπτική. Εκεί, οι αρχές μεν λειτουργίας τους είναι παραπλήσιες, οι διαστάσεις τους όμως είναι της τάξης των λίγων mm. Το γεγονός αυτό οφείλεται στον περιορισμό των διαστάσεων της 'δέσμης' του φωτός που μπορεί λόγω του τρόπου της κυματοδήγησης να είναι μέχρι και της τάξης του μήκους κύματος. Σε αντιδιαστολή η δέσμη φωτός π.χ. ενός Laser που πρόκειται να διαμορφωθεί οδηγημένη μέσα από έναν ευμεγέθη διαμορφωτή, καθορίζει τις τελικές διαστάσεις του λόγω της γκαουσιανής της κατανομής και του φαινόμενου της περίθλασης του φωτός από τα όριά του.

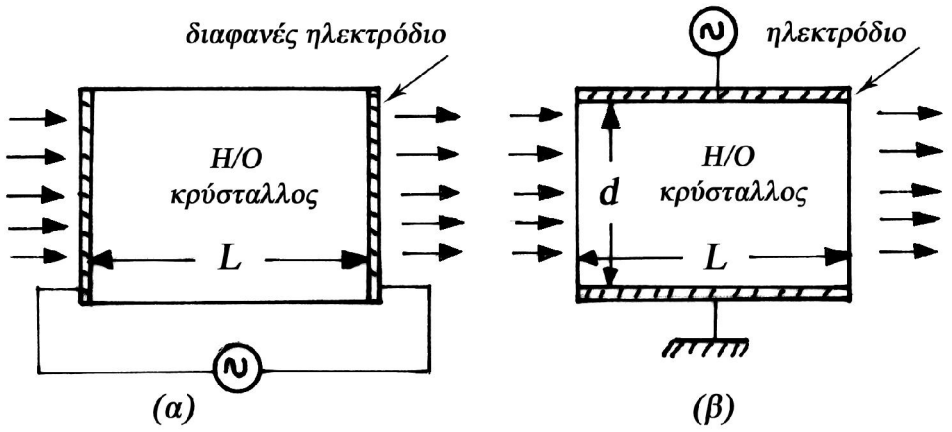
Ευμεγέθεις ηλεκτροοπτικοί (Η/Ο) διαμορφωτές

Ηλεκτροοπτικός διαμορφωτής (electro-optic modulator) είναι το οπτικό στοιχείο που η λειτουργία του στηρίζεται στην ηλεκτρικά επαγομένη μεταβολή του δείκτη διάθλασής του. Στη γενικότερη περίπτωση αποτελείται από ένα κρυσταλλικό υλικό αν και το διαμορφώνον μέσο μπορεί να είναι υγρό ή κρύσταλλος του κυ-

βικού συστήματος. Οι κρύσταλλοι γενικά κόβονται έτσι ώστε η τομή τους (οι παράλληλες έδρες τους) να είναι συγκεκριμένη ως προς το σύστημα των κυρίων αξόνων τους. Το ηλεκτρικό πεδίο εφαρμόζεται σε ορισμένες διευθύνσεις σε σχέση με την τομή τους και το φως με τη μορφή ενός επιπέδου μετώπου κύματος διαδίδεται στο εσωτερικό τους σε ορισμένη πάλι διεύθυνση. Οι παράμετρες αυτές καθορίζουν πλέον τον ελεγχόμενο τρόπο με τον οποίο οι ακόλουθες ιδιότητες του φωτός μπορούν να μεταβληθούν: 1) Το πλάτος του (και κατά προέκταση η έντασή του), 2) Η φάση του, συνήθως χωρική (ή χωροχρονική), 3) Η συχνότητά του (αυξομείωση της συχνότητας του φωτός, συναρτήσει της μεταβολής της ηλεκτρικής συχνότητας διαμόρφωσης), 4) Η κατάσταση πόλωσής του και 5) Η διεύθυνσή του. Ανάλογα με τα διαμεσολαβούντα μέσα παραγωγής του φωτός (πηγές), διάδοσης (οπτικές ίνες) και ανίχνευσης, η διαμόρφωση μπορεί να είναι αναλογική ή ψηφιακή. Συνήθως για εφαρμογές διάδοσης των πληροφοριών σε μικρές αποστάσεις – όπου ο λόγος σήματος προς θόρυβο θα πρέπει να είναι μεγάλος – χρησιμοποιείται η αναλογική διαμόρφωση των σημάτων και οι διαμορφώνουσες συχνότητες είναι στενής φασματικής περιοχής.

8.3.1 *Τα είδη των διαμορφωτών. Βασικές μορφές της διαμορφώνουσας διάταξης*

Οι διαμορφωτές εμφανίζονται συνήθως σε δύο τύπους: α) Τους ***επιμήκεις (longitudinal)*** και β) Τους ***εγκάρσιους (transverse)*** ανάλογα με το πως εφαρμόζεται το διαμορφώνον ηλ. πεδίο (παράλληλα ή κάθετα) σε σχέση με τη διεύθυνση διάδοσης του φωτός. Συνήθως ένας ευμεγέθης διαμορφωτής αποτελείται από ένα κρύσταλλο μορφής ορθού πρίσματος (Σχ. 8.3.1.1α,β) με τις απέναντι έδρες πα-



(Σχ. 8.3.1.1)

ράλληλες προκειμένου η δίοδος του μετώπου κύματος να συνοδεύεται από ομοιόμορφη μεταβολή στη φάση του διανύοντας το μήκος του L. Επίσης δύο απέναντι έδρες του είναι σε στενή επαφή με μεταλλικά ηλεκτρόδια στα οποία εφαρμόζεται η διαμορφώνουσα διαφορά δυναμικού.

Στην περίπτωση των επιμήκων Η/Ο διαμορφωτών το ηλ. πεδίο εφαρμόζεται κατά μήκος της διάδοσης του φωτός (δηλ. κατά τη διεύθυνση της κυματοκαθέτου $\mathbf{k}$) (Σχ. 8.3.1.1α). Το τελευταίο συνεπάγεται ότι τα ηλεκτρόδια θα πρέπει να είναι διαφανή. Κατασκευάζονται από την εναπόθεση λεπτών υμενίων κατόπιν εξάχνωσης SnO, InO, CdO ή ITO (Indium Tin Oxide) στις δύο απέναντι έδρες του κρυστάλλου. Στη γενικότερη περίπτωση, τα συμπεράσματα που εξάγονται από τη θεωρία, προϋποθέτουν την εφαρμογή ομογενών ηλ. πεδίων κατά μήκος των κρυστάλλων καθώς και επίπεδα διαδιδόμενα μέτωπα κύματος. Μια βασική παράμετρος των κρυσταλλικών διαμορφωτών είναι ο λεγόμενος ***λόγος μορφής (aspect ratio)***. Πρόκειται για το λόγο L/d όπου L το μήκος διάδοσης του φωτός στο εσωτερικό του κρυστάλλου και d η απόσταση των ηλεκτροδίων. Για τον επιμήκη τύπο διαμορφωτή ο λόγος αυτός είναι πάντοτε ίσος με τη μονάδα. Είναι γνωστό επίσης ότι η τιμή του εφαρμοζόμενου ηλ. πεδίου στο εσωτερικό του κρυστάλλου είναι $E = V/d$ όπου V η εφαρμοζόμενη στα ηλεκτρόδια διαφορά δυναμικού. Προκειμένου να υπολογίσουμε τη μεταβολή στη φάση $\Delta\phi$ που προέρχεται από την εφαρμογή του ηλ. πεδίου κατά τη διάδοση του φωτός σε απόσταση L (στον επιμήκη διαμορφωτή), θα πρέπει ν' ανατρέξουμε στο (ΠΑΡ/ΜΑ 4-Z , π.χ. (σχ. Z-17)). Αυτή θα δίνεται γενικά από τη σχέση:

$$\begin{aligned}\Delta\phi = \phi - \phi_o &= \frac{2\pi}{\lambda}\Delta nL = \frac{2\pi}{\lambda}\left(\frac{1}{2}n^3 rE\right)L = \\ &= \frac{2\pi}{\lambda}\left(\frac{1}{2}n^3 r\frac{V}{L}L\right) \quad \Rightarrow \quad \Delta\phi = \frac{\pi n^3 rV}{\lambda}\end{aligned} \tag{8.3.1.1}$$

όπου E το εφαρμοζόμενο ηλ. πεδίο, r ο ηλεκτροοπτικός συντελεστής, n ο δ.δ. πριν την εφαρμογή του πεδίου και λ το μ.κ. του φωτός στο κενό. Παρατηρούμε λοιπόν στην περίπτωση αυτή ότι η επαγομένη μεταβολή στη φάση $\Delta\phi$ είναι ανάλογη της εφαρμοζόμενης διαφοράς δυναμικού και αντιστρόφως ανάλογη του μ.κ. του φωτός. Δεν εξαρτάται όμως από τις φυσικές διαστάσεις του διαμορφωτή επειδή λόγο του επιμήκους τύπου του το L στη (σχ. 8.3.1.1) απαλείφεται.

Στον εγκάρσιο τύπο διαμορφωτή (Σχ. 8.3.1.1β) η διαφορά δυναμικού εφαρμόζεται κάθετα προς τη διεύθυνση διάδοσης του φωτός. Κάτω από αυτές τις συνθήκες ο λόγος μορφής L/d μπορεί να γίνει πολύ μεγάλος (ελαττουμένου του d). Επειδή όμως $E = V/d$, για δεδομένη διαφορά δυναμικού, το πεδίο E στο εσω-

τερικό του κρυστάλλου μπορεί να γίνει πολύ μεγάλο. Το μόνο γεγονός το οποίο μπορεί να περιορίσει αυτή την αύξηση είναι τα φαινόμενα περίθλασης όταν η απόσταση των ηλεκτροδίων τείνει προς τα όρια της διαμέτρου της διαδιδόμενης δέσμης φωτός. Επίσης, επειδή γενικά το σύστημα των ηλεκτροδίων και του κρυστάλλου αποτελεί πυκνωτή ορισμένης χωρητικότητας, η ελάττωση της απόστασης των ηλεκτροδίων του επιδρά περιορίζοντας το εύρος των συχνοτήτων με τις οποίες μπορούμε να διαμορφώσουμε τη διερχόμενη δέσμη φωτός δηλ. την ταχύτητα απόκρισης του συστήματος. Προκειμένου τώρα να υπολογίσουμε τη μεταβολή $\Delta\phi$ στη φάση που προέρχεται από την εφαρμογή του ηλ. πεδίου κατά τη διάδοση του φωτός σε απόσταση L (για τον εγκάρσιο διαμορφωτή) θα έχουμε:

$$\begin{aligned}\Delta\phi = \phi - \phi_o &= \frac{2\pi}{\lambda}\Delta nL = \frac{2\pi}{\lambda}\left(\frac{1}{2}n^3 rE\right)L = \\ &= \frac{2\pi}{\lambda}\left(\frac{1}{2}n^3 r\frac{V}{d}L\right) \quad \Rightarrow \quad \Delta\phi = \frac{\pi n^3 rV}{\lambda}\left(\frac{L}{d}\right)\end{aligned} \tag{8.3.1.2}$$

Δηλ. βλέπουμε για την περίπτωση αυτή ότι η προκύπτουσα διαφορά φάσης $\Delta\phi$ εξαρτάται ευθέως από το λόγο μορφής L/d. Επομένως η εφαρμοζόμενη διαφορά δυναμικού V προκειμένου ν' αυξήσουμε την $\Delta\phi$ μπορεί να είναι πολύ μικρή, αρκεί να ελαττώσουμε απλά την απόσταση d των ηλεκτροδίων.

Συνθήκες διαμόρφωσης

Προκειμένου ν' αναλύσουμε θεωρητικά τον τρόπο λειτουργίας των διαμορφωτών πλάτους, φάσης, πόλωσης και συχνότητας των οπτικών ακτινοβολιών, θα πρέπει να ισχύουν οι εξής προϋποθέσεις:

α) Το εφαρμοζόμενο διαμορφώνον ηλ. πεδίο (που προκαλεί το Η/Ο φαινόμενο) σ' όλο το μήκος διάδοσης του φωτός να είναι ομογενές. Το γεγονός σημαίνει ότι οι δ.δ. στις διάφορες διευθύνσεις στο εσωτερικό των κρυστάλλων θα είναι σταθεροί με συνέπεια να είναι σταθερή η επιτυγχανόμενη διπλοθλαστικότητα $\Delta n = n_1 - n_2$ και κατά προέκταση η διαφορά φάσης $\Delta\phi = (2\pi/\lambda)\Delta nL$. Όπου L το μήκος διάδοσης και n_1, n_2 οι δ.δ. που σχετίζονται με τις ταχύτητες διάδοσης των ιδιοκαταστάσεων, που στις πλείστες των περιπτώσεων είναι γραμμικά πολωμένες.

β) Το διαμορφώνον ηλ. πεδίο – προκειμένου να συμβαίνουν τα προαναφερόμενα – θα είναι σταθερό (DC) ή αρμονικό χαμηλής συχνότητας ω_m σε σχέση με τη συχνότητα ω της προς διαμόρφωση δέσμης φωτός $(\omega_m \ll \omega)$ δηλ. ο χρόνος εναλλαγής $T_m = 2\pi/\omega_m$ του διαμορφώνοντος πεδίου, να είναι πολύ μεγαλύτερος του

χρόνου διάβασης (transit time) τ_d, που απαιτείται για να διαδοθεί το φως κατά μήκος L στο εσωτερικό του κρυστάλλου . Δηλ. $\omega_m \ll 2\pi/\tau_d$. Στην (§ 8.3.2) μελετούμε στοιχειωδώς τι ακριβώς συμβαίνει όταν κατά το χρονικό διάστημα τ_d συμβαίνουν εναλλαγές του διαμορφώνοντος ηλ. πεδίου. Δηλ. τη μεταβαλλόμενη χρονικά καθυστέρηση φάσης. Επίσης εξετάζουμε την περίπτωση των γεωμετρικών περιορισμών του πλάτους d και του μήκους L (το οποίο συμπίπτει με τη διεύθυνση διάδοσης του φωτός) του κρυστάλλου, προκειμένου στο εσωτερικό του να διαδίδονται κατά το δυνατόν επίπεδα μέτωπα κύματος προϋπόθεση που θέτει αυστηρά η θεωρία υπολογισμού των ιδιοκαταστάσεων και κατά προέκταση των n_1, n_2.

γ) Ανάλογα του τρόπου διαμόρφωσης, στο εσωτερικό των κρυστάλλων θα επιβάλλεται η διάδοση μιας ή δύο ιδιοκαταστάσεων πόλωσης (του προς διαμόρφωση φωτός). Κατά τα γνωστά όμως τα πεδία των ιδιοκαταστάσεων για τυχαία διεύθυνση διάδοσης στο εσωτερικό ενός κρυστάλλου, αφορούν τα διανύσματα των ηλ. μετατοπίσεων $\mathbf{D}_1, \mathbf{D}_2$ καθέτων πάντα προς τη διεύθυνση της κυματοκαθέτου $\mathbf{k}$. Η διεύθυνση αυτή όμως καθορίζει τη διεύθυνση διάδοσης των δύο μετώπων κύματος. Όχι όμως στις πλείστες των περιπτώσεων τη διεύθυνση διάδοσης της ενέργειας, που είναι αυτή του διανύσματος Poynting $\mathbf{S}$, κάθετα προς το οποίο είναι τα αντίστοιχα διανύσματα $\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2$ της έντασης των ηλ. πεδίων. Η μόνη περίπτωση για την οποία θα έχουμε $\mathbf{D}_1 \parallel \mathbf{E}_1$ και $\mathbf{D}_2 \parallel \mathbf{E}_2$ είναι αυτά να συμπίπτουν με τις διευθύνσεις των κυρίων αξόνων των ελλειπτικών εν γένει τομών των ελλειψοειδών των δ.δ. Άρα όταν οι ιδιοκαταστάσεις $\mathbf{D}_1, \mathbf{D}_2$ οι κάθετες στη διεύθυνση διάδοσης του φωτός $\mathbf{k}$ στο εσωτερικό των κρυστάλλων έχουν τις διευθύνσεις του μικρού και του μεγάλου άξονα της τομής του ελλειψ/δούς των δ.δ. της καθέτου στην $\mathbf{k}$, τότε θα ισχύουν οι σχέσεις $\mathbf{D}_1 \parallel \mathbf{E}_1$ και $\mathbf{D}_2 \parallel \mathbf{E}_2$ και τελικά στις σχέσεις μας αντικαθίστανται τα πεδία $\mathbf{D}_1, \mathbf{D}_2$ με τα $\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2$. Είναι αυτονόητο ότι θα επιδιώκουμε οι προαναφερόμενες συνθήκες να ισχύουν (για μια ορισμένη διεύθυνση διάδοσης του φωτός) πριν καθώς και μετά την εφαρμογή του διαμορφώνοντος ηλ. πεδίου.

Οι χρησιμοποιούμενοι σαν διαμορφωτές κρύσταλλοι

Οι συνήθως χρησιμοποιούμενοι κρύσταλλοι στην κατηγορία των ευμεγέθων διαμορφωτών είναι οι εξής: KDP (potassium dihydrogen phosphate) (KH_2PO_4), KD^*P (potassium dideuterium phosphate) (KD_2PO_4), ADP (Ammonium Dihydrogen Phosphate) ($NH_4\ H_2\ PO_4$), $LiNbO_3$ (Lithium Niobate), $LiTaO_3$ (Lithium Tantalate) και το GaAs (Gallium Arsenide). Τα στοιχεία της κρυσταλλικής τους συμμετρίας, οι ηλεκτροοπτικοί συντελεστές και οι κύριοι δ.δ. για τα μ.κ. στα οποία χρη-

σιμοποιούνται, δίνονται στο (Πίν. Ζ-4) του (ΠΑΡ/ΤΟΣ 4-Ζ) όπως και στα (Σχ. Ζ-1,2,3) του ιδίου παραρτήματος.

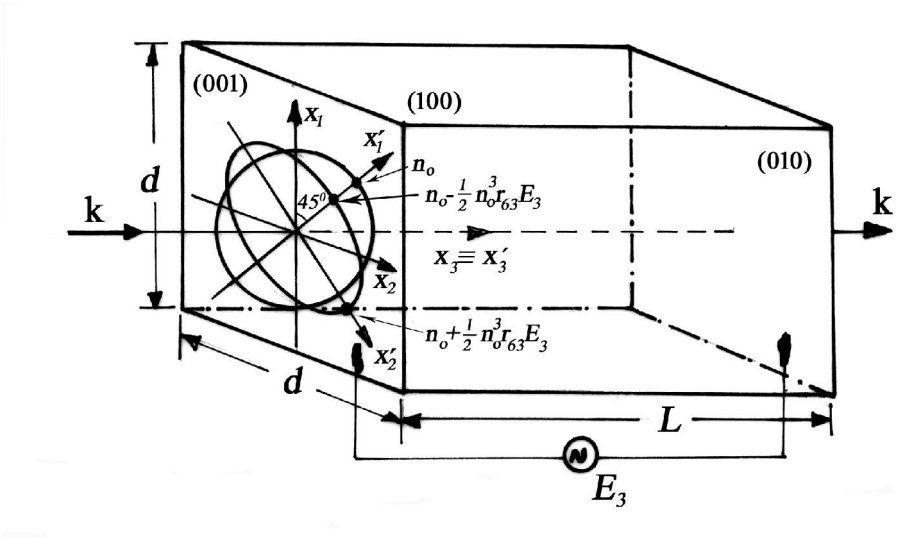
Θα χρησιμοποιήσουμε συγκεκριμένες τομές αυτών των κρυστάλλων ως προς το σ.σ. των κυρίων αξόνων x_1, x_2, x_3 σε μορφή πλακιδίων με παράλληλες έδρες διατομής συνήθως $d \times d$ και μήκους L. Παράλληλο μέτωπο κύματος ορισμένου μ.κ. θα προσπίπτει κάθετα στη διατομή και θα διανύει το μήκος L του κρυστάλλου. Τα ηλεκτρόδια μέσω των οποίων θα εφαρμόζουμε το διαμορφώνον πεδίο θα είναι διευθετημένα, έτσι ώστε το ηλ. πεδίο που δημιουργούν να είναι κατά τη διεύθυνση διάδοσης του φωτός (επιμήκης τρόπος) ή κάθετο σ' αυτήν (εγκάρσιος τρόπος) όπως σαφώς φαίνεται στα (Σχ. 8.3.1.1).

Προκειμένου να περιγράψουμε τους διαμορφωτές πλάτους, φάσης και πόλωσης, θα χρησιμοποιήσουμε τον κρύσταλλο του KDP (ή του συγγενείς του KD*P και ADP) προκειμένου να παραθέτουμε αριθμητικά στοιχεία. Χωρίς να σημαίνει ότι οι διαμορφώσεις αυτού του είδους δεν μπορούν να γίνουν και με τους υπόλοιπους προαναφερθέντες κρυστάλλους. Ο κρύσταλλος του KDP ανήκει στο τετραγωνικό σύστημα στην ομάδα συμμετρίας σημείου $\left(\bar{4}2\mathrm{m}\right)$. Διαθέτει ένα άξονα συμμετρίας τέταρτης τάξης, τρεις άξονες (ορθογώνιους μεταξύ τους) δεύτερης τάξης και δύο επίπεδα συμμετρίας κάθετα μεταξύ τους. Ο άξονα x_3 τέταρτης τάξης είναι ο οπτικός του άξονας. Είναι μονοάξονας αρνητικός κρύσταλλος (π.χ. για $\lambda = 0.6328\mu\mathrm{m}$ $n_1 = n_2 = n_o = 1.5074$ και $n_3 = n_e = 1.4669$). Το διαμορφώνον πεδίο θα εφαρμοστεί για τις τρεις προαναφερόμενες περιπτώσεις διαμόρφωσης κατά μήκος του άξονα τέταρτης τάξης δηλ. του x_3. Η εφαρμογή ενός τέτοιου πεδίου (στατικού ή εναλλασσόμενου) μετατρέπει τον κρύσταλλο από μονοάξονα σε διάξονα λόγω της δράσης του ηλεκτροοπτικού φαινόμενου. Κάτω από αυτές τις συνθήκες, διάδοση του φωτός θα επιβάλλουμε: α) κατά τη διεύθυνση εφαρμογής του πεδίου (επιμήκης τρόπος διαμόρφωσης) και β) Κάθετα προς αυτήν (εγκάρσιος τρόπος διαμόρφωσης).

Η πλήρης ανάλυση των δύο παραπάνω περιπτώσεων όσον αφορά τον προσδιορισμό των νέων διευθύνσεων πόλωσης των ιδιοκαταστάσεων $\mathbf{D}_1 \equiv \mathbf{E}_1$ και $\mathbf{D}_2 \equiv \mathbf{E}_2$ οι οποίες είναι γραμμικά πολωμένες , καθώς και του υπολογισμού των δ.δ. n_1', n_2' της προς διαμόρφωση δέσμης φωτός, δίνεται στο (ΠΑΡ/ΜΑ 4-Ζ, (σχ. Ζ-9 έως Ζ-20)).

α) Ιδιοκαταστάσεις και δ.δ. για τον επιμήκη τρόπο διαμόρφωσης.

Πριν την εφαρμογή του πεδίου κατά μήκος του άξονα x_3 στον κρύσταλλο KDP το ελλ. των δ.δ. είναι ελλειψοειδές εκ περιστροφής περί τον x_3 (αρνητικός κρύσταλλος $n_e < n_o$). Επομένως η τομή του στο επίπεδο x_1, x_2 όπως φαίνεται στο (Σχ. 8.3.1.2) θα είναι κύκλος ακτίνας n_o. Μετά την εφαρμογή όμως του ηλ. πεδίου E_3 (οποιουδήποτε μέτρου) κατά τη διεύθυνση του x_3 το αρχικό ελλειψοειδές καθίσταται τριαξονικό και ο κρύσταλλος του KDP από μονοάξονας διάξονας. Αποδει-



(Σχ. 8.3.1.2)

κνύεται ότι οι κύριοι άξονες του νέου ελλειψοειδούς είναι οι $x_1', x_2', x_3' \equiv x_3$ και οι κύριοι δ.δ. n_1', n_2', n_3' δίνονται από τις (σχ. Z-17,18,19) του προαναφερόμενου παραρτήματος:

$$n_1' = n_o - \frac{1}{2} n_o^3 r_{63} E_3 \quad , \quad n_2' = n_o + \frac{1}{2} n_o^3 r_{63} E_3 \quad , \quad n_3' = n_e \qquad (8.3.1.3)$$

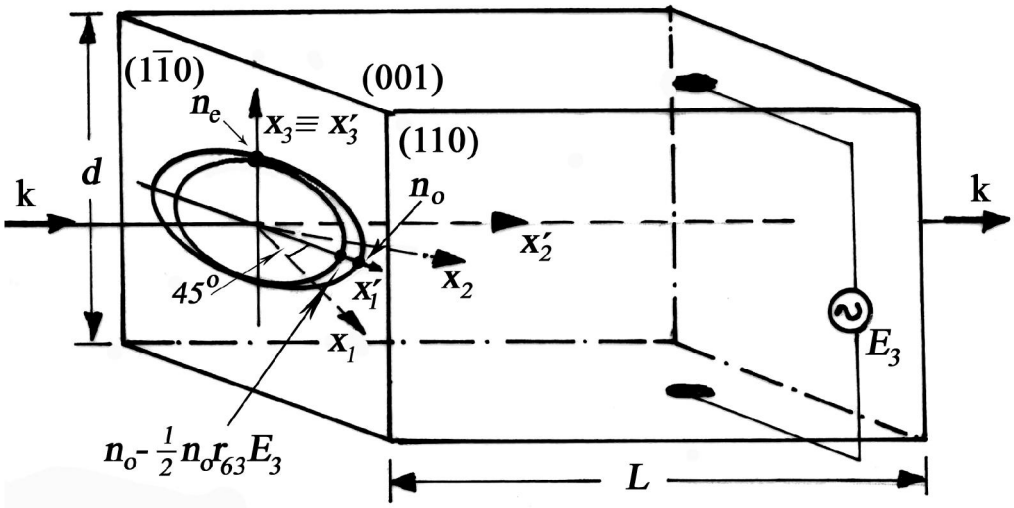
Επίσης για οποιαδήποτε τιμή της τάσης το σ.σ. x_1', x_2' είναι στραμμένο ως προς το αρχικό x_1, x_2 (δηλ. για $E_3 \neq 0$) κατά 45°. Οι διευθύνσεις των x_1', x_2' είναι αυτές των γραμμικά πολωμένων ιδιοκαταστάσεων με δ.δ. n_1', n_2' που δίνονται από τις (σχ. 8.3.1.3).

Έστω ότι στη διεύθυνση x_3 διαδίδεται ένα επίπεδο μέτωπο κύματος, φωτός από Laser He-Ne με $\lambda = 0.6328 \times 10^{-3}$ mm και στα άκρα του κρυστάλλου μήκους

$L = 10\text{mm}$ κατά την ίδια διεύθυνση εφαρμόζεται μια σταθερή διαφορά δυναμικού $V = 10\text{kV}$. Τότε το στατικό ηλ. πεδίο στο εσωτερικό του κρυστάλλου θα είναι: $E_3 = V/L = 10^6\ \text{V/m}$. Και η διπλοθλαστικότητα $\Delta n = n_2' - n_1' = n_o^3 r_{63} E_3$ του κρυστάλλου για $n_o = 1.5074$ και $r_{63} = 11 \times 10^{-12}\ \text{m/V}$ (Πίν. Ζ-4) του (ΠΑΡ/ΜΑΤΟΣ 4-Ζ) θα μας δώσει $\Delta n = 3.7 \times 10^{-5}$. Το μέγεθος αυτό αν και φαίνεται πολύ μικρό, μας δίνει μια διαφορά φάσης μεταξύ των δύο ιδιοκαταστάσεων (συνιστωσών των δύο ορθογωνίων μεταξύ τους διαδιδόμενων ηλεκτρικών πεδίων) για διάδοση στο μήκος L: $\Delta\phi = (2\pi/\lambda)\Delta n L = 1.18\pi$. Δηλ. μια σημαντική μεταβολή στο μέγεθος της διαφοράς φάσης, σε σχέση με τη μηδενική διαφορά τους στην είσοδο του κρυστάλλου.

β) Ιδιοκαταστάσεις και δ.δ. για τον εγκάρσιο τύπο διαμόρφωσης

Στην περίπτωση αυτή η διεύθυνση εφαρμογής του πεδίου είναι πάλι αυτή του άξονα x_3. Όμως η διεύθυνση διάδοσης του φωτός όπως φαίνεται στο (Σχ. 8.3.1.3) είναι κάθετη στην πρώτη. Οι τομές των ελλ. των δ.δ. στην είσοδο του κρυστάλλου πριν και μετά την εφαρμογή του πεδίου φαίνονται στο ίδιο σχήμα. Η τομή



(Σχ. 8.3.1.3)

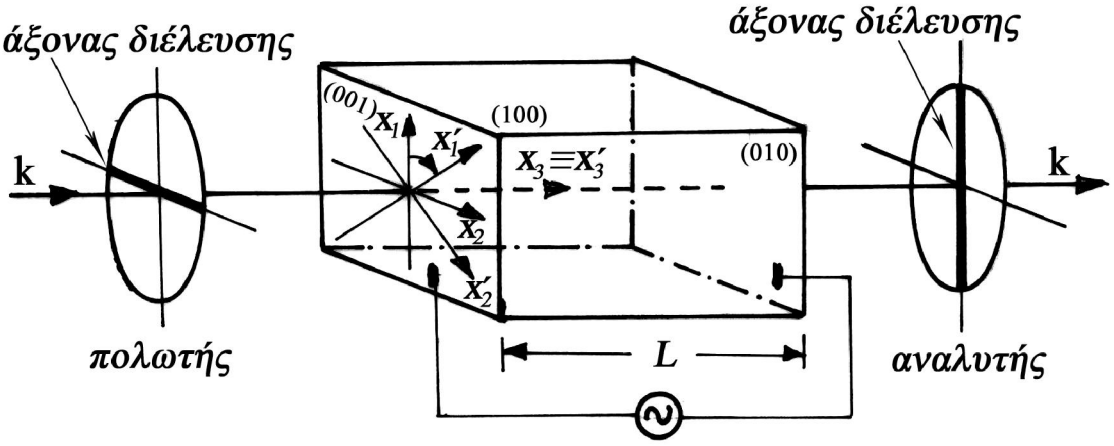
αυτή για $E_3 = 0$ θα είναι έλλειψη με δ.δ. n_e στη διεύθυνση του οπτικού άξονα x_3 και n_o σε διεύθυνση κάθετη προς αυτόν πάνω στην επιφάνεια του κρυστάλλου.

Εφόσον το πεδίο εφαρμόζεται πάλι κατά τη διεύθυνση του x_3 το νέο ελλ. των δ.δ. θα είναι ακριβώς το ίδιο με αυτό που περιγράψαμε προηγουμένως, με τους

κύριους δ.δ. n_1', n_2', n_3' να δίνεται από τις (σχ. 8.3.1.3). Η διάδοση του φωτός όμως τώρα είναι κάθετη προς το πεδίο E_3 και συγκεκριμένα προς τη διεύθυνση του άξονα x_2'. Οι δύο ιδιοκαταστάσεις κατά τον x_1' και $x_3' = x_3$ θα βρίσκονται πάνω στην τομή εισόδου του κρυστάλλου και οι δ.δ. τους θα είναι: $n_1' = n_o - \frac{1}{2} n_o^3 r_{63} E_3$ και $n_3' = n_3 = n_e$. Δηλ. κόβουμε εξ' αρχής τον κρύσταλλο κατά τα επίπεδα $(1\bar{1}0), (001), (110)$ προκειμένου μετά την εφαρμογή της τάσης κατά τον x_3 οι άξονες x_1', x_3' να βρίσκονται πάνω στο επίπεδο εισόδου του κρυστάλλου.

Διαμόρφωση πλάτους. Κρύσταλλος KDP. *Διεύθυνση εφαρμογής ηλ. πεδίου κατά την* $\langle 001 \rangle$. *Διεύθυνση διάδοσης φωτός κατά την* $\langle 001 \rangle$

Θεωρούμε ότι διαθέτουμε ένα κρύσταλλο KDP κομμένο ως προς το κρυσταλλογραφικό σ.σ. x_1, x_2, x_3 προκειμένου να τον χρησιμοποιήσουμε για διαμόρφωση πλάτους (έντασης) μιας δέσμης φωτός, κατά τον επιμήκη τύπο (Σχ. 8.3.1.4).



(Σχ. 8.3.1.4)

Αυτό σημαίνει ότι οι δύο απέναντι παράλληλες έδρες του που είναι κάθετες στον άξονα x_3 και στις οποίες θα εφαρμόσουμε τη διαμορφώνουσα τάση, θα είναι επικαλυμμένες με διαφανή ηλεκτρόδια επειδή στην ίδια διεύθυνση θα διαδώσουμε και την προς διαμόρφωση δέσμη του φωτός π.χ. μια δέσμη Laser. Με τη βοήθεια ενός πολωτή του οποίου ο άξονας διέλευσης είναι κατά τη διεύθυνση του x_2 επιτρέπουμε να πέσει στον κρύσταλλο γραμμικά πολωμένο φως. Αν η εφαρμοζόμενη διαφορά δυναμικού στον κρύσταλλο είναι $V = 0$ τότε και το πεδίο στο εσωτερικό του θα

είναι $E = V/d = 0$ και το φως θα διαδοθεί μέσα στον κρύσταλλο με το πεδίο του παράλληλο προς τον x_2 στη διεύθυνση του οπτικού του άξονα x_3. Δηλ. θα βγει από τον κρύσταλλο χωρίς ν' αλλάξει η κατάσταση πόλωσής του επειδή ο x_2 είναι διεύθυνση ιδιοκατάστασης. Αν μετά τον κρύσταλλο τοποθετήσουμε έναν δεύτερο πολωτή (αναλυτή) με τον άξονα διέλευσής του παράλληλο με τον άξονα x_1, τότε το φως μετά από αυτόν θ' αποκοπεί (συνθήκη κατάσβεσης).

Όταν όμως στα άκρα του κρυστάλλου εφαρμοστεί μια οποιαδήποτε διαφορά δυναμικού, τότε κατά τα γνωστά λόγω της δράσης του γραμμικού ηλεκτροοπτικού φαινόμενου οι άξονες x_1', x_2' του νέου ελλειψοειδούς στρέφονται κατά 45° (περί τον $x_3 \equiv x_3'$) ως προς το αρχικό σ.σ. x_1, x_2. Κάτω από αυτές τις συνθήκες, το προσπίπτον στην είσοδο γραμμικά πολωμένο φως, αναλύεται με ίσα πλάτη κατά τους άξονες των ιδιοκαταστάσεων x_1', x_2'. Τα πεδία $E_{x_1'}, E_{x_2'}$ στην είσοδο του κρυστάλλου θα έχουν διαφορά φάσης μηδέν. Όχι όμως και κατά την έξοδό τους από τον κρύσταλλο, επειδή στο εσωτερικό του τα $E_{x_1'}(\| D_{x_1'})$, $E_{x_2'}(\| D_{x_2'})$ διαδίδονται με διαφορετικές ταχύτητες φάσης που καθορίζονται από τους δ.δ. n_1', n_2'. Οι τελευταίοι κατά τα γνωστά δίνονται από τις (σχ. 8.3.1.3). Επομένως μπορούμε να υπολογίσουμε στην έξοδο του κρυστάλλου τη διαφορά φάσης Γ μεταξύ των δύο ορθογωνίων συνιστωσών $E_{x_1'}, E_{x_2'}$. Θα είναι:

$$\Gamma = \frac{2\pi}{\lambda}\left(n_2' - n_1'\right)L = \frac{2\pi}{\lambda} n_o^3 r_{63} E_3 L = \frac{2\pi}{\lambda} n_o^3 r_{63} \frac{V}{L} L \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \qquad \Gamma = \frac{2\pi}{\lambda} n_o^3 r_{63} V \tag{8.3.1.4}$$

όπου V η κατά τον $x_3 \equiv x_3'$ εφαρμοζόμενη διαφορά δυναμικού και λ το μ.κ. στο κενό. Αξιοσημείωτο είναι όπως βλέπουμε, το ότι η διαφορά φάσης Γ για τον επιμήκη τύπο διαμόρφωσης δεν εξαρτάται από το μήκος L του κρυστάλλου αλλά από την εφαρμοζόμενη διαφορά δυναμικού V.

Η κατάσταση πόλωσης του φωτός κατά την έξοδό του από τον κρύσταλλο θα εξαρτάται άμεσα από τη διαφορά φάσης Γ και είναι εν γένει ελλειπτικά πολωμένη. Στα επόμενα ορίζουμε ένα θεμελιώδες μέγεθος για τη θεωρία και την πρακτική των ηλεκτροοπτικών διαμορφωτών που ονομάζεται ***τάση του μισού μ.κ. (half wave voltage)*** V_π. Είναι η διαφορά δυναμικού που πρέπει να εφαρμοστεί μεταξύ των ηλεκτροδίων, έτσι ώστε η διαφορά φάσης μεταξύ των $E_{x_1'}, E_{x_2'}$ στην έξοδο του

κρυστάλλου να είναι ίση με π (rad). Επομένως για τη διάταξη που μελετάμε, αν στη (σχ. 8.3.1.4) θέσουμε $\Gamma = \pi$ βρίσκουμε:

$$V_\pi = \lambda / 2n_o^3 r_{63} \tag{8.3.1.5}$$

Είναι ανεξάρτητο από τις διαστάσεις του κρυστάλλου και αυξάνεται ανάλογα με το μ.κ. λ. Χρησιμοποιώντας τα στοιχεία από τον (Πίν. Z-4) του (ΠΑΡ/ΤΟΣ 4-Z) βρίσκουμε: $V_\pi(\mathrm{KDP}) = 8.39\mathrm{kV}$, $V_\pi(\mathrm{ADP}) = 11.5\mathrm{kV}$, $V_\pi(\mathrm{KD^*P}) = 3.87\mathrm{kV}$ για το μήκος κύματος $\lambda = 0.6328 \times 10^{-3}\,\mathrm{mm}$ του Laser He-Ne. Το $\mathrm{KD^*P}$ παρουσιάζει χαμηλό V_π λόγω της μεγάλης τιμής του r_{63}. Θα δούμε στα επόμενα ότι το V_π καθορίζει το βαθμό διαμόρφωσης και χρησιμοποιείται για τη σύγκριση μεταξύ των διαφόρων διαμορφωτών.

Στην περίπτωση που ο κρύσταλλος βρίσκεται υπό τάση, τότε χαρακτηρίζεται σαν ένα πλακίδιο καθυστέρησης που επιβάλει διαφορά φάσης Γ μεταξύ των συνιστωσών $E_{x_1'}, E_{x_2'}$ (του ταχύ και του βραδύ άξονα). Κάτω από αυτές τις συνθήκες, όταν βρίσκεται μεταξύ του πολωτή και του αναλυτή όπως φαίνεται στη διάταξη του (Σχ. 8.3.1.4), η διερχόμενη από το αναλυτή ένταση του φωτός I_o όπως αποδεικνύεται (βλ. ΠΑΡ/ΜΑ 5 (σχ. 5.75)) με τη βοήθεια του λογισμού Jones, δίνεται από τη σχέση:

$$\tau(V) = \frac{I_o}{I_i} = \sin^2\left(\frac{\Gamma}{2}\right) \tag{8.3.1.6}$$

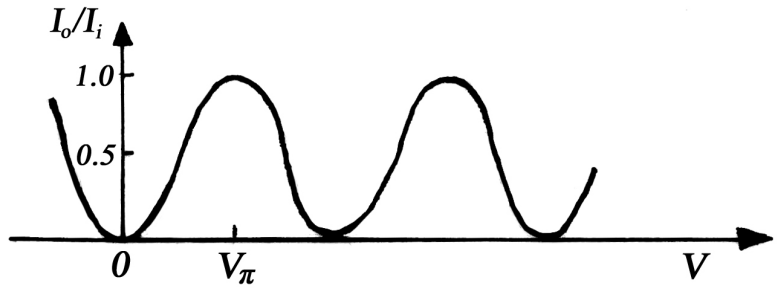
όπου $\tau(V)$ η διαπερατότητα συναρτήσει της τάσης V και I_i η προσπίπτουσα ένταση στην είσοδο του πολωτή. Η (σχ. 8.3.1.4) με τη βοήθεια της (σχ. 8.3.1.5) γίνεται:

$$\Gamma = \frac{\pi V}{V_\pi} \tag{8.3.1.7}$$

και η τελευταία αν αντικατασταθεί στη (σχ. 8.3.1.6) θα έχουμε:

$$\frac{I_o}{I_i} = \sin^2\left(\frac{\pi V}{2V_\pi}\right) \tag{8.3.1.8}$$

Στο (Σχ. 8.3.1.5) βλέπουμε τη γραφική παράσταση της I_o/I_i συναρτήσει του V, δηλ. σε συνάρτηση με την διαμορφώνουσα τάση V.



(Σχ. 8.3.1.5)

Ας υποθέσουμε τώρα ότι η εφαρμοζόμενη διαμορφώνουσα τάση είναι αρμονική δηλ. της μορφής:

$$V = V_m \cos \omega_m t \tag{8.3.1.9}$$

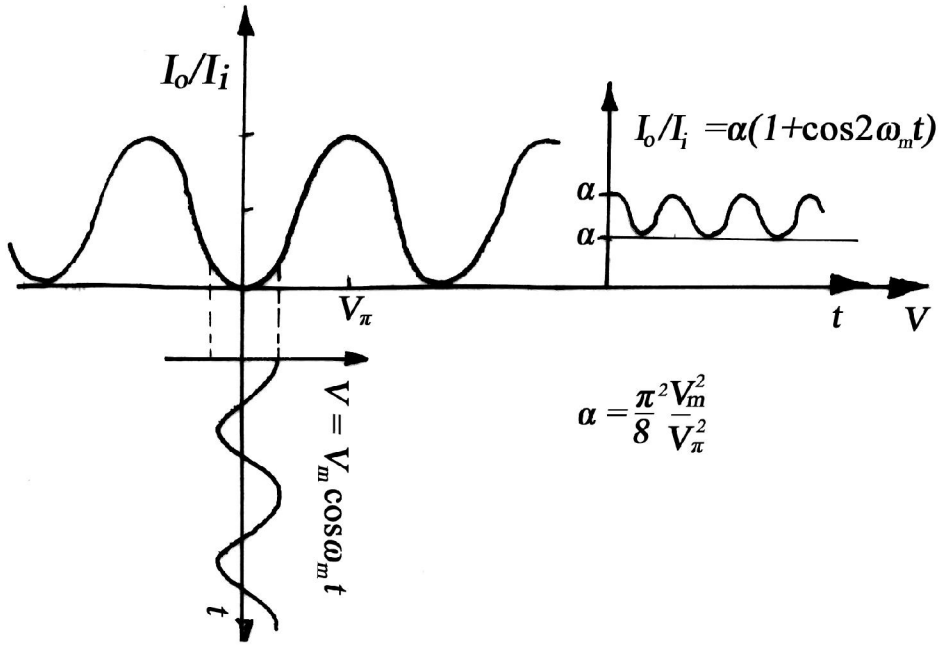
όπου V_m το πλάτος της και ω_m η διαμορφώνουσα συχνότητα. Επίσης υποθέτουμε ότι $V_m \ll V_\pi$. Τότε αντικαθιστώντας την στη (σχ. 8.3.1.8) θα έχουμε:

$$\begin{aligned} \frac{I_o}{I_i} &= \sin^2\left(\frac{\pi}{2}\frac{V_m}{V_\pi}\cos\omega_m t\right) \cong \frac{\pi^2}{4}\frac{V_m^2}{V_\pi^{\,2}}\cos^2\omega_m t \quad \Rightarrow \\ \frac{I_o}{I_i} &= \frac{\pi^2}{8}\frac{V_m^2}{V_\pi^{\,2}}\left(1+\cos 2\omega_m t\right) \end{aligned} \tag{8.3.1.10}$$

όπου χρησιμοποιήσαμε τις σχέσεις: $2\cos^2\omega_m t = 1+\cos 2\omega_m t$, $\sin x \cong x$ $\left(V_m \ll V_\pi\right)$. Εδώ ουσιαστικά το σημείο 'πόλωσης' του διαμορφωτή είναι το $V = 0$. Δηλ. οι διαμορφώνουσες τάσεις $V = V_m \cos\omega_m t$ είναι γύρω από αυτό το σημείο. Το τελικό αποτέλεσμα όμως δεν είναι το προσδοκώμενο. Πράγματι από τη (σχ. 8.3.1.10) βλέπουμε ότι αν ισχύει η συνθήκη αυτή, η διαμορφωμένη ένταση του φωτός I_o έχει διπλάσια συχνότητα από αυτήν της διαμορφώνουσας ω_m. Το γεγονός αυτό καταργεί τη γραμμικότητα μεταξύ σήματος εισόδου (διαμορφώνουσα τάση) και σήματος εξόδου (διαμορφωμένη ένταση του φωτός) στην έξοδο του διαμορφωτή. Επίσης αν όπως υποθέσαμε $V_m \ll V_\pi$ (προκειμένου $\sin x \cong x$) ο συντελεστής $\pi^2 V^2 / 8V_\pi^{\,2}$ του $\cos 2\omega_m t$ ο οποίος ονομάζεται ***βάθος διαμόρφωσης (depth of modulation)*** είναι πολύ μικρός. Δηλ. θα είναι ασθενές το σήμα στην έξοδο.

Προκειμένου να αρθούν αυτές οι δυσκολίες έτσι ώστε τα σήματα εισόδου και εξόδου από τον διαμορφωτή να έχουν γραμμική εξάρτηση, θα πρέπει να 'πολώσουμε' τον κρύσταλλο με μια μόνιμη ηλ. τάση έτσι ώστε για την τιμή αυτή ο λόγος I_o/I_i να είναι ίσος με $1/2$. Το σημείο αυτό όπως φαίνεται από το (Σχ. 8.3.1.5) βρίσκεται στο γραμμικό περίπου τμήμα της ημιτονικής καμπύλης $\left((I_o/I_i),V\right)$. Αυτό σημαίνει ότι μικρές μεταβολές της διαμορφώνουσας τάσης γύρω από το σημείο $I_o/I_i = 0.5$ οδηγεί (όπως θ' αποδείξουμε) σε αναλογικές μεταβολές της έντασης του φωτός στην έξοδο του διαμορφωτή.

Η τάση πόλωσης με την οποία η διαμορφώνουσα τάση θα έρθει σε επαλληλία είναι ίση με $V_{\pi/2}$ όπως φαίνεται από τα (Σχ. 8.3.1.5,6) και η τιμή της είναι αρκετά μεγάλη με βάση τις τιμές των V_π για τους διάφορους κρυστάλλους. Π.χ. για το KDP θα είναι $\cong 4.2\text{kV}$. Προκειμένου ν' αποφύγουμε την εφαρμογή μιας τέτοιου μεγέθου τάσης η 'πόλωση' του κρυστάλλου στο σημείο για το οποίο η διαπερατότητά του (για $V = 0$) θα είναι $I_o/I_i = 0.5$ γίνεται με τη βοήθεια ενός πλακιδίου καθυστέρησης $\lambda/4$. Το πλακίδιο τοποθετείται μετά τον κρύσταλλο, με τον ταχύ του άξονα παράλληλο με τον x_1' έτσι ώστε στην ταχεία ιδιοκατάσταση μετά την έξοδο να προστεθεί μια επί πλέον φάση ίση με $\pi/2$ (Σχ. 8.3.1.7). Κάτω από αυτές τις



(Σχ. 8.3.1.6)

συνθήκες η (σχ. 8.3.1.6) παίρνει τη μορφή:

$$\tau(V)=\frac{I_o}{I_i}=\sin^2\left[\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}+\Gamma\right)\right] \qquad (8.3.1.11)$$

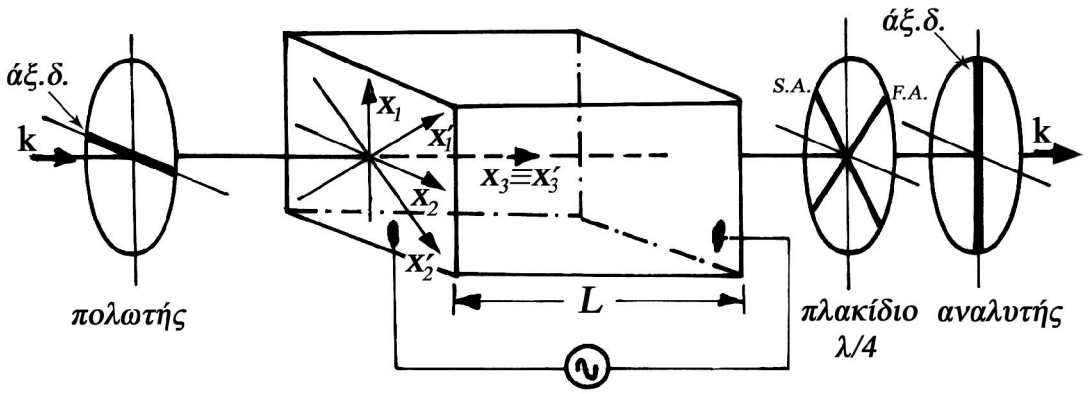
η οποία λόγω της τριγωνομετρικής σχέσης: $2\sin^2\left(\frac{\pi}{4}+x\right)=1+\sin x$ γίνεται:

$$\frac{I_o}{I_i}=\sin^2\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\Gamma}{2}\right)=\frac{1}{2}(1+\sin\Gamma)=\frac{1}{2}\left[1+\sin\frac{\pi V}{V_\pi}\right]=\frac{1}{2}\left[1+\sin\left(\frac{\pi V_m}{V_\pi}\cos\omega_m t\right)\right]$$

Και επειδή: $V_m/V_\pi \ll \Rightarrow \sin\left(\frac{\pi V_m}{V_\pi}\cos\omega_m t\right)\cong\frac{\pi V_m}{V_\pi}\cos\omega_m t$ οπότε:

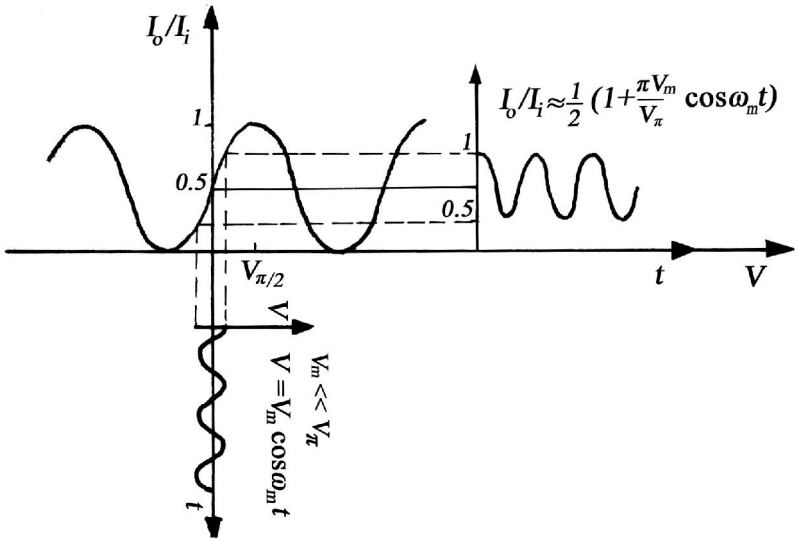
$$\frac{I_o}{I_i}=\frac{1}{2}\left(1+\frac{\pi V_m}{V_\pi}\cos\omega_m t\right) \qquad (8.3.1.12)$$

Από την τελευταία σχέση βλέπουμε ότι: α) Η διαμορφωμένη ένταση του φωτός I_o κατά την έξοδό της από τον αναλυτή, είναι ανάλογη της διαμορφώνουσας τάσης $V_m\cos\omega_m t$ β) Το βάθος διαμόρφωσης $\pi V_m/V_\pi$ είναι πολύ μεγαλύτερο από ότι αυτό της περίπτωσης της μηδενικής 'πόλωσης' $\pi^2 V_m{}^2/8V_\pi{}^2$.



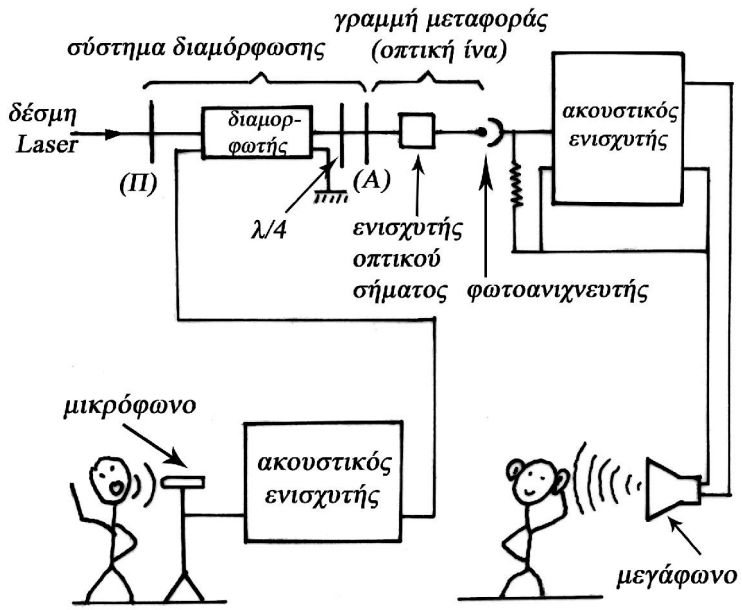
(Σχ. 8.3.1.7)

Στο (Σχ. 8.3.1.8α) γίνεται εμφανής η γραμμικότητα μεταξύ του σήματος εισόδου (της διαμορφώνουσας τάσης) και του σήματος εξόδου (ένταση του φωτός μετά τον αναλυτή).



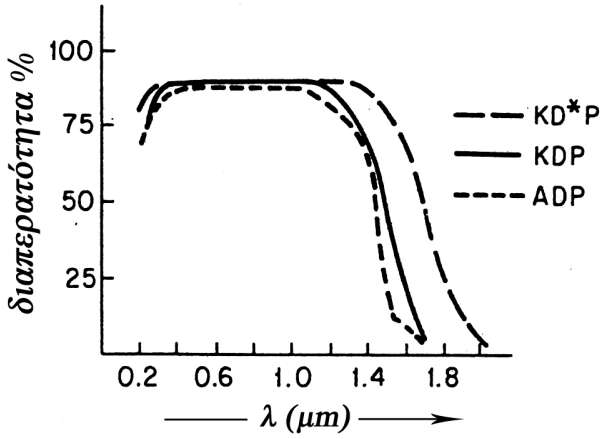
(Σχ. 8.3.1.8α)

Ηλεκτροοπτικοί διαμορφωτές πλάτους κατασκευάζονται από κρυστάλλους της ομάδας του KDP. Οι κρύσταλλοι αυτοί είναι διαφανείς και παράγονται με σχετικά εύκολο τρόπο από κρυστάλλωση διαλυμάτων των υλικών τους. Οι καμπύλες διαπερατότητας συναρτήσει του μ.κ. για τους KDP, KD*P, ADP φαίνονται στο (Σχ. 8.3.1.9). Ένας τυπικός διαμορφωτής πλάτους από KD*P για διαμόρφωση μιας δέσμης Laser He-Ne ($\lambda = 0.6328 \times 10^{-3}$ mm) και απόκλισης ~ 3mrad, είναι διαμέτρου περίπου 20mm και μήκους $L \cong 30$mm. Τα ηλεκτρόδιά του είναι από εξαχνωμένο



(Σχ. 8.3.1.8β)

άργυρο εκτός από την κεντρική του περιοχή που θα περάσει η δέσμη. Έχει $V_\pi \cong 3.87\text{kV}$ και λειτουργεί για διαμορφώνουσες συχνότητες: $0 < \omega_m < 25\text{MHz}$.

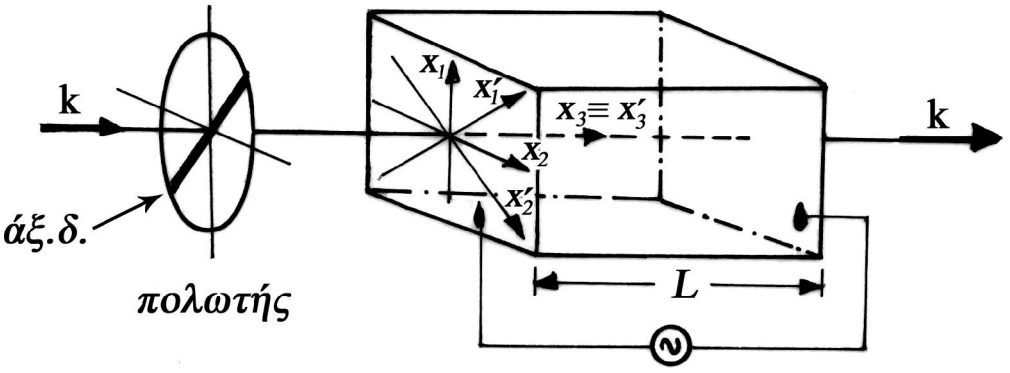


(Σχ. 8.3.1.9)

Στο (Σχ. 8.3.1.8β) γίνεται εμφανής η χρησιμοποίηση ενός Η/Ο διαμορφωτή πλάτους επιμήκους τύπου, για τη διαμόρφωση μιας δέσμης Laser μέσω ενός ακουστικού σήματος. Το διαμορφωμένο οπτικό σήμα μεταφέρεται σ' ένα τερματικό σταθμό μέσω μιας γραμμής μεταφοράς από οπτική ίνα. Κατόπιν μετατρέπεται σε ηλεκτρικό μέσω φωτοανιχνευτή και αποδιαμορφώνεται από κατάλληλο ηλεκτρονικό κύκλωμα, προκειμένου τελικά να γίνει η ακρόαση του.

Διαμόρφωση φάσης. Κρύσταλλος KDP.
Διεύθυνση εφαρμογής πεδίου κατά την $\langle 001 \rangle$.
Διεύθυνση διάδοσης του φωτός κατά την $\langle 001 \rangle$

Επιλέγουμε για διαμόρφωση της φάσης ενός επιπέδου μετώπου κύματος, τον κρύσταλλο του KDP στον επιμήκη τρόπο λειτουργίας του όπως φαίνεται στο (Σχ. 8.3.1.10). Με τη βοήθεια ενός πολωτή στην είσοδο, του κρυστάλλου ο οποίος βρίσκεται υπό τάση, πολώνουμε γραμμικά το φως έστω κατά μήκος του επαγόμενου λόγω του Η/Ο φαινόμενου άξονα x_1' ο οποίος είναι διαγώνιος ως προς τους άξονες x_1, x_2 (διευθύνσεις ιδιοκαταστάσεων για $V = 0$), δηλ. σε 45° σχετικά με το οριζόντιο επίπεδο. Όπως ήδη έχουμε αναφέρει, η διεύθυνση του x_1' είναι διεύθυνση ιδιοκατάστασης μετά την εφαρμογή του ηλ. πεδίου. Αν υποθέσουμε ότι η ένταση του ηλ. πεδίου στην είσοδο του κρυστάλλου είναι:



(Σχ. 8.3.1.10)

$$E_{x_1'}(0) = E_{x_1'o} \cos \omega t \qquad (8.3.1.13)$$

όπου $E_{x_1'o}$ το πλάτος του, τότε στην έξοδό του όπου $l = L$ θα είναι:

$E_{x_1'}(L) = E_{x_1'o} \cos(\omega t - kL)$ όπου: $kL = \frac{2\pi}{\lambda} n_1' L = \frac{2\pi}{\lambda}\left(n_o - \frac{1}{2} n_o^3 r_{63} E_3\right) L$ οπότε:

$$E_{x_1'}(L) = E_{x_1'o} \cos\left[\omega t - \frac{2\pi}{\lambda} n_o L + \frac{2\pi}{\lambda}\frac{1}{2} n_o^3 r_{63} E_3 L\right]$$

Όπου λ το μ.κ. του φωτός στο κενό. Και επειδή ο όρος $(2\pi/\lambda) n_o L$ είναι ένας σταθερός παράγοντας φάσης, μπορούμε στο πρόβλημά μας να τον παραλείψουμε. Τότε θα έχουμε για την ένταση του ηλ. πεδίου στην έξοδο του κρυστάλλου:

$$E_{x_1'}(L) = E_{x_1'o} \cos\left[\omega t + \frac{\pi}{\lambda} n_o^3 r_{63} E_3 L\right] = E_{x_1'o} \cos\left[\omega t + \frac{\pi}{\lambda} n_o^3 r_{63} V\right] \qquad (8.3.1.14)$$

όπου V η εφαρμοζόμενη στα άκρα του κρυστάλλου διαφορά δυναμικού ($E_3 L = V$). Για την περίπτωση που $V = V_m \sin \omega_m t$ τότε η (σχ. 8.3.1.14) γίνεται:

$$E_{x_1'}(L) = E_{x_1'o} \cos\left[\omega t + \frac{\pi}{\lambda} n_o^3 r_{63} V_m \sin \omega_m t\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad E_o = E_{io} \cos(\omega t + \delta \sin \omega_m t) \qquad (8.3.1.15)$$

όπου $E_{x_1'}(L) = E_o$ και $E_{x_1'o} = E_{io}$. Ο παράγοντας:

$$\delta = \frac{\pi n_o^3 r_{63} V_m}{\lambda} = \frac{\pi V_m}{V_\pi} \tag{8.3.1.16}$$

ονομάζεται ***δείκτης διαμόρφωσης φάσης (phase-modulation index)*** και χρησιμοποιείται για τη σύγκριση διαφόρων διαμορφωτών φάσης. Τελικά η (σχ. 8.3.1.15) μας δίνει το αποτέλεσμα της εφαρμογής ενός ημιτονικού διαμορφώνοντος ηλ. πεδίου συχνότητας ω_m, που μας οδηγεί στη διαμόρφωση φάσης της δέσμης φωτός συχνότητας ω μέσω του Η/Ο φαινόμενου.

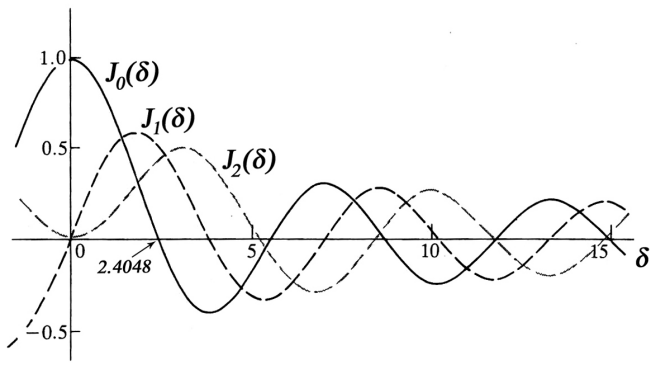
Το πεδίο E_o στην έξοδο του διαμορφωτή, μπορεί ν' αναλυθεί με τον εξής τρόπο. Με τη βοήθεια της τριγωνομετρικής σχέσης:
$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$ όπου: $\alpha = \omega t$ και $\beta = \delta\sin\omega_m t$ η (σχ. 8.3.1.15) γίνεται:

$$\begin{aligned} &E_{io}\cos(\omega t + \delta\sin\omega_m t) = \\ &= E_{io}\left[\cos\omega t\cos(\delta\sin\omega_m t) - \sin\omega t\sin(\delta\sin\omega_m t)\right] \end{aligned} \tag{8.3.1.17α}$$

Και επειδή:

$$\left.\begin{aligned} &\cos(\delta\sin\omega_m t) = J_o(\delta) + 2J_2(\delta)\cos 2\omega_m t + 2J_4(\delta)\cos 4\omega_m t + \cdots \\ &\sin(\delta\sin\omega_m t) = 2J_1(\delta)\sin\omega_m t + 2J_3(\delta)\sin 3\omega_m t + \cdots \end{aligned}\right\} \tag{8.3.1.17β}$$

όπου $J_o(\delta), J_1(\delta), J_2(\delta), J_3(\delta)\cdots$ οι συναρτήσεις Bessel συγκεκριμένων τάξεων, των οποίων οι γραφικές παραστάσεις φαίνονται στο (Σχ. 8.3.1.11).



(Σχ. 8.3.1.11)

Μετά την αντικατάσταση των (σχ. 8.3.1.17β) στην (σχ. 8.3.1.17α) και την εκτέλεση των πράξεων λαμβανομένων υπόψη των τριγωνομετρικών σχέσεων:

$2\cos\alpha\cos\beta = \cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)$, $2\sin\alpha\sin\beta = \cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)$

βρίσκουμε:

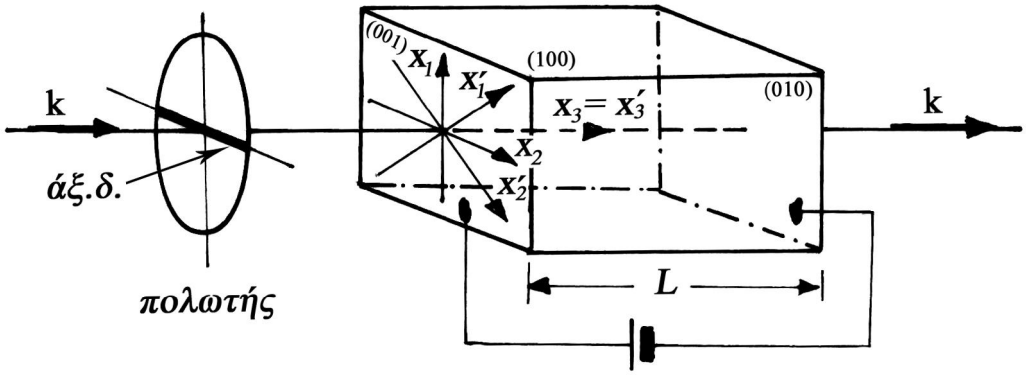
$$\begin{aligned} E_o = E_{io}\{ & J_o(\delta)\cos\omega t - J_1(\delta)\left[\cos(\omega-\omega_m)t-\cos(\omega+\omega_m)t\right]+ \\ & +J_2(\delta)\left[\cos(\omega-2\omega_m)t+\cos(\omega+2\omega_m)t\right]-J_3(\delta)\left[\cos(\omega-3\omega_m)t-\cos(\omega+3\omega_m)t\right]+ \\ & +J_4(\delta)\left[\cos(\omega-4\omega_m)t+\cos(\omega+4\omega_m)t\right]+\cdots\} \end{aligned} \tag{8.3.1.18}$$

Από την τελευταία σχέση βλέπουμε ότι η διαμορφωμένη δέσμη φωτός εκτός από το πεδίο στη συχνότητα ω πλάτους $E_{io}J_o(\delta)$, περιλαμβάνει και πλείστες όσες συνιστώσες στις συχνότητες $\omega+\omega_m, \omega-\omega_m$ πλάτους $E_{io}J_1(\delta)$, $\omega+2\omega_m, \omega-2\omega_m$ με πλάτος $E_{io}J_2(\delta)$ κ.τ.λ. Αν το δ έχει τέτοια τιμή ώστε $J_o(\delta)=0$ το οποίο συμβαίνει όταν $\delta = 2.4048$ τότε $E_{io}J_o(\delta)\cos\omega t = 0$ και όλη η ενέργεια του πεδίου μεταφέρεται στις αρμονικές.

Διαμόρφωση πόλωσης (δυναμική καθυστέρηση). Κρύσταλλος KDP. *Διεύθυνση εφαρμογής ηλ. πεδίου κατά την* $\langle$**001**$\rangle$. *Διεύθυνση διάδοσης του φωτός κατά την* $\langle$**001**$\rangle$

Στην προκειμένη περίπτωση σαν διαμόρφωση πόλωσης – για πλείστες των περιπτώσεων – δεν εννοούμε ότι θέλουμε να έχουμε στην έξοδο ενός κρυστάλλου μια χρονικά εξαρτώμενη συνεχή μεταβολή της κατάστασης πόλωσης, ενός προσπίπτοντος σ' αυτόν μετώπου κύματος, έστω γραμμικά πολωμένου. Αλλά επιθυμούμε – μέσω του Η/Ο φαινόμενου – (δηλ. με δυναμικό τρόπο) να γνωρίζουμε ποια αλλαγή από απόψεως πόλωσης μπορεί να προκαλέσει ο κρύσταλλος, σε μια εισερχόμενη σ' αυτόν κατάσταση πόλωσης. Αντί λοιπόν για διαμορφωτή πόλωσης, θα είναι πιο δόκιμος ο όρος: ***μετατροπέας κατάστασης πόλωσης (polarization state converter)*** ή ***δυναμικός καθυστερητής (dynamic retarder)***. Ο τελευταίος ορισμός μας θυμίζει άμεσα τα πλακίδια καθυστέρησης (retarders), τα οποία μελετήσαμε στην (§ 5.6). Μόνο που για τα τελευταία η επιβαλλόμενη διαφορά φάσης (καθυστέρηση) μεταξύ των δύο ορθογωνίων διαταραχών (ιδιοκαταστάσεων) των διαδιδόμενων στο εσωτερικό τους είναι σταθερή ***(passive retarders)***. Ενώ για τους προαναφερόμενους, η καθυστέρηση μπορεί να μεταβληθεί κατά βούληση μέσω της μεταβολής του διαμορφώνοντος ηλ. πεδίου (***dynamic retarders***).

Στα επόμενα θα μελετήσουμε τους δυναμικούς καθυστερητές, θεωρώντας ότι η επιβαλλόμενη στους κρυστάλλους διαφορά δυναμικού (διαμορφώνουσα τάση) είναι σταθερή. Θα θεωρήσουμε ότι η διάταξη αποτελείται από έναν κρύσταλλο KDP στον επιμήκη τρόπο λειτουργίας του (Σχ. 8.3.1.12). Ένας πολωτής στην είσο-



(Σχ.8.3.1.12)

δο του κρυστάλλου πολώνει γραμμικά το φως στη διεύθυνση του άξονα x_2. Κατά τα γνωστά η επιβαλλόμενη σταθερή διαφορά δυναμικού στα άκρα του κρυστάλλου στρέφει τους άξονες x_1, x_2 των ιδιοκαταστάσεων κατά 45° στις διευθύνσεις των x_1', x_2'. Επομένως το προσπίπτον γραμμικά πολωμένο φως αναλύεται ως προς αυτούς σε δύο ίσες κατά πλάτος ορθογώνιες συνιστώσες. Οι τελευταίες διαδίδονται στο εσωτερικό του κρυστάλλου με δ.δ. n_1', n_2' που οι τιμές τους δίνονται από τις (σχ. 8.3.1.3). Έστω:

$$E_{x_{1o}'} = E_o \cos \omega t \qquad E_{x_{2o}'} = E_o \cos \omega t \tag{8.3.1.19}$$

είναι τα ηλ. πεδία των διαταραχών στην είσοδο του κρυστάλλου (διαφορά φάσης ίση με μηδέν). Τότε στην έξοδό του – αφού διανύσουν απόσταση L στο εσωτερικό του – θα δίνονται από τις σχέσεις:

$$\left.\begin{aligned} E_{x_{1L}'} &= E_o \cos\left[\omega t - \frac{2\pi}{\lambda}\left(n_o - \frac{1}{2} n_o^3 r_{63} E_3\right) L\right] \\ E_{x_{2L}'} &= E_o \cos\left[\omega t - \frac{2\pi}{\lambda}\left(n_o + \frac{1}{2} n_o^3 r_{63} E_3\right) L\right] \end{aligned}\right\} \tag{8.3.1.20}$$

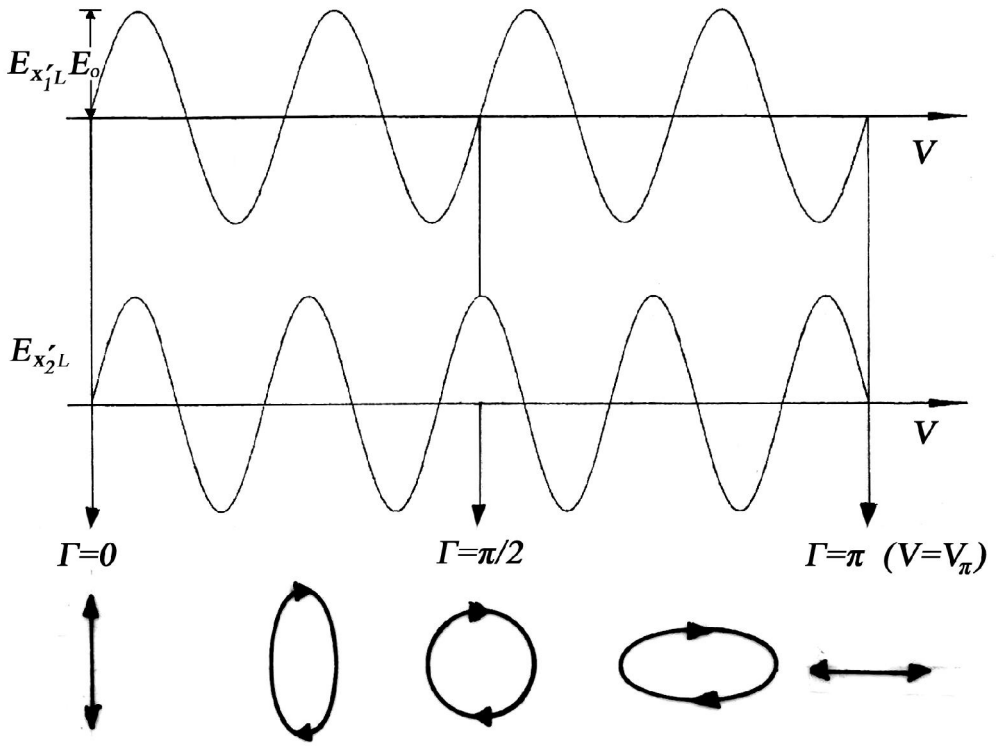
Δηλ. μεταξύ τους έχει επιβληθεί μια διαφορά φάσης:

$$\Gamma = \frac{2\pi}{\lambda} n_o^3 r_{63} E_3 L = \frac{2\pi}{\lambda} n_o^3 r_{63} V \qquad (8.3.1.21)$$

όπου V η σταθερή διαφορά δυναμικού μεταξύ των ηλεκτροδίων του κρυστάλλου. Επομένως οι (σχ. 8.3.1.20) μπορούν να γραφούν:

$$\left.\begin{aligned} E_{x'_{1L}} &= E_o \cos \omega t \\ E_{x'_{2L}} &= E_o \cos(\omega t - \Gamma) = E_o \cos\left(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda} n_o^3 r_{63} V\right) \end{aligned}\right\} \qquad (8.3.1.22)$$

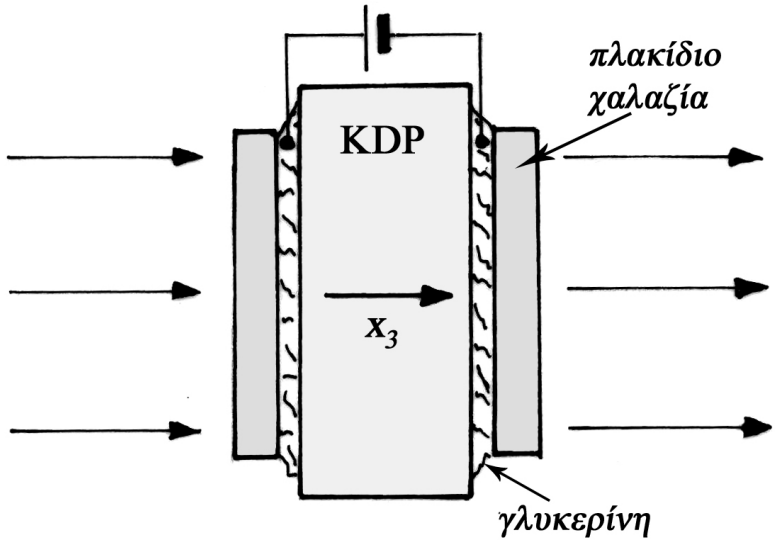
και η κατάσταση πόλωσης στην έξοδο του κρυστάλλου μπορεί να αλλάζει κατά βούληση εφαρμόζοντας κάθε φορά την κατάλληλη διαφορά δυναμικού V. Στο (Σχ. 8.3.1.13) μπορούμε να δούμε τα πλάτη και τις φάσεις των δύο συνιστωσών $E_{x'_{1L}}, E_{x'_{2L}}$ κατά την έξοδό τους από τον κρύσταλλο μήκους L όταν μεταβάλλεται με σταθερό τρόπο κάθε φορά η εφαρμοζόμενη διαφορά δυναμικού στα άκρα του. Για τάση $V = V_{\pi/2}$ η διαφορά φάσης μεταξύ των $E_{x'_{1L}}, E_{x'_{2L}}$ είναι $\pi/2$ οπότε για μ.κ. λ ο κρύσταλλος καθίσταται πλακίδιο καθυστέρησης $\lambda/4$. Για $V = V_\pi$ τότε $\Gamma = \pi$



(Σχ. 8.3.1.13)

και ο κρύσταλλος καθίσταται πλακίδιο $\lambda/2$. Π.χ. για το φως του Laser He-Ne με $\lambda = 0.6328\times10^{-3}\,\text{mm}$ ο κρύσταλλος KDP για τον οποίο $n_o = 1.5075$ και $r_{63} = 11\times10^{-12}\,\text{m/V}$, καθίσταται με βάση τη (σχ. 8.3.1.21) πλακίδιο $\lambda/4$ όταν η εφαρμοζόμενη τάση πάρει την τιμή $V \simeq 4.2\text{kV}$ και $\lambda/2$ όταν $V \simeq 8.4\text{kV}$. Επαναλαμβάνουμε και πάλι ότι για χρησιμοποίηση του κρυστάλλου με τον επιμήκη τρόπο διαμόρφωσης (διεύθυνση εφαρμογής του πεδίου και διεύθυνση διάδοσης του φωτός κατά την $\langle 001\rangle$) η επιβαλλομένη διαφορά φάσης Γ εξαρτάται μόνο από την εφαρμοζόμενη διαφορά δυναμικού V και όχι από το μήκος L του κρυστάλλου.

Περιγράφουμε στα επόμενα* ένα δυναμικό καθυστερητή $\lambda/4$, ο οποίος μπορεί να χρησιμοποιηθεί με ακρίβεια καλλίτερη του 5% για τις περιοχές μ.κ. από $220-260\mu\text{m}$. Αποτελείται (Σχ. 8.3.1.14) από ένα πλακίδιο KDP πάχους $\cong 5\text{mm}$ με τον κύριο άξονα x_3 κάθετο στις δύο απέναντι έδρες του (επιμήκης τρόπος λειτουργίας). Εναποθέτουμε σ' αυτές λεπτό στρώμα γλυκερίνης σαν έγκλεισμα μεταξύ τους και δύο επιπέδων πλακιδίων από Χαλαζία (Suprasil). Με δύο πολύ λεπτά σύρματα σε επαφή με τη γλυκερίνη (που συγκρατούνται ανάμεσα στο χαλαζία και τον κρύσταλλο), εφαρμόζουμε τη σταθερή διαφορά δυναμικού. Το στρώμα της γλυκερίνης βέβαια, παρά το ότι είναι διαφανές δεν είναι πολύ αγώγιμο. Όμως επειδή η γλυκερίνη περιέχει εγκλείσματα νερού, μέσα στα οποία είναι διαλυμένα φωσφορικά άλατα, με την εφαρμογή της σχετικά υψηλής διαφοράς δυναμικού τα άλατα ηλεκ-



(Σχ. 8.3.1.14)

* L. Velluz, M. Legrand and M. Crowjean: 'Optical Circular Dichroism' (Principles, Measurements and Applications) Academic Press Inc. N.Y. (1965).

τρολύονται. Σαν αποτέλεσμα θα έχουμε σ' όλο το εύρος του υμενίου την εμφάνιση ηλεκτρικών φορέων. Το γεγονός αυτό καθιστά το διαφανές υμένιο αγώγιμο με συνέπεια ν' αποτελεί ισοδυναμική επιφάνεια. Με αυτόν τον τρόπο το πεδίο $E = V/L$ σ' όλο το εύρος του κρυστάλλου είναι σταθερό. Αν η διαφορά δυναμικού $V[\text{Volts}]$ εξαρτάται από το λ[Å] μέσω της σχέσης:

$$V = 1350 + 1.06(\lambda - 2200) \qquad (8.3.1.23)$$

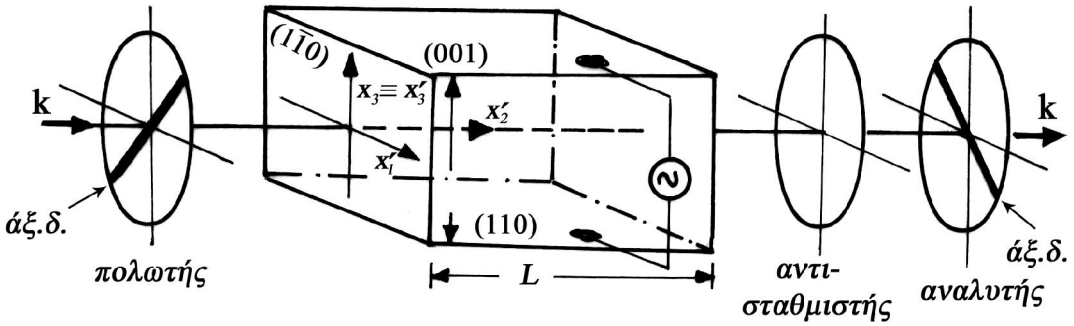
τότε το σύστημα συμπεριφέρεται για το εύρος των μ.κ. από 2200-6000Å σαν πλακίδιο καθυστέρησης $\lambda/4$.

Χρησιμοποίηση του κρυστάλλου KDP *για τον εγκάρσιο τύπο διαμόρφωσης του πλάτους του φωτός(έντασης)*

Από τα προηγούμενα γνωρίζουμε, ότι το κύριο γνώρισμα των διαμορφωτών επιμήκους τύπου είναι ότι η καθυστέρηση φάσης της μιας ή μεταξύ των δύο ιδιοκαταστάσεων – κατά τη διάδοσή τους στον κρύσταλλο – δεν εξαρτιόταν από τα γεωμετρικά χαρακτηριστικά του (μήκος και πλάτος) αλλά μόνο από την εφαρμοζόμενη διαφορά δυναμικού V στα άκρα του, κατά τη διεύθυνση διάδοσης του φωτός. Επίσης τα ηλεκτρόδια για την εφαρμογή της διαμορφώνουσας τάσης θα έπρεπε να είναι διαφανή επειδή η διάδοση του φωτός γινόταν προς την ίδια διεύθυνση. Θα δούμε στα επόμενα για τον εγκάρσιο τύπο διαμόρφωσης (βλ. Σχ. 8.3.1.1β) ότι θέμα διαφανών ηλεκτροδίων δεν τίθεται, επειδή η διαμορφώνουσα τάση εφαρμόζεται κάθετα προς τη διεύθυνση διάδοσης της προς διαμόρφωση δέσμης. Ένα άλλο όμως σημαντικό πλεονέκτημα του εγκάρσιου τύπου διαμόρφωσης είναι ότι η διαφορά φάσης μεταξύ των ιδιοκαταστάσεων δεν είναι μόνο ανάλογη της διαμορφώνουσας τάσης αλλά και του λόγου μορφής L/d. Δηλ. του μήκους L διάδοσης του φωτός στον κρύσταλλο προς το πλάτος d κατά μήκος του οποίου εφαρμόζεται η διαφορά δυναμικού. Επίσης προκύπτει ότι η τάση V_π του μισού μ.κ. είναι ανάλογη του d/L. Το γεγονός αυτό οδηγεί σε σημαντική ελάττωση του V_π και κατά προέκταση σε αύξηση του βάθους διαμόρφωσης.

Θα μελετήσουμε στα επόμενα στοιχειωδώς μόνο τις περιπτώσεις του εγκαρσίου τύπου διαμορφωτή πλάτους και φάσης επειδή για όλες τις μορφές διαμόρφωσης η λογική λειτουργίας τους είναι η ίδια. Στο (Σχ. 8.3.1.15) φαίνεται η διάταξη μέσω της οποίας λειτουργεί ένας τέτοιος διαμορφωτής. Μετά την εφαρμογή της ηλ. τάσης, οι διευθύνσεις x_1', x_2', x_3' των ιδιοκαταστάσεων διάδοσης του φω-

τός στο εσωτερικό του κρυστάλλου, εμφανίζονται όπως φαίνεται στο (Σχ. 8.3.1.3). Η θεωρητική τους ανάδειξη γίνεται στο (ΠΑΡ/ΜΑ 4-Z, (σχ. Z-10 ~ Z-20)). Επομέ-



(Σχ. 8.3.1.15)

νως το φως διαδίδεται κατά μήκος της διεύθυνσης $\langle 1\bar{1}0 \rangle$ και το διαμορφώνον πεδίο εφαρμόζεται κατά τη διεύθυνση $\langle 001 \rangle$. Κάτω από αυτές τις συνθήκες οι τιμές των n_1', n_3' για τις ιδιοκαταστάσεις τις παράλληλες προς τους άξονες x_1', x_3' και διαδιδόμενες κατά μήκος του x_2' θα δίνονται από τις (σχ. 8.3.1.3):

$$n_1' = n_o - \frac{1}{2} n_o^3 r_{63} E_3 \qquad n_3' = n_e \tag{8.3.1.24}$$

Το φως προσπίπτει στην εμπρός επιφάνεια του διαμορφωτή μέσω ενός πολωτή με τον άξονα διέλευσής του σε διαγώνια θέση σε σχέση με τους άξονες x_1', x_3'. Επομένως το προσπίπτον φως θ' αναλυθεί σε δύο ίσου πλάτους γραμμικά πολωμένες συνιστώσες ως προς τους x_1', x_3'. Πρόκειται για γραμμικά πολωμένες καταστάσεις, (ιδιοκαταστάσεις), οπότε μπορούν να διαδοθούν στο εσωτερικό του κρυστάλλου με δ.δ. n_1', n_3'. Επομένως η διαφορά φάσης Γ μετά τη διάδοσή τους κατά L όσο το μήκος του κρυστάλλου θα είναι:

$$\Gamma = \frac{2\pi}{\lambda}\left[\left(n_o - n_e\right) - \frac{1}{2} n_o^3 r_{63} E_3\right] L = \frac{2\pi}{\lambda}\left(n_o - n_e\right) L - \frac{\pi}{\lambda} n_o^3 r_{63} E_3 L$$

και επειδή $E_3 = V/d$ θα έχουμε:

$$\Gamma = \frac{2\pi}{\lambda}\left(n_o - n_e\right) L - \frac{\pi}{\lambda} n_o^3 r_{63} V \left(\frac{L}{d}\right) \tag{8.3.1.25}$$

Ο πρώτος όρος της (σχ. 8.3.1.25) αφορά τη φυσική διπλοθλαστικότητα του κρυστάλλου KDP (δηλ. για $V = 0$) και ο δεύτερος την επαγόμενη λόγω του γραμμικού Η/Ο φαινόμενου ($V \neq 0$). Βλέπουμε δηλ. ότι ακόμα και για $V = 0$ η κατάσταση πόλωσης στην έξοδο του κρυστάλλου μεταβάλλεται λόγω της φυσικής διπλοθλαστικότητας.

Και για τον εγκάρσιο τύπο διαμόρφωσης ορίζουμε την τάση του μισού μ.κ. σαν την τάση που απαιτείται προκειμένου να εισαχθεί διαφορά φάσης ίση με π. Επειδή η υπάρχουσα διαφορά φάσης (για $V = 0$) είναι ίση με $(2\pi/\lambda)(n_o - n_e)L$ θα

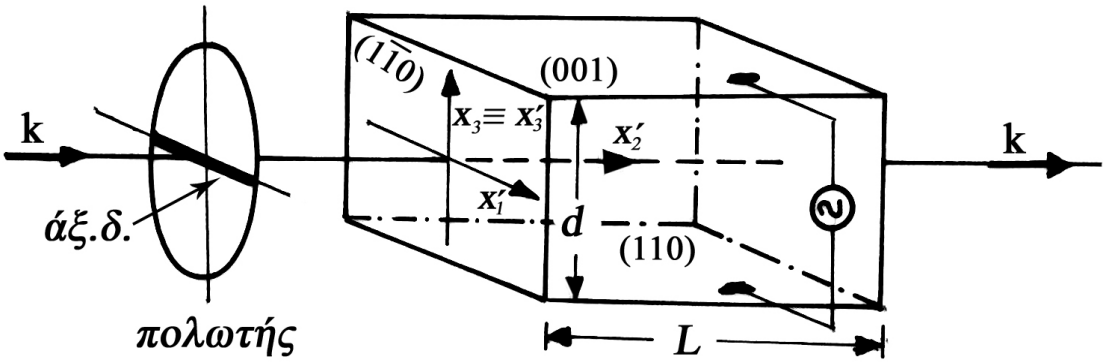
έχουμε: $$\frac{2\pi}{\lambda}(n_o - n_e)L + \pi = \frac{2\pi}{\lambda}\left[(n_o - n_e)L - \frac{1}{2}n_o^3 r_{63} V_\pi \left(\frac{L}{d}\right)\right].$$ Οπότε:

$$V_\pi = \frac{\lambda}{n_o^3 r_{63}}\left(\frac{d}{L}\right) \qquad (8.3.1.26)$$

όπου λ το μ.κ. του φωτός στο κενό και d/L το αντίστροφο του λόγου μορφής. Από τη σχέση αυτή διαπιστώνουμε ότι για τον εγκάρσιο τύπο διαμόρφωσης, η τάση του μισού μ.κ. V_π μπορεί να ελαττωθεί τα μέγιστα αν επιλέξουμε ο παράγοντας d/L να γίνει πολύ μικρός.

Προκειμένου τώρα να διαμορφώσουμε το φως κατά πλάτος με τον εγκάρσιο τύπο διαμορφωτή ακολουθούμε πανομοιότυπες διαδικασίες όπως με αυτόν του επιμήκους τύπου. Δηλ. μετά τον κρύσταλλο τοποθετούμε έναν αναλυτή σε θέση κατάσβεσης σε σχέση με τον πολωτή στην είσοδό του. Μεταξύ κρυστάλλου και αναλυτή τοποθετείται ένα αντισταθμιστικό πλακίδιο (π/χ. ένας αντισταθμιστής Soleil-Babinet). Ρυθμίζοντας τον αντισταθμιστή, είναι δυνατόν να πετύχουμε (λαμβάνοντας υπόψη μας και τη φυσική διπλοθλαστικότητα του κρυστάλλου), έτσι ώστε να επιβάλλουμε μια πρόσθετη διαφορά φάσης ίση με $\pi/2$, προκειμένου να 'πολώσουμε' τη λειτουργία του στη γραμμική περιοχή της καμπύλης $I_o/I_i = \tau(V)$. Το γεγονός αυτό θα έχει σαν αποτέλεσμα η ένταση του φωτός I_o από την έξοδο του αναλυτή να δίνεται από την (σχ. 8.3.1.12) όπου τώρα η V_π υπακούει στη (σχ. 8.2.1.26). Ένας τυπικός διαμορφωτής πλάτους από κρύσταλλο KD^*P πλάτους $d = 2.5\text{cm}$ και μήκους $L = 70\text{mm}$ χρειάζεται για τη λειτουργία του $V_\pi \simeq 275\text{V}$ στα $\lambda = 0.6328 \times 10^{-3}\,\text{mm}$. Τότε οι διαμορφώνουσες συχνότητες ω_m μπορεί να είναι μεταξύ: $0 < \omega_m < 100\text{MHz}$.

Στην περίπτωση διαμόρφωσης φάσης μέσω ενός εγκαρσίου τύπου διαμορφωτή, επιλέγουμε να διαδώσουμε (όπως και γι' αυτήν του επιμήκους τύπου) μια ιδιοκατάσταση του κρυστάλλου όπως φαίνεται στο (Σχ. 8.3.1.16). Η ιδιοκατάστα-



(Σχ. 8.3.1.16)

ση είναι γραμμικά πολωμένη με πεδίο παράλληλο με τον επαγόμενο άξονα x_1'. Επομένως στον κρύσταλλο (κάθετα στην τομή $\left(1\,\bar{1}0\right)$) προσπίπτει φως γραμμικά πολωμένο μέσω ενός πολωτή με τον άξονα διέλευσής του στην οριζόντια θέση. Κάτω από αυτές τις συνθήκες το φως στην έξοδο του κρυστάλλου μετά τη διάδοσή του σε απόσταση L στο εσωτερικό του, θα είναι γραμμικά πολωμένο και θα δίνεται από τη (σχ. 8.3.1.14): $E_{x_{1L}'} = E_{x_{1o}'} \cos\left[\omega t + \frac{\pi}{\lambda} n_o^3 r_{63} \mathrm{E}_3 L\right]$. Επειδή όμως για τον εγκάρσιο τύπο διαμόρφωσης $E_3 = V/d$ τότε η προηγούμενη σχέση γίνεται:

$$E_{x_{1L}'} = E_{x_{1o}'} \cos\left[\omega t + \frac{\pi}{\lambda} n_o^3 r_{63} V \left(\frac{L}{d}\right)\right] \qquad (8.3.1.27)$$

Αν τώρα $V = V_m \sin \omega_m t$ η διαμορφώνουσα τάση και $E_{x_{1L}'} = E_o$, $E_{x_{1o}'} = E_{io}$ τότε η (σχ. 8.3.1.27) γίνεται:

$$E_o = E_{io} \cos\left[\omega t + \delta \sin \omega_m t\right] \qquad (8.3.1.28)$$

όπου:

$$\delta = \frac{\pi}{\lambda} n_o^3 r_{63} V_m = \frac{\pi V_m}{V_\pi} \qquad (8.3.1.29)$$

με την V_π να δίνεται από τη (σχ. 8.3.1.26). Και εδώ επειδή V_π μπορεί να γίνει πολύ μικρή λόγω της επέμβασής μας στο λόγο d/L ο δείκτης διαμόρφωσης δ μπορεί να λάβει σημαντική τιμή. Η ανάλυση σε συνιστώσες διαφόρων συχνοτήτων της (σχ. 8.3.1.28) ακολουθεί ακριβώς την ίδια διαδικασία όπως και για τους διαμορφωτές του επιμήκους τύπου.

Ηλεκτροοπτικοί διαμορφωτές από κρυστάλλους: $LiNbO_3$ *και* $LiTaO_3$

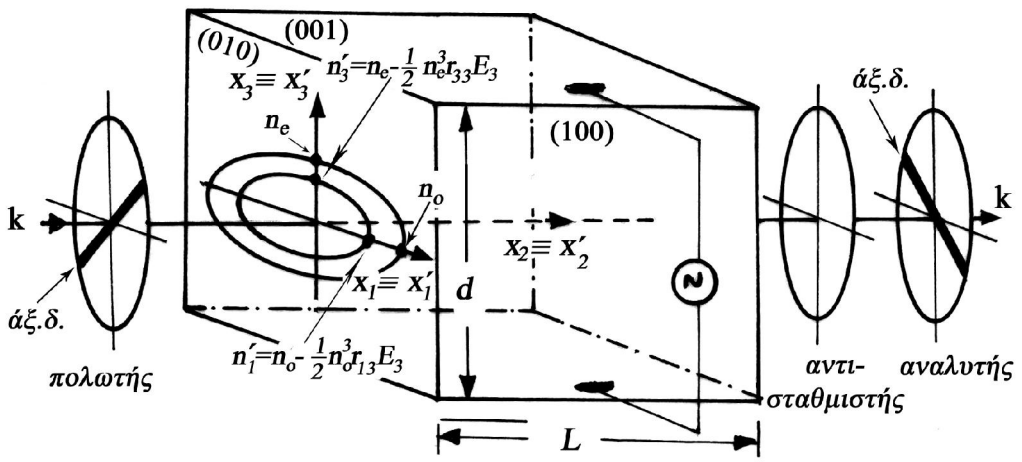
Οι κρύσταλλοι αυτοί χρησιμοποιούνται τα μέγιστα σαν ευμεγέθεις ηλεκτροοπτικοί διαμορφωτές καθώς και σαν διαμορφωτές στην τεχνολογία της Ολοκληρωμένης Οπτικής. Στα επόμενα θα περιγράψουμε τον κρύσταλλο του $LiNbO_3$ σαν διαμορφωτή στον εγκάρσιο τύπο λειτουργίας του. Το $LiNbO_3$ ανήκει στο τριγωνικό σύστημα στην τάξη (3m). Διαθέτει ένα άξονα τρίτης τάξης (οπτικός άξονας του κρυστάλλου) και τρία επίπεδα συμμετρίας. Είναι μονοάξονας αρνητικός κρύσταλλος και για $\lambda = 0.6328\mu m$, $n_1 = n_2 = n_o = 2.286$ και $n_3 = n_e = 2.2$. Το διαμορφώνον ηλεκτρικό πεδίο, εφαρμόζεται κατά μήκος του οπτικού του άξονα x_3. Η εφαρμογή ενός τέτοιου πεδίου (στατικού ή εναλλασσόμενου) διατηρεί τον κρύσταλλο μονοάξονα. Κάτω από αυτές τις συνθήκες θα επιβάλουμε τη διάδοση του φωτός κάθετα προς τη διεύθυνση εφαρμογής του πεδίου (εγκάρσιος τύπος διαμόρφωσης).

Η πλήρης ανάλυση αυτής της περίπτωσης, που αφορά τον προσδιορισμό των διευθύνσεων πόλωσης των ιδιοκαταστάσεων $\mathbf{D}_1 \equiv \mathbf{E}_1$ και $\mathbf{D}_2 \equiv \mathbf{E}_2$ οι οποίες είναι γραμμικά πολωμένες καθώς και του υπολογισμού των δ.δ. n_1', n_2' στη διεύθυνση διάδοσης της προς διαμόρφωση δέσμης φωτός δίνεται στο (ΠΑΡ/ΜΑ 4-Z, (σχ. Z-33 ~ Z-37)) και τα στοιχεία που αφορούν το $LiNbO_3$ και το $LiTaO_3$ στο (Σχ. Z-2) και τον (Πίν. Z-4) του ίδιου παραρτήματος.

Ιδιοκαταστάσεις και δ.δ. για τον εγκάρσιο τύπο διαμόρφωσης του $LiNbO_3$

Πριν την εφαρμογή του πεδίου κατά μήκος του άξονα x_3 στον κρύσταλλο του $LiNbO_3$ το ελλ. των δ.δ. είναι ελλειψοειδές εκ περιστροφής περί τον x_3 (αρνητικός κρύσταλλος). Επομένως η τομή του στο επίπεδο x_1, x_3 όπως φαίνεται στο (Σχ. 8.3.1.17) θα είναι μια έλλειψη με μεγάλο άξονα τον n_o και μικρό τον n_e. Μετά τηνεφαρμογή του πεδίου E_3 (οποιουδήποτε μέτρου), στατικού ή εναλλασσόμενου ό

πως αποδείξαμε, το ελλ. των δ.δ. παραμένει ελλειψοειδές εκ περιστροφής περί τον άξονα $x_3' \equiv x_3$. Επίσης $x_2' \equiv x_2$ και $x_1' \equiv x_1$. Δηλ. οι διευθύνσεις των ιδιοκαταστάσεων παραμένουν οι ίδιες με τις προηγούμενες, οι κύριοι όμως δ.δ. δίνονται όπως αποδεικνύεται από τις σχέσεις:



(Σχ. 8.3.1.17)

$$n_1' = n_o - \frac{1}{2} n_o^3 r_{13} E_3 \quad , \quad n_2' = n_o - \frac{1}{2} n_o^3 r_{13} E_3 \quad , \quad n_3' = n_e - \frac{1}{2} n_e^3 r_{33} E_3 \qquad (8.3.1.30)$$

όπου r_{13}, r_{33} οι δύο από τους τέσσερεις συνολικά ηλεκτροοπτικοί συντελεστές του $LiNbO_3$ που είναι διάφοροι του μηδενός.

Διαμόρφωση πλάτους από τον κρύσταλλο του $LiNbO_3$ *(εγκάρσιος τύπος)*

Ας υποθέσουμε ότι μέσω ενός πολωτή (Σχ. 8.3.1.17), το φως πέφτει στον κρύσταλλο γραμμικά πολωμένο στη διαγώνιο μεταξύ των αξόνων x_1', x_3'. Τότε η διαφορά φάσης μεταξύ των ίσου πλάτους διαταραχών της έντασης του ηλ. πεδίου του φωτός μετά τη διάνυση του μήκους L του κρυστάλλου θα είναι:

$$\begin{aligned} \Gamma &= \frac{2\pi}{\lambda}\left(n_3' - n_1'\right) L = \frac{2\pi}{\lambda}\left(n_e - n_o\right) L - \frac{2\pi}{\lambda} \frac{\left(n_e^3 r_{33} - n_o^3 r_{13}\right)}{2} E_3 L \\ &= \frac{2\pi}{\lambda}\left(n_e - n_o\right) L - \frac{\pi}{\lambda}\left(n_e^3 r_{33} - n_o^3 r_{13}\right) V\left(\frac{L}{d}\right) \end{aligned} \qquad (8.3.1.31)$$

επειδή $E_3 = V/d$. Όπου $(2\pi/\lambda)(n_e - n_o)L$ η επιβαλλομένη διαφορά φάσης λόγω της φυσικής διπλοθλαστικότητας του κρυστάλλου (δηλ. για $V = 0$). Από την προηγούμενη σχέση θα έχουμε: $\frac{2\pi}{\lambda}(n_e - n_o)L + \pi = \frac{2\pi}{\lambda}\left[(n_e - n_o)L - \frac{1}{2}(n_e^3 r_{33} - n_o^3 r_{13})V_\pi\left(\frac{L}{d}\right)\right]$ οπότε:

$$V_\pi = \frac{\lambda}{(n_e^3 r_{33} - n_o^3 r_{13})}\left(\frac{d}{L}\right) \qquad (8.3.1.32)$$

Προκειμένου η διάταξη να χρησιμοποιηθεί σαν διαμορφωτής πλάτους, θα πρέπει μετά τον κρύσταλλο να παρεμβάλλουμε έναν αναλυτή σε θέση κατάσβεσης ως προς τον πολωτή στην είσοδό του (Σχ. 8.3.1.17). Μεταξύ του αναλυτή και του κρυστάλλου πρέπει να τοποθετηθεί επίσης ένας αντισταθμιστής (π.χ. Soleil-Babinet) προκειμένου σε συνδυασμό με την φυσική διπλοθλαστικότητα του κρυστάλλου να εισαχθεί η επιπλέον διαφορά φάσης $\pi/2$, έτσι ώστε ο διαμορφωτής να 'πολωθεί' σε γραμμική περιοχή. Τότε η διαμορφωμένη ένταση του φωτός I_o από την έξοδο του αναλυτή θα δίνεται από τη (σχ. 8.3.1.12) όπου τώρα η τάση V_π του μισού μ.κ. θα δίνεται από τη (σχ. 8.3.1.32). Μια τυπική τιμή της V_π για $d = 0.5\text{mm}$, $L = 10\text{mm}$, $n_o = 2.286$, $n_e = 2.2$, $r_{13} = 9.6\times10^{-12}\,\text{m/V}$, $r_{33} = 30.9\times10^{-12}\,\text{m/V}$ και $\lambda = 0.6328\mu\text{m}$ είναι η $V_\pi \simeq 147\text{V}$.

Διαμόρφωση φάσης από τον κρύσταλλου του $LiNbO_3$ *(εγκάρσιος τύπος)*

Γι' αυτόν τον τύπο διαμόρφωσης θα χρειαστούμε από τη διάταξη του (Σχ. 8.3.1.17), μόνο τον πολωτή και τον κρύσταλλο. Τώρα το φως θα πέφτει στον κρύσταλλο γραμμικά πολωμένο κατά τη διεύθυνση του x_3' και θα διαδίδεται στη διεύθυνση του x_2'. Η διαμορφώνουσα τάση θα εφαρμόζεται στη διεύθυνση του $x_3 \equiv x_3'$. Τότε η καθυστέρηση φάσης Γ για διάδοση στο μήκος L του κρυστάλλου θα δίνεται από τη σχέση:

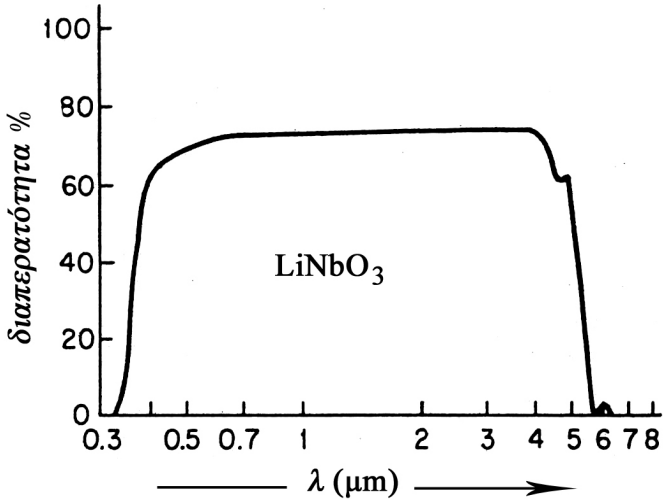
$$\Gamma = \frac{2\pi}{\lambda}n_3' L = \frac{2\pi}{\lambda}\left[n_e - \frac{1}{2}n_e^3 r_{33}E_3\right]L = \frac{2\pi}{\lambda}n_e L - \frac{\pi}{\lambda}n_e^3 r_{33}V\left(\frac{L}{d}\right) \qquad (8.3.1.33)$$

όπου $E_3 = V/d$ και λ το μ.κ. του φωτός στο κενό. Και από αυτήν: $\frac{2\pi}{\lambda}n_e L + \pi =$

$= \frac{2\pi}{\lambda}n_e L - \frac{\pi}{\lambda}n_e^3 r_{33}V_\pi\left(\frac{L}{d}\right)$ θα έχουμε:

$$V_\pi = \frac{\lambda}{n_e^3 r_{33}} \left(\frac{d}{L} \right) \tag{8.3.1.34}$$

Αν $V = V_m \sin \omega_m t$, τότε το διαμορφωμένο κατά φάση πλάτος E_o του πεδίου του φωτός στην έξοδο του κρυστάλλου θα δίνεται από την (σχ. 8.3.1.15), όπου $\delta = \pi V_m / V_\pi$ και το V_π δίνεται από τη (σχ. 8.3.1.34). Για $d = 0.5\text{mm}, L = 10\text{mm}$,



(Σχ. 8.3.1.18)

$\lambda = 0.6328\mu\text{m}$, $n_e = 2.2$ και $r_{33} = 30.9 \times 10^{-12}\ \text{m/V}$ θα έχουμε: $V_\pi \simeq 96\text{V}$. Συγκρίνοντας με την τιμή $V_\pi \simeq 147\text{V}$ της διαμόρφωσης κατά πλάτος, βλέπουμε ότι η διαμόρφωση κατά φάση για κρύσταλλο $LiNbO_3$ με τον ίδιο λόγο μορφής (L/d) μπορεί να επιτευχθεί με αρκετά μικρότερη τάση του μισού μ.κ. οπότε επιτυγχάνεται και μεγαλύτερο βάθος διαμόρφωσης δ. Το $LiNbO_3$ είναι διαφανές υλικό για μεγάλο εύρος συχνοτήτων μεταξύ των 0.4 και 5μm όπως φαίνεται στην καμπύλη διαπερατότητας του (Σχ. 8.3.1.18).

Ηλεκτροοπτικοί διαμορφωτές από κρυστάλλους GaAs

Η ομάδα των κρυστάλλων $GaAs, CdTe, GaP, \beta\text{-}ZnS$ ανήκει στο κυβικό σύστημα και συγκεκριμένα στην ομάδα συμμετρίας $(\bar{4}3\text{m})$. Κύριο χαρακτηριστικό τους είναι ότι χρησιμοποιούνται για διαμόρφωση ακτινοβολιών στην εγγύς υπέρυθρη περιοχή του Η/Μ φάσματος (1-30μm). Θα μελετήσουμε στοιχειωδώς τον κρύσταλλο του GaAs (Gallium Arsenide). Πιο συγκεκριμένα θα θεωρήσουμε τη διά-

δοση της ακτινοβολίας και την εφαρμογή του διαμορφώνοντος πεδίου κατά μία από τις κύριες διευθύνσεις (έστω την x_3) δεδομένου ότι οι άλλες δύο x_1, x_2 είναι ισοδύναμες. Τα δεδομένα όσον αφορά το δ.δ. και τον ηλεκτροοπτικό συντελεστή για $\lambda = 1.15\mu\text{m}$, καθώς και τα στοιχεία συμμετρίας του δίνονται στο (ΠΑΡ/ΜΑ 4-Z , (Πίν. Z-4) και (Σχ. Z-3)).

Για εφαρμογή του διαμορφώνοντος πεδίου κατά τη διεύθυνση του x_3 και διάδοση της ακτινοβολίας στην ίδια διεύθυνση, μας ενδιαφέρει ο προσδιορισμός των διευθύνσεων των ιδιοκαταστάσεων καθώς και δ.δ. n_1', n_2', n_3' λόγω της δράσης του γραμμικού Η/Ο φαινόμενου. Χωρίς την εφαρμογή του ηλεκτρικού πεδίου, το ελλ. των δ.δ. είναι σφαίρα (κυβικό σύστημα) και στο κύριο σ.σ. x_1, x_2, x_3 εκφράζεται ως εξής:

$$\left(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2\right) \Big/ n^2 = 1 \tag{8.3.1.35}$$

Από τη (σχ. Z-8) του προαναφερόμενου παραρτήματος για $n_1 = n_2 = n_3 = n$ και $E_1 = E_2 = 0$, $E_3 \neq 0$ προκύπτει (δηλ. μετά την εφαρμογή του πεδίου) για το νέο ελλ. των δ.δ. εκφρασμένο στο σ.σ. x_1, x_2, x_3:

$$\left.\begin{aligned} &\left(\frac{1}{n^2} + r_{13}E_3\right)x_1^2 + \left(\frac{1}{n^2} + r_{23}E_3\right)x_2^2 + \left(\frac{1}{n^2} + r_{33}E_3\right)x_3^2 + \\ &\qquad + 2r_{43}E_3x_2x_3 + 2r_{53}E_3x_1x_3 + 2r_{63}E_3x_1x_2 = 1 \end{aligned}\right\} \tag{8.3.1.36}$$

Τελικά λόγω της συμμετρίας του πίνακα των ηλεκτροοπτικών συντελεστών η προηγούμενη σχέση γίνεται:

$$\frac{x_1^2}{n^2} + \frac{x_2^2}{n^2} + \frac{x_3^2}{n^2} + 2r_{41}E_3x_1x_2 = 1 \tag{8.3.1.37}$$

Παρατηρούμε ότι το νέο ελλ. των δ.δ. έχει μεταβληθεί κατά το σχήμα του, το μέγεθός του και τον προσανατολισμό του. Για τον προσδιορισμό των ιδιοκαταστάσεων πόλωσης του νέου ελλειψοειδούς καθώς και των αντιστοίχων δ.δ. n_1', n_2', n_3' η διαδικασία συνίσταται κατά τα γνωστά στην εξάλειψη του όρου του γινομένου x_1x_2. Το τελευταίο επιτυγχάνεται μέσω μετασχηματισμού του συστήματος x_1, x_2, x_3 στο νέο

x_1', x_2', x_3' όπου τώρα οι διευθύνσεις αυτές είναι οι κύριες. Επειδή ο προς εξάλειψη όρος είναι ο $x_1 x_2$, τότε η στροφή θ μεταξύ των δύο συστημάτων συντεταγμένων θα γίνει περί τον x_3 κατά τη θετική φορά των δεικτών του ρολογιού, οπότε θα έχουμε τις σχέσεις μετασχηματισμού:

$$x_1 = \cos\theta x_1' - \sin\theta x_2' \ , \ \ x_2 = \sin\theta x_1' + \chi \cos\theta x_2' \ , x_3 = x_3' \qquad (8.3.1.38)$$

Η αντικατάστασή τους στη (σχ. 8.3.1.37) μας οδηγεί στην:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{x_1'^2}{n^2} + \frac{x_2'^2}{n^2} + \frac{x_3'^2}{n^2} + r_{41}E_3 \sin 2\theta x_1'^2 - r_{41}E_3 \sin 2\theta x_2'^2 + \\ &\qquad + 2r_{41}E_3\left(\cos^2\theta - \sin^2\theta\right)x_1'x_2' = 1 \end{aligned}\right\} \qquad (8.3.1.39)$$

Και για να είναι ο όρος $x_1 x_2 = 0$, θα πρέπει: $\cos^2\theta - \sin^2\theta = \cos 2\theta = 0 \Rightarrow \theta = 45^o$. Οπότε η (σχ. 8.3.1.39) γίνεται:

$$\left(\frac{1}{n^2} + r_{41}E_3\right)x_1'^2 + \left(\frac{1}{n^2} - r_{41}E_3\right)x_2'^2 + \frac{x_3'^2}{n^2} = 1 \qquad (8.3.1.40)$$

που είναι η εξίσωση του ελλ. των δ.δ. στο σύστημα x_1', x_2', x_3' και είναι της μορφής:

$$\frac{x_1'^2}{n_1'^2} + \frac{x_2'^2}{n_2'^2} + \frac{x_3'^2}{n_3'^2} = 1 \qquad (8.3.1.41)$$

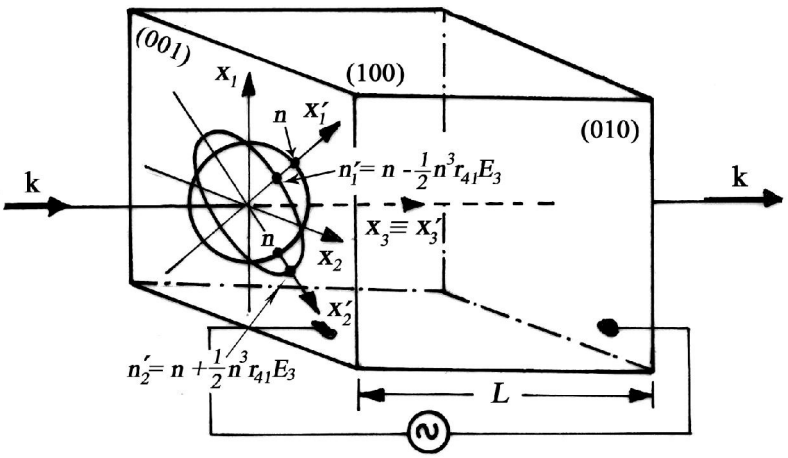
Επομένως: $$\frac{1}{n_1'^2} = \frac{1}{n^2} + r_{41}E_3 \ , \ \ \frac{1}{n_2'^2} = \frac{1}{n^2} - r_{41}E_3 \ , \ \ \frac{1}{n_3'^2} = \frac{1}{n^2} \qquad (8.3.1.42)$$

Και επειδή: $n_1' \simeq n_2' \simeq n_3' \simeq n$ θα έχουμε:

$$n_1' = n - (1/2)n^3 r_{41}E_3 \ \ , \ n_2' = n + (1/2)n^3 r_{41}E_3 \ \ , \ n_3' = n \qquad (8.3.1.43)$$

Δηλ. μετά την επίδραση του διαμορφώνοντος ηλ. πεδίου ο κρύσταλλος μετατράπηκε σε διάξονα.

Θα υιοθετήσουμε – όπως ήδη αναφέραμε – τον επιμήκη τρόπο διαμόρφωσης προκειμένου να χρησιμοποιήσουμε τον κρύσταλλο του GaAs σαν διαμορφωτή πλάτους και φάσης. Σαν επιφάνεια εισόδου χρησιμοποιείται η τομή (001), κάθετη στον άξονα x_3 (Σχ. 8.3.1.19). Η τομή του ελλ. των δ.δ. πριν την εφαρμογή της τάσης είναι κύκλος ακτίνας ίσης με το δ.δ. n του κυβικού κρυστάλλου. Μετά όμως την εφαρμογή της τάσης, ο κρύσταλλος καθίσταται διάξονας και οι διευθύνσεις των νέων ιδιοκαταστάσεων x_1', x_2' στρέφονται ως προς τις x_1, x_2 κατά 45°.



(Σχ. 8.3.1.19)

Διαμόρφωση πλάτους από τον κρύσταλλο του GaAs *(διαμήκης τύπος)*

Στην περίπτωση αυτή θα πρέπει στον κρύσταλλο να πέσει γραμμικά πολωμένο φως κατά τη διεύθυνση του x_3 προκειμένου ν' αναλυθεί σε δύο συνιστώσες ίσου πλάτους κατά τους x_1', x_2' (διευθύνσεις ιδιοκαταστάσεων). Μετά τη διάνυση του μήκους L του κρυστάλλου η διαφορά φάσης μεταξύ τους θα είναι:

$$\Gamma = \frac{2\pi}{\lambda}\left(n_2' - n_1'\right)L = \frac{2\pi}{\lambda}n^3 r_{41}E_3 L = \frac{2\pi}{\lambda}n^3 r_{41}V \qquad (8.3.1.44)$$

Όσο για την τάση V_π του μισού μ.κ. θα δίνεται από τη σχέση:

$$V_\pi = \lambda / 2n^3 r_{41} \qquad (8.3.1.45)$$

Προκειμένου η διάταξη να χρησιμοποιηθεί σαν διαμορφωτής πλάτους, θα πρέπει μετά τον κρύσταλλο να τοποθετηθεί πλακίδιο $\lambda/4$ (όπως στη διάταξη του (Σχ. 8.3.1.7)), προκειμένου να 'πολώσουμε' το διαμορφωτή σε γραμμική περιοχή καθώς και ένας αναλυτής σε θέση κατάσβεσης με τον πολωτή στην είσοδο (ο άξονας διέλευσής του να είναι κάθετος προς τη διεύθυνση του x_2). Τότε η σχέση μεταξύ της έντασης εξόδου I_o συναρτήσει του χρόνου θα δίνεται από τη (σχ. 8.3.1.12) όπου η τιμή της V_π θα δίνεται από τη (σχ. 8.3.1.45).

Διαμόρφωση φάσης από τον κρύσταλλο του GaAs *(διαμήκης τύπος)*

Στην περίπτωση αυτή το φως πρέπει να πέσει γραμμικά πολωμένο στη μια από τις δύο διευθύνσεις x_1', x_2'. Κάτω από αυτές τις συνθήκες, η καθυστέρηση φάσης (για πεδίο παράλληλο στον x_2') θα δίνεται από τη σχέση:

$\Gamma = \frac{2\pi}{\lambda}\left(n + \frac{1}{2}n^3 r_{41} E_3\right)L = \frac{2\pi}{\lambda}nL + \frac{\pi}{\lambda}n^3 r_{41} V$ και αν παραλείψουμε τον σταθερό παράγοντα φάσης $(2\pi/\lambda)nL$ τότε:

$$\Gamma = (\pi/\lambda)n^3 r_{41} V \qquad (8.3.1.46)$$

Από την τελευταία βρίσκουμε ότι η τάση μισού μ.κ. θα δίνεται από τη σχέση:

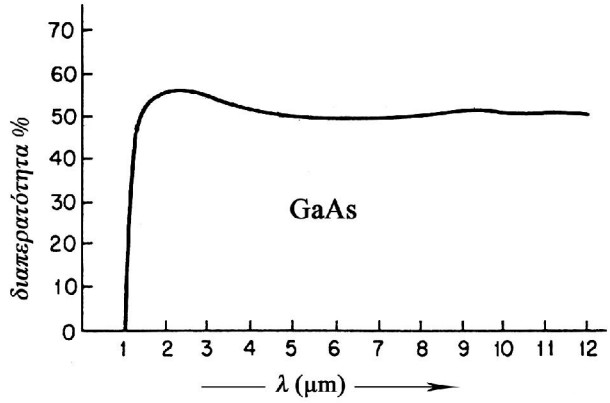
$$V_\pi = \lambda / n^3 r_{41} \qquad (8.3.1.47)$$

Κάτω από αυτές τις συνθήκες για αρμονική μεταβολή της διαμορφώνουσας τάσης το πλάτος E_o της έντασης της Η/Μ διαταραχής θα δίνεται από τη (σχ. 8.3.1.15) με $\delta = \pi V_m / V_\pi$ και η V_π θα δίνεται από τη (σχ. 8.3.1.47). Το GaAs είναι 'διαφανές' υλικό για μεγάλο εύρος συχνοτήτων στην εγγύς υπέρυθρη περιοχή του Η/Μ φάσματος όπως φαίνεται χαρακτηριστικά στην καμπύλη διαπερατότητας του (Σχ. 8.3.1.20) συναρτήσει του μήκους κύματος.

Διαμόρφωση συχνότητας από εξαγωνικούς κρυστάλλους της τάξης $(\bar{6})$*, μέσω του γραμμικού Η/Ο φαινόμενου**

* C. F. Buhrer, D. Baird and E. M. Conwell: 'Optical Frequency Shifting by Electro-optic Effect' Appl. Phys. Lett. **1**(2):46-49 (1962).

Αν ω είναι η φέρουσα συχνότητα μιας δέσμης φωτός τότε σαν διαμόρφωση αυτής της συχνότητας εννοούμε την εκτροπή της κατά $\pm\omega_m$, όπου ω_m η διαμορφώνουσα συχνότητα. Δηλ. μετά τον διαμορφωτή η συχνότητα της δέσμης θα

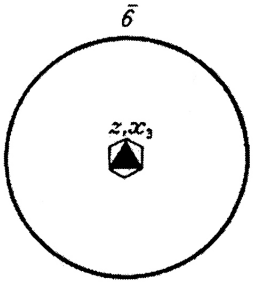


(Σχ. 8.3.1.20)

είναι $\omega \pm \omega_m$. Οι κρύσταλλοι που μπορούν να χρησιμοποιηθούν για το σκοπό αυτό θα πρέπει να διαθέτουν άξονα συμμετρίας τρίτης τάξης. Σαν τέτοιοι είναι αυτοί των τάξεων $(23),(\bar{4}3\mathrm{m})$ του κυβικού συστήματος, των $(\bar{6}),(\bar{6}\mathrm{m}2)$ του εξαγωνικού και των $(3),(32),(3\mathrm{m})$ του τριγωνικού συστήματος. Στα επόμενα θ' αναπτύξουμε στοιχειωδώς αυτού του είδους τη διαμόρφωση, για κρύσταλλο του εξαγωνικού συστήματος της τάξης $(\bar{6})$. Στο (Σχ. 8.3.1.21α,β) βλέπουμε τη συμμετρία του πίνακα

$$\underset{\substack{i=1,..,6\\ j=1,2,3}}{r_{ij}} = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & 0 \\ r_{21} & r_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ r_{61} & r_{62} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_{11} & -r_{22} & 0 \\ -r_{11} & r_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -r_{22} & -r_{11} & 0 \end{pmatrix}$$

(α)



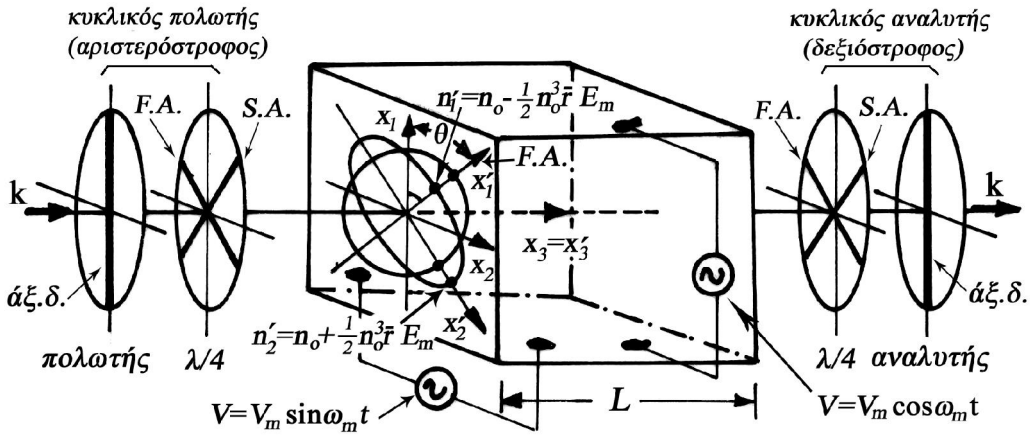
(β)

(Σχ. 8.3.1.21)

των ηλεκτροοπτικών σταθερών και τα στοιχεία συμμετρίας της τάξης $(\bar{6})$. Δηλ. υφίστανται μόνο δύο κατά μέτρο ανεξάρτητοι ηλεκτροοπτικοί συντελεστές. Τα στοιχεία συμμετρίας αυτών των κρυστάλλων είναι στην ίδια διεύθυνση (z, x_3), ένας έ-

κτης και ένας τρίτης τάξης άξονες περιστροφής και κάθετα σ' αυτούς ένα επίπεδο συμμετρίας.

Ο κρύσταλλος θα πρέπει να είναι κομμένος σε μορφή ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου με τις δύο απέναντι παράλληλες έδρες του κάθετες στον άξονα τρίτης



(Σχ. 8.3.1.22)

τάξης. Τα άλλα δύο παράλληλα ζεύγη εδρών θα είναι εν γένει παράλληλα στον άξονα τρίτης τάξης και ορθογώνια μεταξύ τους. Σε ανά ένα από αυτά τα ζεύγη, εφαρμόζουμε ταυτόχρονα τη διαμορφώνουσα αρμονική διαφορά δυναμικού η οποία προκαλεί παρομοίως την αρμονική μεταβολή στο ηλ. πεδίο, πλάτους E_m και συχνότητας ω_m. Μεταξύ τους όμως η διαφορά φάσης πρέπει να είναι ίση με 90°. Η διεύθυνση διάδοσης του φωτός συχνότητας ω, είναι κατά μήκος του άξονα x_3 τρίτης (και για την περίπτωσή μας έκτης) τάξης. Για το λόγο αυτό τα ηλεκτρόδια μέσω των οποίων εφαρμόζονται οι δύο τάσεις είναι αδιαφανή (Σχ. 8.3.1.22). Τελικά με τη διαδικασία αυτή, το διαμορφώνον ηλ. πεδίο το εφαρμοζόμενο στον κρύσταλλο θα είναι της μορφής:

$$\mathbf{E} = E_1\mathbf{i} + E_2\mathbf{j} = E_m \cos\omega_m t\mathbf{i} + E_m \sin\omega_m t\mathbf{j} \qquad (8.3.1.48)$$

Δηλ. θα περιστρέφεται κυκλικά συναρτήσει του χρόνου με συχνότητα ω_m.

Κατ' αρχήν μας ενδιαφέρει ο προσδιορισμός των διευθύνσεων των ιδιοκταστάσεων όπως και των δ.δ. n_1', n_2' μετά τον δεδομένο τρόπο εφαρμογής του ηλ. πεδίου και για διεύθυνση διάδοσης του φωτός κατά τον άξονα x_3. Οι άξονες x_1, x_2 όπως προαναφέραμε για την τάξη $(\bar{6})$ μπορεί να έχουν τυχαίες διευθύνσεις αρκεί να είναι κάθετοι στον x_3 και ορθογώνιοι μεταξύ τους. Πράγματι μετά την εφαρμο-

γή του ηλ. πεδίου, το νέο ελλειψοειδές των δ.δ. λόγω της δράσης του γραμμικού Η/Ο φαινόμενου θα δίνεται από τη (σχ. Ζ-8) του (ΠΑΡ/ΤΟΣ 4-Ζ) :

$$\left.\begin{aligned}&\left(\frac{1}{n_1^2}+r_{1k}E_k\right)x_1^2+\left(\frac{1}{n_2^2}+r_{2k}E_k\right)x_2^2+\left(\frac{1}{n_3^2}+r_{3k}E_k\right)x_3^2+\\&\qquad+2r_{4k}E_kx_2x_3+2r_{5k}E_kx_1x_3+2r_{6k}E_kx_1x_2=1\end{aligned}\right\}\quad(8.3.1.49)$$

και επειδή $n_1=n_2=n_o$, $n_3=n_e$ (στη τάξη $(\overline{6})$ ανήκουν μονοάξονες κρύσταλλοι), $E_1=E_m\cos\omega_m t$, $E_2=E_m\sin\omega_m t$, $E_3=0$ και τα στοιχεία r_{ij} δίνονται από τον πίνακα του (Σχ. 8.3.1.21α), τότε η (σχ. 8,3,1,49) γίνεται:

$$\left.\begin{aligned}&\left(\frac{1}{n_o^2}+r_{11}E_m\cos\omega_m t-r_{22}E_m\sin\omega_m t\right)x_1^2+\\&+\left(\frac{1}{n_o^2}-r_{11}E_m\cos\omega_m t+r_{22}E_m\sin\omega_m t\right)x_2^2+\left(\frac{x_3^2}{n_e^2}\right)-\\&-2\left(r_{22}E_m\cos\omega_m t\right)x_1x_2-2\left(r_{11}E_m\sin\omega_m t\right)x_1x_2=1\end{aligned}\right\}\quad(8.3.1.50)$$

Το νέο αυτό ελλ. των δ.δ. καθίσταται τριαξονικό. Δηλ. ο κρύσταλλος μετά την εφαρμογή του πεδίου γίνεται διάξονας . Οι κύριοι άξονές του x_1',x_2' αλλάζουν προσανατολισμό, όχι όμως ο x_3' δηλ. $x_3'\equiv x_3$. Επομένως προκειμένου να υπολογίσουμε τις ιδιοκαταστάσεις (δηλ. τον προσανατολισμό των x_1',x_2') καθώς και τους κύριους δ.δ. n_1',n_2' αρκεί να πάρουμε την τομή του ελλειψοειδούς κάθετα προς τον x_3. Άρα για $x_3=0$ η (σχ. 8.3.1.50) γίνεται:

$$\left(\frac{1}{n_o^2}+r_{11}E_1-r_{22}E_2\right)x_1^2+\left(\frac{1}{n_o^2}-r_{11}E_1+r_{22}E_2\right)x_2^2+\left(-r_{22}E_1-r_{11}E_2\right)x_1x_2=1\quad(8.3.1.51)$$

Η εξάλειψη του όρου x_1x_2 προκειμένου η (σχ. 8.3.1.51) να λάβει τη μορφή: $x_1^2/n_1'^2+x_2^2/n_2'^2=1$, γίνεται με στροφή περί τον άξονα x_3 (κατά τη θετική φορά) κατά μια γωνία θ. Επομένως οι συντεταγμένες x_1,x_2 συναρτήσει των x_1',x_2' θα δίνονται από τις σχέσεις:

$$x_1=\cos\theta x_1'-\sin\theta x_2'\ ,\ \ x_2=\sin\theta x_1'+\cos\theta x_2'\ ,\ x_3=x_3'\qquad(8.3.1.52)$$

Μετά την αντικατάστασή τους στη (σχ. 8.3.1.51) και το μηδενισμό του γινομένου $x_1'x_2'$ βρίσκουμε:

$$\tan 2\theta = \frac{r_{22}\cos a + r_{11}\sin a}{-r_{11}\cos a + r_{22}\sin a} \qquad a = \omega_m t \tag{8.3.1.53}$$

Επομένως: $$\sin 2\theta = \frac{r_{22}}{\overline{r}}\cos a + \frac{r_{11}}{\overline{r}}\sin a \tag{8.3.1.54}$$

και $$\cos 2\theta = -\frac{r_{11}}{\overline{r}}\cos a + \frac{r_{22}}{\overline{r}}\sin a \tag{8.3.1.55}$$

Από τις δύο τελευταίες σχέσεις βρίσκουμε:

$$\overline{r} = \sqrt{r_{11}^2 + r_{22}^2} \tag{8.3.1.56}$$

Τότε από τη (σχ. 8.3.1.54) αν: $\sin\Phi = r_{22}/\overline{r} \Rightarrow \cos\Phi = r_{11}/\overline{r}$. Άρα: $\sin 2\theta = \sin\Phi\cos\alpha + \cos\Phi\sin a \Rightarrow \sin 2\theta = \sin\left(a+\Phi\right)$. Και τελικά:

$$\theta = \frac{1}{2}\left(a+\Phi\right) \qquad \text{ή} \qquad \theta = \frac{\omega_m}{2}t + \frac{\Phi}{2} \tag{8.3.1.57}$$

όπου: $$\Phi = \arcsin\frac{r_{22}}{\overline{r}} = \arcsin\frac{r_{22}}{\sqrt{r_{11}^2 + r_{22}^2}} \tag{8.3.1.58}$$

Οι δύο υπολειπόμενοι όροι ως προς $x_1'^2, x_2'^2$ οι οποίοι προκύπτουν από τη (σχ. 8.3.1.51) μετά την αντικατάσταση των x_1, x_2 μέσω των (σχ. 8.3.1.52) και τον μηδενισμό του όρου $x_1'x_2'$ μας οδηγούν στην εξίσωση της έλλειψης (της καθέτου στον $x_3' \equiv x_3$) ως προς τους κύριους πλέον άξονες x_1', x_2'. Θα έχουμε:

$$\left(\frac{1}{n_o^2} + \overline{r}E_m\right)x_1'^2 + \left(\frac{1}{n_o^2} - \overline{r}E_m\right)x_2'^2 = 1 \tag{8.3.1.59}$$

Επομένως οι κύριοι δ.δ. n_1', n_2' θα δίνονται από τις σχέσεις:

$$\frac{1}{n_1'^2} = \frac{1}{n_o^2} + \overline{r}E_m \quad , \quad \frac{1}{n_2'^2} = \frac{1}{n_o^2} - \overline{r}E_m \tag{8.3.1.60}$$

Και επειδή $n_1' \simeq n_2' \simeq n_o$ θα έχουμε τελικά:

$$n_1' = n_o - \frac{1}{2} n_o^3 \overline{r} E_m \quad , \quad n_2' = n_o + \frac{1}{2} n_o^3 \overline{r} E_m \tag{8.3.1.61}$$

Τότε η διαφορά φάσης μεταξύ δύο ίσου πλάτους ορθογωνίων διαταραχών παραλλήλων προς τους x_1', x_2' αντίστοιχα, κατά την έξοδό τους από τον κρύσταλλο μετά την διάνυση απόστασης L θα είναι:

$$\Gamma = \frac{2\pi}{\lambda}\left(n_2' - n_1'\right) L = \frac{2\pi}{\lambda} n_o^3 \overline{r} E_m L \tag{8.3.1.62}$$

Από τη (σχ. 8.3.1.57) παρατηρούμε το εξής. Η γωνία θ είναι αυτή μεταξύ των αξόνων x_1 και x_1'. Δηλ. του x_1 και του ταχύ άξονα του κρυστάλλου αν ο τελευταίος ιδωθεί σαν πλακίδιο καθυστέρησης. Βλέπουμε ότι λόγω της μορφής του διαμορφώνοντος ηλ. πεδίου δεν είναι σταθερή αλλά χρονικά μεταβαλλόμενη και μάλιστα με συχνότητα $\omega_m/2$. Η διαφορά φάσεως όμως Γ για τις δύο συνιστώσες, για διάδοση του φωτός κατά μήκος του άξονα $x_3' \equiv x_3$ είναι σταθερή και δίνεται από τη (σχ. 8.3.1.62).

Προκειμένου τώρα ο κρύσταλλος να λειτουργήσει σαν διαμορφωτής συχνότητας θα πρέπει να τοποθετηθεί (Σχ. 8.3.1.22) μεταξύ δύο κυκλικών πολωτών. Π.χ. ενός αριστερόστροφου πριν την είσοδο του κρυστάλλου και ενός δεξιόστροφου μετά την έξοδό του. Υποθέτουμε ότι στην είσοδο του αριστερόστροφου κυκλικού πολωτή προσπίπτει φυσικό φως μ.κ. λ και συχνότητας ω. Τότε στην έξοδό του το φως θα είναι Α.Κ.Π και το διάνυσμα Jones που περιγράφει το πεδίο του θα είναι:

$$\begin{pmatrix} E_{ix_1} \\ E_{ix_2} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} \tag{8.3.1.63}$$

Αναφέραμε ήδη ότι ο κρύσταλλος μπορεί να ιδωθεί σαν πλακίδιο καθυστέρησης με τον ταχύ του άξονα σε γωνία θ σε σχέση με τον άξονα x_1. Επομένως το διάνυσμα Jones που περιγράφει το φως μετά την έξοδό του από τον κρύσταλλο θα δίνεται από η σχέση:

$$\begin{pmatrix} E_{ox_1} \\ E_{ox_2} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \cos\frac{\Gamma}{2} + i\sin\frac{\Gamma}{2}\cos 2\theta & i\sin\frac{\Gamma}{2}\sin 2\theta \\ i\sin\frac{\Gamma}{2}\sin 2\theta & \cos\frac{\Gamma}{2} - i\sin\frac{\Gamma}{2}\cos 2\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} \qquad (8.3.1.64)$$

όπου ο πίνακας Jones (2×2) αντιστοιχεί σε πλακίδιο καθυστέρησης που επιβάλλει διαφορά φάσης Γ και ο ταχύς του άξονας είναι στραμμένος κατά γωνία θ ως προς τον x_1 (βλ. ΠΑΡ/ΜΑ 5 (σχ. 5.49)). Μετά την εκτέλεση των πράξεων και την αντικατάσταση της θ από τη (σχ. 8.3.1.57) βρίσκουμε:

$$\begin{pmatrix} E_{ox_1} \\ E_{ox_2} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \left[\cos\frac{\Gamma}{2} + \sin\frac{\Gamma}{2}\sin(\omega_m t + \Phi)\right] + i\sin\frac{\Gamma}{2}\cos(\omega_m t + \Phi) \\ -\sin\frac{\Gamma}{2}\cos(\omega_m t + \Phi) + i\left[\sin\frac{\Gamma}{2}\sin(\omega_m t + \Phi) - \cos\frac{\Gamma}{2}\right] \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \cos\frac{\Gamma}{2} - \sin\frac{\Gamma}{2}\left[\cos\left(\omega_m t + \Phi + \frac{\pi}{2}\right) - i\sin(\omega_m t + \Phi) + \frac{\pi}{2}\right] \\ -i\cos\frac{\Gamma}{2} - \sin\frac{\Gamma}{2}\left[\cos(\omega_m t + \Phi) - i\sin(\omega_m t + \Phi)\right] \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} E_{ox_1} \\ E_{ox_2} \end{pmatrix} = \frac{\cos\frac{\Gamma}{2}}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} - \frac{\sin\frac{\Gamma}{2}}{\sqrt{2}} e^{-i(\omega_m t + \Phi)} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$$

Και πολλαπλασιάζοντας τις δύο συνιστώσες με $e^{i\omega t}$ όπου ω η φέρουσα συχνότητα του υπό διαμόρφωση φωτός θα έχουμε:

$$\begin{pmatrix} E_{ox_1} \\ E_{ox_2} \end{pmatrix} = \frac{\cos\frac{\Gamma}{2}}{\sqrt{2}} e^{i\omega t} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} - \frac{\sin\frac{\Gamma}{2}}{\sqrt{2}} e^{i\left[(\omega - \omega_m)t + \Phi\right]} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} \qquad (8.3.1.65)$$

Από τη σχέση αυτή βλέπουμε ότι μετά τον κρύσταλλο αναδύονται διαδιδόμενα στην ίδια διεύθυνση δύο μέτωπα κύματος. Το πρώτο είναι αριστερόστροφα κυκλικά πολωμένο πλάτους $\cos\frac{\Gamma}{2}\Big/\sqrt{2}$ και συχνότητας ω. Το δεύτερο είναι δεξιόστροφα κυκλικά πολωμένο πλάτους $\sin\frac{\Gamma}{2}\Big/\sqrt{2}$ και συχνότητας $(\omega - \omega_m)$. Προκειμέ-

νου να πάρουμε το Δ.Κ.Π. φως, μετά τον κρύσταλλο τοποθετούμε ένα δεξιόστροφο κυκλικό πολωτή. Τελευταίος κατασβένει κατά τα γνωστά το Α.Κ.Π. φως και επιτρέπει μόνο τη διέλευση του Δ.Κ.Π. φωτός συχνότητας $(\omega - \omega_m)$. Εάν επίσης το μήκος L του κρυστάλλου επιλεχθεί έτσι ώστε: $\Gamma = \pi$ τότε $\cos(\Gamma/2) = 0$ και το φως που θα εξέρχεται από τον κρύσταλλο θα έχει πλήρως μετατραπεί σε Δ.Κ.Π. συχνότητας $(\omega - \omega_m)$. Για να λάβουμε στην έξοδο του κρυστάλλου διαμορφωμένο κατά συχνότητα φως με $\omega' = \omega + \omega_m$, θα πρέπει να αλλάξουμε τη φορά περιστροφής του εφαρμοζόμενου εξωτερικά ηλ. πεδίου, μέσω της αλλαγής των φάσεων των δύο του συνιστωσών.

Πειραματική επιβεβαίωση των διαμόρφωσης κατά συχνότητα έγινε σε κρύσταλλο του κυβικού συστήματος της τάξης $(\bar{4}3\mathrm{m})$ (διαθέτει άξονα συμμετρίας τρίτης τάξης) και συγκεκριμένα στο Σφαλερίτη (zinc sulfide). Η διεύθυνση διάδοσης του φωτός ήταν η $\langle 111 \rangle$ και τα διαμορφώνοντα ηλ. πεδία κάθετα προς αυτήν ήταν της τάξης των 5kV/cm. Σε κάθε ζεύγος ηλεκτροδίων εφαρμόστηκαν ταυτόχρονα διαμορφώνοντα ηλεκτρικά πεδία 1000Hz και 1500Hz με συνέπεια στην έξοδο του συστήματος να παραχθούν (διαμορφωθούν) ταυτόχρονα δύο οπτικά πεδία συχνοτήτων $\omega_1 = [(\omega/2\pi) - 1000]\mathrm{Hz}$ και $\omega_2 = [(\omega/2\pi) - 1500]\mathrm{Hz}$. Τα δύο αυτά σήματα ανιχνεύθηκαν με φωτοπολλαπλασιαστή και οδηγήθηκαν σε παλμογράφο. Κατά τα γνωστά (βλ. Π.Α.Α.Φ. (ΠΑΡ/ΜΑ 7)), αρμονικές διαταραχές με συχνότητες που διαφέρουν κατ'ελάχιστον μεταξύ τους και έρχονται σε επαλληλία, παράγουν ***διακροτήματα*** . Δηλαδή το πλάτος της συνολικής διαταραχής συχνότητας $\simeq (\omega_1 + \omega_2)/2$, μεταβάλλεται αρμονικά με συχνότητα όμως $\simeq (\omega_1 - \omega_2)/2$. Στο προαναφερόμενο πείραμα παρατηρήθηκαν πράγματι στον παλμογράφο τέτοιου είδους σήματα, συχνότητας 500Hz.

8.3.2 *Χρόνος μετάβασης και διαμορφωτές διαδιδόμενου διαμορφώνοντος ηλεκτρικού πεδίου*[*]

Περιορισμοί λόγω του χρόνου μετάβασης

Οι υπολογισμοί που έχουν γίνει προηγουμένως και αφορούσαν καθυστερήσεις στη φάση (κατά τη διάδοση μιας ιδιοκατάστασης) ή τη διαφορά φάσης (μεταξύ δύο ιδιοκαταστάσεων) κατά τη διάδοσή τους στο εσωτερικό ενός κρυστάλλου

[*] A. Ghatak and K. Thyagarajan: 'Optical Electronics' Cambridge Univ. Press. Cambridge N.Y. (1989). Ch. 15.5 : 'General consideration on modulator design'.

μήκους L, υπάκουαν στη συνθήκη: $\omega_m \ll 2/\tau_d$. Όπου ω_m η διαμορφώνουσα συχνότητα και τ_d ο ***χρόνος μετάβασης (transit time)***. Δηλ. ο χρόνος που απαιτείται προκειμένου το φως να διαδοθεί στο μήκος L του κρυστάλλου και ο οποίος δίνεται από τη σχέση:

$$\tau_d = L/\upsilon = nL/c \tag{8.3.2.1}$$

Όπου n ο δ.δ. της αντίστοιχης ιδιοκατάστασης. Η συνθήκη $\omega_m \ll 2/\tau_d$ σημαίνει π.χ. ότι για ένα διαμορφωτή φάσης, η καθυστέρηση φάσης υπολογίζεται για σταθερό διαμορφώνον πεδίο στο χρόνο τ_d. Αν υποθέσουμε ότι το μήκος του κρυστάλλου είναι $L = 1\text{cm}$ και ο δείκτης διάθλασης $n = 1.5$ τότε από τη (σχ. 8.3.2.1) βρίσκουμε $\tau_d \simeq 0.5\times10^{-10}\text{s}$. Θεωρούμε τώρα ότι η τιμή της διαμορφώνουσας συχνότητας είναι αρκετά μεγάλη έστω $\nu_m \simeq 2\times10^{10}\text{Hz}$ (δηλ. της τάξης των GHz). Τότε ο χρόνος μετάβασης τ_d αντιστοιχεί σε μια πλήρη περίοδο εναλλαγής του διαμορφώνοντος πεδίου δηλ. $T = 1/\nu_m \simeq 0.5\times10^{-10}\text{s}$. Επομένως το διαμορφώνον πεδίο στο εσωτερικό του κατά τη διάρκεια της διέλευσης του φωτός δεν είναι πλέον σταθερό, γεγονός το οποίο θα πρέπει να λάβουμε σοβαρά υπόψη μας στους υπολογισμούς, όσον αφορά την καθυστέρηση (ή τη διαφορά) φάσης.

Υποθέτουμε και πάλι ότι το διαμορφώνον πεδίο είναι αρμονικής μορφής. Δηλ.

$$E = E_m \cos\omega_m t \tag{8.3.2.2}$$

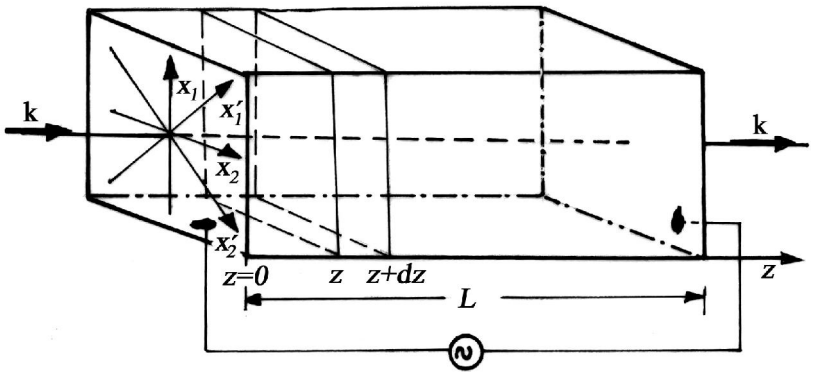
Προκειμένου να υπολογίσουμε τη χρονική μεταβολή της καθυστέρησης μιας ιδιοκατάστασης κατά τη διάνυση του μήκους του κρυστάλλου (λόγω της χρονικής μεταβολής του διαμορφώνοντος πεδίου), θα θεωρήσουμε ότι το φως εξέρχεται του κρυστάλλου (για $z = L$) τη χρονική στιγμή t. Τότε η ένταση του ηλ. πεδίου στη θέση z (από τη θέση $z = 0$) (Σχ. 8.3.2.1) δηλ. τη χρονική στιγμή $t' = t - (L - z)n/c$ θα δίνεται από τη σχέση:

$$E = E_o \cos\left\{\omega_m\left[t - (L - z)n/c\right]\right\} \tag{8.3.2.3}$$

Για την ανάλυσή μας επιλέγουμε έναν κρύσταλλο KDP σαν διαμορφωτή πλάτους και πιο συγκεκριμένα τον επιμήκη τύπο του, αν και τα αποτελέσματα είναι τα ίδια και για τον εγκάρσιο τύπο. Επιλέγουμε επίσης κατ' αρχήν την διάδοση για την ιδιοκατάταση την παράλληλη με τον άξονα x_1'. Ζητούμε γι' αυτήν την ιδιοκατάσταση

να υπολογίσουμε την καθυστέρηση φάσης κατά την διάδοσή της μεταξύ των επιπέδων στις θέσεις z και $z+dz$. Η τελευταία θα δίνεται από τη σχέση:

$$d\Phi_{x_1'} = \left(2\pi/\lambda\right) n'_{x_1} dz \tag{8.3.2.4}$$



(Σχ. 8.3.2.1)

όπου $n'_{x_1} = n_o - \frac{1}{2} n_o^3 r_{63} E_3$ και τώρα το E_3 θα εκφράζεται με τη βοήθεια της (σχ. 8.3.2.3) σαν $E = E_o \cos\left\{\omega_m \left[t - \left(L - z\right) n'_{x_1}/c\right]\right\}$ οπότε:

$$d\Phi_{x_1'} = \frac{2\pi}{\lambda} n_o dz - \frac{2\pi}{\lambda} \frac{n_o^3 r_{63}}{2} E_o \cos\left\{\omega_m \left[t - \frac{\left(L-z\right) n'_{x_1}}{c}\right]\right\} dz \tag{8.3.2.5}$$

όπου ο δ.δ. n'_{x_1} θεωρείται περίπου σταθερός για τη διάδοση από τη θέση $z = z$ μέχρι τη $z = L$. Προκειμένου τώρα να βρούμε την ολική καθυστέρηση φάσης για την ιδιοκατάσταση την παράλληλη με τον άξονα x_1' θα πρέπει να ολοκληρώσουμε τη (σχ. 8.3.2.5) από $z = 0$ έως $z = L$. Εκτελώντας τις πράξεις βρίσκουμε:

$$\begin{aligned}\Phi_{x_1'} = \frac{2\pi}{\lambda} n_0 L - \frac{2\pi}{\lambda} \frac{n_o^3 r_{63} E_o L}{2} \cos\left(\omega_m t - \frac{\omega_m L}{2c} n'_{x_1}\right) \times \\ \times \sin\left(\frac{\omega_m L}{2c} n'_{x_1}\right) \Big/ \left(\frac{\omega_m L}{2c} n'_{x_1}\right)\end{aligned} \tag{8.3.2.6}$$

Με παρόμοιους συλλογισμούς, η ολική καθυστέρηση φάσης για την ιδιοκατάσταση την παράλληλη με τον άξονα x_2' δίνεται από τη σχέση:

$$\Phi_{x_2'} = \frac{2\pi}{\lambda} n_0 L - \frac{2\pi}{\lambda} \frac{n_o^3 r_{63} E_o L}{2} \cos\left(\omega_m t - \frac{\omega_m L}{2c} n'_{x_2}\right) \times \\ \times \sin\left(\frac{\omega_m L}{2c} n'_{x_2}\right) \Big/ \left(\frac{\omega_m L}{2c} n'_{x_2}\right) \tag{8.3.2.7}$$

Τότε η διαφορά φάσης $\Phi_{x_2'} - \Phi_{x_1'}$ με την προϋπόθεση ότι:

$$\sin\left(\frac{\omega_m L}{2c} n'_{x_1}\right) \Big/ \left(\frac{\omega_m L}{2c} n'_{x_1}\right) \simeq \sin\left(\frac{\omega_m L}{2c} n'_{x_2}\right) \Big/ \left(\frac{\omega_m L}{2c} n'_{x_2}\right) = \\ = \sin\left(\frac{\omega_m L}{2c} n\right) \Big/ \left(\frac{\omega_m L}{2c} n\right) = \sin\left(\frac{\omega_m \tau_d}{2}\right) \Big/ \left(\frac{\omega_m \tau_d}{2}\right)$$

επειδή $n'_{x_1} \simeq n'_{x_2}$ θα δίνεται από την:

$$\Phi_{x_2'} - \Phi_{x_1'} = \frac{2\pi}{\lambda} \frac{n_o^3 r_{63} E_o L}{2} \left[\cos\left(\omega_m t - \frac{\omega_m L}{2c} n'_{x_2}\right) + \cos\left(\omega_m t - \frac{\omega_m L}{2c} n'_{x_1}\right)\right] \times \\ \times \sin\left(\frac{\omega_m \tau_d}{2}\right) \Big/ \left(\frac{\omega_m \tau_d}{2}\right) \tag{8.3.2.8}$$

επειδή $\tau_d = Ln/c$. Επίσης με τη βοήθεια της τριγωνομετρικής σχέσης:

$$\cos + \cos\beta = 2\cos\frac{(\alpha+\beta)}{2}\cos\frac{(\alpha-\beta)}{2}$$

το άθροισμα των συνημίτονων στο εσωτερικό της αγκύλης της (σχ. 8.3.2.8) θα πάρει τη μορφή:

$$2\cos\left[\omega_m t - \frac{\omega_m L}{4c}\left(n'_{x_1} + n'_{x_2}\right)\right]\cos\left[\frac{\omega_m L}{4c}\left(n'_{x_2} - n'_{x_1}\right)\right] \tag{8.3.2.9}$$

Επειδή όμως: $\frac{2\pi}{\lambda}\left(n'_{x_2} - n'_{x_1}\right)L = \frac{\omega}{c}\left(n'_{x_2} - n'_{x_1}\right)L \sim \pi$ (δηλ. η διαφορά φάσης μεταξύ των δύο ιδιοκαταστάσεων κατά την έξοδό τους από τον κρύσταλλο είναι της τάξης ου π) θα έχουμε:

$$n'_{x_2} - n'_{x_1} \sim \frac{\pi c}{\omega L} \tag{8.3.2.10}$$

Τότε ο όρος $\frac{\omega_m L}{4c}\left(n'_{x_2} - n'_{x_1}\right)$ του συνημίτονου της (σχ. 8.3.2.9) θα είναι με τη βοήθεια της (σχ. 8.3.2.10):

$$\frac{\omega_m L}{4c}\left(n'_{x_2}-n'_{x_1}\right)\sim\frac{\omega_m L}{4c}\frac{\pi c}{\omega L}\sim\frac{\pi}{4}\frac{\omega_m}{\omega}\simeq\frac{10^{10}}{10^{15}}\ll 1 \qquad (8.3.2.11)$$

Επομένως ο δεύτερος όρος $\cos\left[\frac{\omega_m L}{4c}\left(n'_{x_2}-n'_{x_1}\right)\right]$ της (σχ. 8.3.2.9) θα έχει τιμή περίπου ίση με τη μονάδα. Άρα τελικά η (σχ. 8.3.2.8) με την προϋπόθεση: $n'_{x_1}\simeq n'_{x_2}$ και του γεγονότος ότι: $\tau_d = Ln/c$ μπορεί να γραφεί:

$$\Phi_{x'_2}-\Phi_{x'_1}=\frac{2\pi}{\lambda}n_o^3 r_{63}E_o L\cos\left(\omega_m t-\frac{1}{2}\omega_m\tau_d\right)\sin\left(\frac{\omega_m\tau_d}{2}\right)\Big/\left(\frac{\omega_m\tau_d}{2}\right) \qquad (8.3.2.12)$$

Εάν $\omega_m\tau_d\ll 1$ τότε η (σχ. 8.3.2.11) επειδή $\left(\sin q/q\right)\simeq 1$ γίνεται:

$$\Delta\Phi=\Phi_{x'_2}-\Phi_{x'_1}=\frac{2\pi}{\lambda}n_o^3 r_{63}E_o L\cos\left(\omega_m t\right) \qquad (8.3.2.13)$$

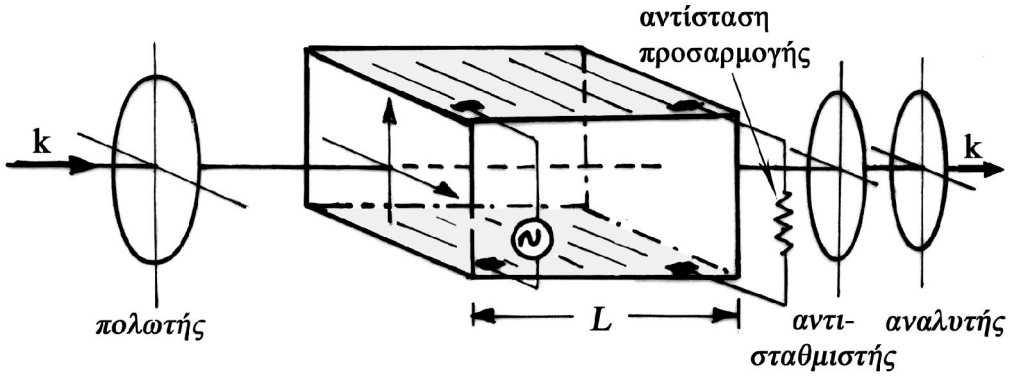
Επομένως η $\Delta\Phi$ θα διαμορφώνεται σύμφωνα με την διαμορφώνουσα συχνότητα ω_m. Δηλ. αν $\omega_m\tau_d\ll 1$, ο χρόνος που απαιτείται για να διανυθεί το μήκος L του κρυστάλλου είναι πολύ μικρότερος της χρονικής διαμόρφωσης οπότε στην περίπτωση αυτή ισχύει η ανάλυση που προτάθηκε για τη διαμόρφωση της συχνότητας (σχ. 8.3.1.15,16). Σε διαφορετική περίπτωση ο δείκτης διαμόρφωσης δ θα ελαττώνεται δραστικά από τον παράγοντα $\sin q/q$ όπου $q=\omega_m\tau_d/2$ της (σχ. 8.3.2.12). Π.χ. αν $\omega_m\tau_d=2\pi$ ή $\tau_d=2\pi/\omega_m$ τότε $\left(\sin q/q\right)=0$ οπότε και $\Delta\Phi=0$. Δηλ. στην περίπτωση αυτή από φυσική άποψη η διαφορά φάσης μεταξύ των δύο ιδιοκαταστάσεων (ή η καθυστέρηση φάσης οποιασδήποτε από αυτές) που θα εισάγεται στη δέσμη στο πρώτο μισό της διαδρομής του κρυστάλλου θ' αναιρείται ακριβώς κατά τη διαδρομή στο δεύτερο μισό του. Αποδεχόμαστε μια χρήσιμη μέγιστη συχνότητα διαμόρφωσης ω_m, αυτήν για την οποία ισχύει η σχέση: $\omega_m\tau_d/2=\pi/4$ οπότε:

$\sin\left(\frac{\omega_m\tau_d}{2}\right)\Big/\left(\frac{\omega_m\tau_d}{2}\right)\simeq 0.9$. Δηλ. $\left(\omega_m\right)_{\max}=\pi/2\tau_d=\pi c/2nL$ και $\left(\nu_m\right)_{\max}=c/4nL$.

Για έναν κρύσταλλο με $L=1\text{cm}$ για τον οποίο $n\simeq 1.5$ (π.χ. KDP) από την τελευταία σχέση βρίσκουμε: $\left(\nu_m\right)_{\max}\simeq 5\text{GHz}$.

Διαμορφωτές διαδιδόμενου διαμορφώνοντος πεδίου

Οι περιορισμοί όσον αφορά το πάνω όριο $(\omega_m)_{\max}$ της διαμορφώνουσας συχνότητας που οφείλεται στον πεπερασμένο χρόνο μετάβασης της διαταραχής του φωτός στον κρύσταλλο μπορούν να εξαλειφθούν. Το τελευταίο επιτυγχάνεται αν το διαμορφώνον ηλεκτρικό πεδίο εφαρμοστεί με τέτοιο τρόπο, έτσι ώστε να διαδίδεται κατά μήκος του κρυστάλλου με μια ορισμένη ταχύτητα φάσης, κατά τη διεύθυνση διάδοσης της δέσμης φωτός. Ένας τρόπος είναι ο κρύσταλλος να λειτουργήσει σαν γραμμή μεταφοράς όπως φαίνεται στο (Σχ. 8.3.2.2). Εκεί, ο τύπος λειτουργίας του είναι ο εγκάρσιος, μόνο που επιπλέον τα δύο του ηλεκτρόδια προσαρμόζονται με τη βοήθεια μιας τερματικής αντίστασης. Κάτω από αυτές τις συνθήκες, ένα οποιοδήποτε 'τμήμα' (χωρική περιοχή) της οπτικής διαταραχής στο εσωτερικό του κρυστάλλου θα βρίσκεται κάτω από την επίδραση του ίδιου πάντα διαμορφώνοντος ηλ. πεδίου με την προϋπόθεση βέβαια η ταχύτητα φάσης του να



(Σχ. 8.3.2.2)

είναι ίδια με αυτήν του φωτός στον κρύσταλλο. Το είδος αυτό της διαμόρφωσης μπορεί να χρησιμοποιηθεί για διαμόρφωση πλάτους ή φάσης. Για το λόγο αυτό μας ενδιαφέρει ο τρόπος με τον οποίο υπολογίζεται η διαφορά φάσης των δύο ιδιοκαταστάσεων (ή η καθυστέρηση φάσης για μια από τις ιδιοκαταστάσεις) κατά τη διάδοση του φωτός στον κρύσταλλο.

Κατ' αρχή επειδή το διαμορφώνον ηλ. πεδίο στον κρύσταλλο δεν είναι της μορφής: $E = E_m \cos \omega_m t$ (stationary) αλλά διαδιδόμενο, θα δίνεται από τη σχέση:

$$E = E_m \cos(\omega_m t - k_m z) \qquad (8.3.2.14)$$

όπου ω_m η διαμορφώνουσα συχνότητα και k_m το μέτρο του κυματοδιανύσματος του διαδιδόμενου ηλ. πεδίου κατά μήκος του άξονα z. Τότε κατά τα γνωστά η ταχύτητα φάσης του ω_m θα δίνεται από τη σχέση:

$$\upsilon_m = \omega_m / k_m \tag{8.3.2.15}$$

Αν t είναι η χρονική στιγμή που η διαταραχή βρίσκεται στο άκρο L του κρυστάλλου (Σχ. 8.3.2.1), τότε η τελευταία θα βρίσκεται στη θέση z (από την αρχική $z = 0$) τη χρονική στιγμή:

$$\tau = t - \frac{(L-z)}{c} n \tag{8.3.2.16}$$

όπου $n'_{x_1} \simeq n'_{x_2} \simeq n$. Τότε το διαμορφώνον ηλ. πεδίο τη στιγμή τ θα δίνεται από τη σχέση:

$$E = E_m \cos\left\{\omega_m \left[t - \frac{(L-z)}{c} n\right] - k_m z\right\} = E_m \cos\left\{\omega_m \left(t - \frac{nL}{c}\right) + z\left(\frac{\omega_m n}{c} - k_m\right)\right\} \tag{8.3.2.17}$$

και η διαφορά φάσης (ή η καθυστέρηση φάσης) η εισαγομένη μεταξύ των επιπέδων z και $z + dz$ θα είναι:

$$\Delta\Phi = \frac{2\pi}{\lambda} \Delta n dz = \frac{\omega}{c} \Delta n dz \tag{8.3.2.18}$$

όπου Δn η διπλοθλαστικότητα (ή ο δ.δ. για μια) των δύο ιδιοκαταστάσεων η επιβαλλόμενη από το διαμορφώνον ηλ. πεδίο. Με την προϋπόθεση βέβαια ότι δεν διαφορίζουμε μεταξύ των n'_{x_1}, n'_{x_2} ένεκα της ισχύος της (σχ. 8.3.2.11).

Επειδή η Δn είναι ανάλογη του διαμορφώνοντος ηλ. πεδίου θα έχουμε:

$$\Delta\Phi = A \cos\left[\omega_m \left(t - \frac{nL}{c}\right) + z\left(\frac{\omega_m n}{c} - k_m\right)\right] dz \tag{8.3.2.19}$$

όπου A παριστάνει την καθυστέρηση ανά μονάδα μήκους που οφείλεται στο σταθερό εφαρμοζόμενο πεδίο E_m και που ανάλογα με το είδος του κρυστάλλου και τον τύπο της διαμόρφωσης έχει ορισμένη τιμή (π.χ. για τον KDP και τον επιμήκη τύπο, θα είναι ίση με $(2\pi/\lambda) n_o^3 r_{63} E_m$). Προκειμένου να υπολογίσουμε τελικά τη συνολική

διαφορά φάσης κατά τη διάδοση του φωτός στο μήκος L του κρυστάλλου, ολοκληρώνουμε τη (σχ. 8.3.2.19) οπότε:

$$\Phi = \int_0^L d\Phi = AL\cos\left[\omega_m t - \frac{1}{2}L\left(k_m + \frac{\omega_m n}{c}\right)\right]\frac{\sin\left[\frac{1}{2}L\left(\frac{\omega_m n}{c}\right) - k_m\right]}{\left[\frac{1}{2}L\left(\frac{\omega_m n}{c}\right) - k_m\right]} \qquad (8.3.2.20)$$

όπου AL το πλάτος της διαμόρφωσης υπεράνω του μήκους L του κρυστάλλου. Και επειδή $\upsilon = c/n$ και $\upsilon_m = \omega_m / k_m$ είναι οι ταχύτητες φάσης του φωτός και του διαδιδόμενου διαμορφώνοντος πεδίου, η (σχ. 8.3.2.20) μετασχηματίζεται στην:

$$\Phi = AL\cos\left[\omega_m t - \frac{n\omega_m L}{2c}\left(1 + \frac{\upsilon}{\upsilon_m}\right)\right]\sin\left[\frac{1}{2}\omega_m \tau_d\left(1 - \frac{\upsilon}{\upsilon_m}\right)\right] \Big/ \left[\frac{1}{2}\omega_m \tau_d\left(1 - \frac{\upsilon}{\upsilon_m}\right)\right] \qquad (8.3.2.21)$$

και ο τ_d δίνεται και πάλι από τη (σχ. 8.3.2.8), που παριστάνει το χρόνο που απαιτείται για να διαδοθεί το φως κατά το μήκος L του κρυστάλλου. Αν με ορισμένο τρόπο πετύχουμε προσαρμογή των δύο ταχυτήτων φάσης (δηλ. $\upsilon = \upsilon_m$), τότε ο όρος $\sin q/q$ της (σχ. 8.3.2.21) τείνει στη μονάδα και ο χρόνος τ_d δεν αποτελεί περιοριστικό όρο προκειμένου να πετύχουμε μέγιστη διαφορά φάσης (δηλ. μέγιστο δείκτη διαμόρφωσης δ (σχ. 8.3.1.15,16)) για οποιοδήποτε μήκος διάδοσης του φωτός στον κρύσταλλο.

8.3.3 *Γεωμετρικά χαρακτηριστικά των διαμορφωτών. Λειτουργία των διαμορφωτών σε τμήμα ηλεκτρικού κυκλώματος*

Περιορισμοί λόγω της γεωμετρίας των διαμορφωτών

Έχουμε αποδείξει ότι για τις περιπτώσεις που οι κρύσταλλοι χρησιμοποιούνται με τον εγκάρσιο τύπο διαμόρφωσης, τότε η τάση του μισού μ.κ. V_π είναι ανάλογη του λόγου d/L, όπου d το πλάτος και L το μήκος του κρυστάλλου (βλ. (σχ. 8.3.1.26,32,34)). Αν και από πρώτη άποψη τα d, L είναι ανεξάρτητα μεταξύ τους, οι διαστάσεις των κρυστάλλων σε συνδυασμό με τη διάδοση του προς διαμόρφωση μετώπου κύματος στο εσωτερικό τους οδηγεί στην μεταξύ τους εξάρτηση. Στην πράξη, για ένα δοσμένο μήκος L κρυστάλλου η ελάχιστη των διαστάσεων της διατομής του $d \times d$ και κατά προέκταση της d, περιορίζεται από το φαινόμενο της περίθλασης του φωτός από τα όριά του (με συνεχή την απόκλιση του από

την ευθύγραμμη διάδοση). Σαν οριακή κατάσταση λοιπόν για τη στοιχειώδη ανάλυση που θ' ακολουθήσει θεωρούμε ότι η περίμετρος της δέσμης του φωτός μόλις απέχει από τα όρια της διατομής του κρυστάλλου. Οι δέσμες φωτός που χρησιμοποιούνται συνήθως στην πράξη για διαμόρφωση είναι αυτές που προέρχονται από Laser. Σαν τέτοιες από τον τρόπο παραγωγής τους (βλ. Π.Α.Α.Φ. (§ 3.4.8)) είναι γκαουσιανής μορφής και η ακτίνα τους $w(z)$ σε απόσταση z από τη ***μέση (waist)*** τους, ακτίνας w_o (Σχ. 8.3.3.1) δίνεται από τη σχέση:

$$w(z) = w_o\left[1+\left(\frac{\lambda'^2 z^2}{\pi^2 w_o^4}\right)\right]^{1/2} \tag{8.3.3.1}$$

όπου $\lambda' = \lambda/n$ το μ.κ. στο εσωτερικό του κρυστάλλου και λ το μ.κ. στο κενό. Όπως έχουμε ήδη αναφέρει, βασική προϋπόθεση για την όσο το δυνατόν χαμηλή ενεργειακή απαίτηση λειτουργίας ενός διαμορφωτή, είναι η όσο το δυνατόν μικρότερη επιτυγχανόμενη τάση του μισού μ.κ. V_π. Για τους εγκαρσίου τύπου διαμορφωτές η τελευταία ελέγχεται από το λόγο d/L και είναι επιθυμητή η μικρότερη δυνατή τιμή του d. Για έναν κρύσταλλο μήκους L που τον διατρέχει μια γκαουσιανού τύπου δέσμη φωτός, της οποίας η μέση (waist) w_o θεωρείται ότι βρίσκεται στο κέντρο του δηλ. σε απόσταση $z = L/2$ από την αρχή του, η διάμετρός της d (πλάτος του κρυστάλλου) θα είναι:

$$d = 2w(z = L/2) = 2w_o\left[1+\frac{\lambda'^2 L^2}{4\pi^2 w_o^4}\right]^{1/2} \tag{8.3.3.2}$$

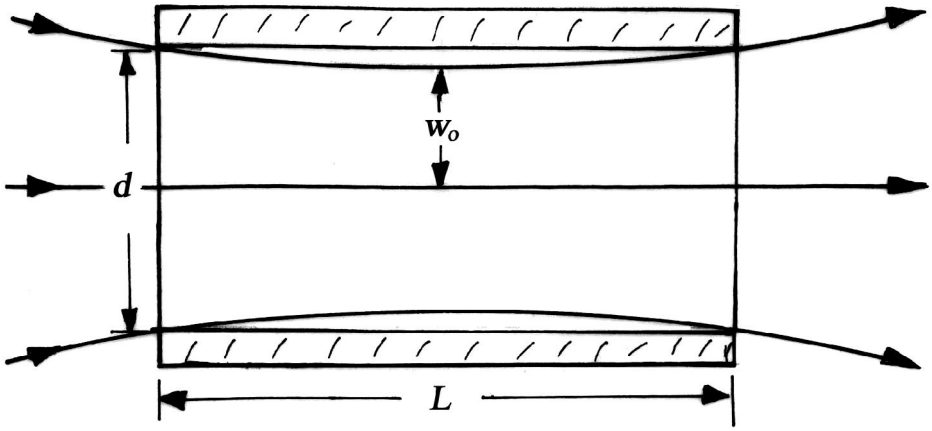
Διαφορίζοντας τη (σχ.8.3.3.2) ως προς w_o, $\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}w_o}(d) = 0\right)$ και εξισώνοντας με το μηδέν, βρίσκουμε την άριστη από τις τιμές των w_o για την οποία το πλάτος του κρυστάλλου d θα είναι το ελάχιστο. Αυτό θα είναι:

$$w_o = \sqrt{\lambda' L/2\pi} \tag{8.3.3.3}$$

και αντικαθιστώντας το στη (σχ. 8.3.3.2) θα έχουμε:

$$d = 2\sqrt{\lambda' L/\pi} \tag{8.3.3.4}$$

Για δοσμένο λοιπόν μήκος κρυστάλλου, από την τελευταία σχέση βρίσκουμε το επιθυμητό ελάχιστο d. Στην πράξη για λόγους ασφάλειας το $d_{\min}$ πολλαπλασιάζεται με έναν παράγοντα S όπου $3 \le S \le 6$ οπότε θα έχουμε:



(Σχ. 8.3.3.1)

$$d_{\min} = 2S\sqrt{\lambda' L/\pi} \qquad (8.3.3.5)$$

Παράδειγμα

Θέλουμε να διαμορφώσουμε μέσω του εγκαρσίου τύπου, μια δέσμη φωτός από Laser He-Ne μ.κ. $\lambda = 0.6328\mu\text{m}$ με διαμορφωτή από κρύσταλλο KDP μήκους $L = 1\text{cm}$. Επειδή για τον κρύσταλλο αυτό $n_o = 1.51$ και $r_{63} = 10.5 \times 10^{-12}\ \text{m/V}$, αν επιλέξουμε $S = 4$ από τη (σχ. 8.3.3.5) για $\lambda' = \lambda/n_o$ βρίσκουμε: $d \simeq 0.3\text{mm}$. Προκειμένου βέβαια η δέσμη του Laser που τυπικά η διάμετρός της είναι 2mm να περάσει από τον διαμορφωτή διατομής τώρα $\simeq 0.3 \times 0.3\text{mm}^2$ θα πρέπει να 'εστιαστεί' όπως φαίνεται στο (Σχ. 8.3.3.1) μέσω ενός συγκλίνοντος φακού. Επίσης με τη βοήθεια της (σχ. 8.3.1.26): $V_\pi = \dfrac{\lambda}{n_o^3 r_{63}}\left(\dfrac{d}{L}\right)$ βρίσκουμε ότι η τάση του μισού μ.κ. έχει την τιμή $V_\pi \simeq 530\text{V}$. Σε αντιδιαστολή, η τιμή του V_π για τον επιμήκη τύπο διαμόρφωσης από τη (σχ. 8.3.1.5): $V_\pi = \lambda/2n_o^3 r_{63}$ μας δίνει τιμή $V_\pi \simeq 8.75\text{kV}$.

Λειτουργία των διαμορφωτών σε τμήμα ηλ. κυκλώματος[*]

[*] A. Ghatak and K. Thyagarajan: 'Optical Electronics' Cambridge Univ. Press. Cambridge N.Y. (1989). Ch. 15.5.4 : ‘Circuit aspect of modulators’.

Στα αρχικά στάδια της μελέτης μας προκειμένου να υπολογίσουμε τη διαφορά φάσης μεταξύ των δύο ιδιοκαταστάσεων (ή την καθυστέρηση φάσης για μία από αυτές) όπως και άλλα στοιχεία διαμόρφωσης κατά τη διάδοση σ' ένα κρύσταλλο δεχτήκαμε ότι ισχύουν οι εξής συνθήκες: α) Το διαμορφώνον ηλ. πεδίο κατά μήκος του L στο εσωτερικό του κρυστάλλου είναι ομογενές και β) Το διαμορφώνον ηλ. πεδίο ήταν σταθερό καθ' όλη τη διάρκεια του χρόνου που χρειαζόταν το φως να διανύσει το μήκος L του κρυστάλλου. Η πρώτη συνθήκη πληρούται όταν το μ.κ. λ_m του διαμορφώνοντος ηλ. πεδίου στο εσωτερικό του κρυστάλλου είναι πολύ μεγαλύτερο του L. Και επειδή $\upsilon_m = \omega_m / k_m$ όπως και $k_m = 2\pi/\lambda_m$ θα είναι: $\lambda_m = 2\pi\upsilon_m/\omega_m$. Επειδή όμως $\upsilon_m = c/\sqrt{K}$ όπου K η διηλεκτρική σταθερή μετρημένη στη συχνότητα ω_m τότε θα πρέπει:

$$\lambda_m = \frac{2\pi c}{\omega_m\sqrt{K}} \gg L \quad \text{ή} \quad L \ll \frac{2\pi c}{\omega_m\sqrt{K}} \tag{8.3.3.6}$$

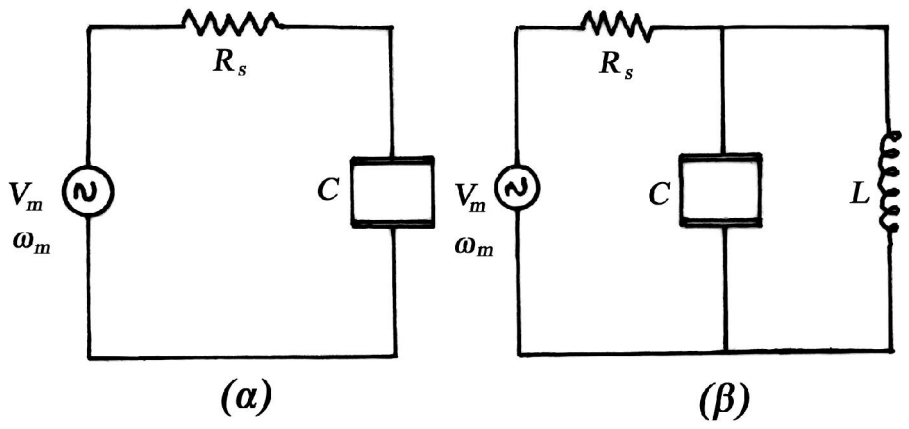
Για να ισχύει η δεύτερη συνθήκη θα πρέπει να είναι: $\tau_d \ll \tau_m$. Όπου $\tau_d = nL/c$ είναι ο χρόνος μετάβασης του φωτός κατά το μήκος L του κρυστάλλου και $\tau_m = 1/\nu_m = 2\pi/\omega_m$ η περίοδος ταλάντωσης του θεωρούμενου αρμονικού διαμορφώνοντος ηλ. πεδίου. Δηλ.

$$\tau_d = \frac{nL}{c} \ll \frac{2\pi}{\omega_m} \quad \text{ή} \quad L \ll \frac{2\pi c}{\omega_m n} \tag{8.3.3.7}$$

Επειδή $\sqrt{K} \geq n$ (για το KDP $K = 21$, $n_o = 1.51$), τότε αν ισχύει η (σχ. 8.3.3.6) θα ισχύει και η (σχ. 8.3.3.7).

Ένας ευμεγέθης διαμορφωτής μπορεί να θεωρηθεί σαν πυκνωτής ο οποίος λόγω της διηλεκτρικής φύσης του δεν καταναλώνει ενέργεια. Προκειμένου όμως να εφαρμόσουμε σ' αυτόν την διαμορφώνουσα διαφορά δυναμικού V_m με τρόπο αποδοτικό, θα πρέπει το τελευταίο να γίνει μέσω ενός ηλεκτρικού κυκλώματος το οποίο περιλαμβάνει και άλλα παθητικά στοιχεία όπως αντιστάσεις, πηνία κ.τ.λ. Μόνο μ' αυτόν τον τρόπο θα γίνει προσαρμογή (matching) της σύνθετης αντίστασης (impedance) της τροφοδοτούσας πηγής με το σύστημα του διαμορφωτή. Η μελέτη αυτής της διαδικασίας έχει ιδιαίτερο ενδιαφέρον επειδή επιβάλλει κατώτερα όρια (ή περιοχές – μπάντες) για τις διαμορφώνουσες συχνότητες ω_m καλής λειτουργίας του διαμορφωτή.

Στο (Σχ. 8.3.3.2α) φαίνεται ένας από τους τρόπους συνδεσμολογίας του διαμορφωτή με μια πηγή εναλλασσόμενης τάσης $V = V_m \cos \omega_m t$. Όπου ω_m η δια-



(Σχ. 8.3.3.2)

μορφώνουσα συχνότητα και R_s η ωμική αντίσταση του κυκλώματος συμπεριλαμβανομένης και της εσωτερικής αντίστασης της πηγής. Με τη σύνθετη αντίσταση του κυκλώματος να δίνεται από τη σχέση: $Z = R_s + \left(1/j\omega_m C\right)$ όπου C η χωρητικότητα του πυκνωτή, η πτώση τάσης V_c στα άκρα του θα δίνεται από την:

$$V_c = V_m / \left(1 + j\omega_m C R_s\right) \tag{8.3.3.8}$$

Για πολύ μικρές τιμές διαμορφούντων συχνοτήτων ($\omega_m \ll 1/CR_s$) θα είναι $V_c = V_m$. Δηλ. θα έχουμε πολύ μικρή πτώση τάσης στην αντίσταση R_s και η τάση της πηγής θα μεταφέρεται σχεδόν εξ' ολοκλήρου στα άκρα του διαμορφωτή. Αν σταδιακά η συχνότητα ω_m αυξάνεται, τότε η πτώση τάσης στα άκρα του διαμορφωτή θα ελαττώνεται και για:

$$\omega_m = \omega_o = 1/CR_s \tag{8.3.3.9}$$

θα είναι: $V_c = V_m / (1 - j) = \left(V_m / \sqrt{2}\right) e^{-\pi/4}$. Δηλ. το πλάτος της διαφοράς δυναμικού στα άκρα του θα είναι $V_m / \sqrt{2}$. Η συχνότητα διαμόρφωσης για την οποία συμβαίνει αυτό, ονομάζεται ***συχνότητα κατωφλίου (cutoff frequency)*** του διαμορφωτή. Είναι φανερό ότι αυτός ο τρόπος τροφοδοσίας του διαμορφωτή μας παρέχει ένα κα-

τώτερο όριο για τη διαμόρφωση της συχνότητας (την $\omega_m = \omega_o$) μεταξύ της περιοχής $0 < \omega_m \le \omega_o$, προκειμένου η τάση της πηγής να εφαρμόζεται αυτούσια σχεδόν στα άκρα του διαμορφωτή και όχι στις ωμικές αντιστάσεις. Αναφέρουμε παρεμπιπτόντως ότι ο υπολογισμός της χωρητικότητας C του διαμορφωτή γίνεται με τη βοήθεια του γνωστού τύπου (στο σύστημα S.I.):

$$C = \varepsilon_o K \frac{S}{d} = \varepsilon_o K \frac{d \cdot L}{d} = \varepsilon_o K L \qquad (8.3.3.10)$$

όπου $\varepsilon_o = 8.854 \times 10^{-12}\ \mathrm{C^2/N \cdot m^2}$, K η διηλεκτρική σταθερή και L το μήκος του κρυστάλλου.

Στην περίπτωση που ο κρύσταλλος τροφοδοτείται μέσω ενός κυκλώματος όπως αυτό φαίνεται στο (Σχ. 8.3.3.2β), τότε η σύνθετη αντίστασή του θα δίνεται από τη σχέση: $Z = R_s + \left(j\omega_m C + \dfrac{1}{j\omega_m \mathrm{L}} \right)^{-1}$ όπου L η αυτεπαγωγή του πηνίου. Αποδεικνύεται τότε ότι η πτώση τάσης V κατά μήκος του διαμορφωτή δίνεται από τη σχέση:

$$V = \frac{\omega_m \mathrm{L} V_m}{\left[R_s^2 \left(1 - \omega_m^2 / \omega_o^2 \right)^2 + \omega_m^2 \mathrm{L}^2 \right]^{1/2}} e^{j\left\{ \frac{\pi}{2} - \arctan\left[\frac{\omega_m \mathrm{L}}{R_s \left(1 - \omega_m^2 / \omega_o^2 \right)} \right] \right\}} \qquad (8.3.3.11)$$

όπου $\omega_o^2 = 1/C\mathrm{L}$. Από την τελευταία σχέση βλέπουμε ότι για $\omega_m = \omega = 1/\sqrt{\mathrm{L}C}$ θα έχουμε $V = V_m$, δηλ. στα άκρα του διαμορφωτή θα έχουμε τη μέγιστη πτώση τάσης όση το πλάτος V_m της πηγής. Επίσης μπορεί ν' αποδειχθεί μέσω της ίδιας σχέσης ότι η πτώση τάσης V κατά μήκος του διαμορφωτή παίρνει προσεγγιστικά την τιμή $V = V_m / \sqrt{2}$ όταν: $\omega_o - \Delta\omega_m / 2 < \omega_m < \omega_o + \Delta\omega_m / 2$ όπου:

$$\Delta\omega_m \simeq 1/CR_s \qquad (8.3.3.12)$$

και η $\Delta\omega_m$ παριστάνει το εύρος ζώνης επαρκούς καλής λειτουργίας του διαμορφωτή. Τη συχνότητα συντονισμού μπορούμε να την προσδιορίσουμε με κατάλληλη επιλογή της επαγωγής L του πηνίου μέσω της σχέσης $\omega_o = 1/\sqrt{\mathrm{CL}}$. Επίσης το εύρος ζώνης συχνοτήτων που δίνεται από τη (σχ. 8.3.3.12) είναι επιθυμητό να έχει

μεγάλες τιμές, επειδή από το εύρος αυτό εξαρτάται η ποσότητα των πληροφοριών που προσάπτονται στη φέρουσα συχνότητα του φωτός μέσω της διαμόρφωσης.

Τέλος μια σπουδαία παράμετρος που χαρακτηρίζει είναι διαμορφωτή είναι ο λόγος $P/\Delta f$. Όπου P η ισχύς λειτουργίας του διαμορφωτή που απαιτείται ανά μονάδα εύρους συχνοτήτων $\Delta f\left(\Delta\omega_m = 2\pi\Delta f\right)$ προκειμένου να επιτευχθεί ένα καθορισμένο βάθος διαμόρφωσης. Όπως ήδη έχουμε αναφέρει, ο διαμορφωτής σαν καθαρή χωρητικότητα δεν καταναλώνει ενέργεια. Όχι όμως και οι ωμικές αντιστάσεις του κυκλώματος οι οποίες τροφοδοτούνται από την διαμορφώνουσα πηγή. Κάτω από ορισμένες συνθήκες αποδεικνύεται ότι στους εγκάρσιου τύπου διαμορφωτές από κρυστάλλους KDP και $LiNbO_3$ ο λόγος $P/\Delta f$ δίνεται από τις σχέσεις:

$$\left(P/\Delta f\right)_{\mathrm{KDP}} = \frac{\varepsilon_o \mathrm{K}\lambda^3 S^2}{n_o^7 r_{63}^2} \quad (8.3.3.13) \qquad \left(P/\Delta f\right)_{\mathrm{LiNbO3}} = \frac{\varepsilon_o \mathrm{K}\lambda^3 S^2}{n_o\left(n_e^3 r_{33} - n_o^3 r_{13}\right)^2} \quad (8.3.3.14)$$

όπου S ο γνωστός παράγοντας ασφάλειας $\left(3 \le S \le 6\right)$ που επιβάλλεται λόγω των γεωμετρικών χαρακτηριστικών των διαμορφωτών. Αντικαθιστώντας $\mathrm{K} = 21$ για το KDP και $\mathrm{K} = 28$ για το $LiNbO_3$ όπως και τα υπόλοιπα γνωστά στοιχεία στις δύο προηγούμενες σχέσεις βρίσκουμε για $\lambda = 0.6328\mu\mathrm{m}$:

$$\left(P/\Delta f\right)_{\mathrm{KDP}} \simeq 24S^2\ \mathrm{mW/MHz} \qquad (8.3.3.15)$$

$$\left(P/\Delta f\right)_{\mathrm{LiNbO3}} \simeq 0.54S^2\ \mathrm{mW/MHz} \qquad (8.3.3.16)$$

Συγκρίνοντας τις δύο τελευταίες σχέσεις, βλέπουμε τη σαφή υπεροχή των διαμορφωτών από κρυστάλλους $LiNbO_3$, όσον αφορά τη μικρότερη κατανάλωση ισχύος ανά μονάδα εύρους των διαμορφωνουσών συχνοτήτων. Π.χ. για τη λειτουργία ενός τέτοιου διαμορφωτή (εγκάρσιου τύπου διαμόρφωσης) και για άριστες συνθήκες διαμόρφωσης ($\nu = \nu_m$) με $S = 5$ και εύρους ζώνης συχνοτήτων $\Delta\nu = 50\mathrm{MHz}$ η κατανάλωση ισχύος από τη (σχ. 8.3.3.16) θα είναι (για τάση μισού μ.κ. $V_\pi \simeq 100\mathrm{V}$): $P = 0.54 \times 5^2 \times 50 \simeq 675\mathrm{mW}$.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ 1

*Σύντομος οδηγός για την ανάδειξη των Η/Μ εξισώσεων του Maxwell στο κενό και σε ομογενή και ισότροπα υλικά**. *Η/Μ κύματα*

Οι εξισώσεις του Maxwell που αφορούν τη διάδοση των Η/Μ κυμάτων σ' ένα μέσο ή στο κενό, είναι απόρροια των νόμων που διέπουν τα ηλεκτρικά και τα μαγνητικά πεδία. Κατ' αρχή των ηλεκτροστατικών και μαγνητοστατικών πεδίων και κατά προέκταση των αντίστοιχων δυναμικών δηλ. αυτών που μεταβάλλονται χρονικά. Το θεμελιώδες συμπέρασμα στο οποίο καταλήγει αυτή η θεωρία, είναι ότι μεταξύ των δύο πεδίων υφίσταται τέτοια συνάφεια και συμμετρία έτσι που η χρονική μεταβολή του ενός να έχει σαν αποτέλεσμα τη δημιουργία του άλλου κ.ο.κ. γεγονός πού αναδεικνύει τελικά την κυματική τους φύση. Δηλ. το ότι συνυπάρχουν στο χώρο (ακόμα και εκτός περιοχών από φορτία και ρεύματα), διαδιδόμενα με μια ορισμένη ταχύτητα και μεταφέροντας ενέργεια, ορμή ή και στροφορμή.

Για να πετύχουμε το σκοπό μας, θα χρησιμοποιήσουμε από μαθηματική άποψη το στοιχειώδη διανυσματικό διαφορικό και ολοκληρωτικό λογισμό και ιδιαιτέρα τα δύο θεωρήματα των Ostrogradsky-Gauss και Stokes. Τα τελευταία αφορούν ιδιότητες διανυσματικών πεδίων στο χώρο των τριών διαστάσεων και εκφράζονται ως εξής:

1) Θεώρημα των Ostrogradsky-Gauss

Έστω $\mathbf{u}$ ένα διανυσματικό πεδίο που σε καρτεσιανό π.χ. σύστημα συντεταγμένων εκφράζεται από τη σχέση:

$$\mathbf{u} = u_x(x,y,z)\mathbf{i} + u_y(x,y,z)\mathbf{j} + u_z(x,y,z)\mathbf{k}$$

Τότε η ροή $\Phi_u = \oiint_S \mathbf{u} \cdot d\mathbf{S}$ του διανύσματος $\mathbf{u}$ διά μίας κλειστής επιφάνειας S σ' αυτόν τον χώρο θα είναι ίση με το ολοκλήρωμα του όγκου $\iiint_V \nabla\mathbf{u}\, dV$ της απόκλισης ($\nabla\mathbf{u} \equiv div\mathbf{u}$) του πεδίου $\mathbf{u}$. Όπου:

* I.V. Savelyev: 'Physics'. Vol. II (Sec. Printing). Mir Publishers. Moscow (1985).

$$div\mathbf{u} \equiv \nabla\mathbf{u} = \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \tag{1.1}$$

Κατά τα γνωστά, η ροή Φ_u του $\mathbf{u}$ με βάση την περιγραφή ενός διανυσματικού πεδίου με τη βοήθεια των ***δυναμικών γραμμών*** (γεωμετρική παράσταση) του πεδίου θα δίνεται από τη σχέση:

$$\Phi_u(=)N_{big.} - N_{ter.} \tag{1.2}$$

Δηλ. θα είναι το αλγεβρικό άθροισμα των δυναμικών γραμμών που ξεκινάνε και αυτών που τερματίζουν στο εσωτερικό της επιφάνειας S που περικλείει τον όγκο V. Είναι λοιπόν η μαθηματική έκφραση του θεωρήματος των Ostrogradsky-Gauss η εξής:

$$\oiint_S \mathbf{u} \cdot d\mathbf{S} = \iiint_V \nabla\mathbf{u} dV \tag{1.3}$$

όπου $d\mathbf{S}$ το μοναδιαίο διάνυσμα μέτρου dS και φοράς αυτής του $\mathbf{n}$ ($d\mathbf{S} = dS\mathbf{n}$) που είναι κάθετο στην επιφάνεια που περικλείει τον όγκο V με διεύθυνση προς τα έξω και dV ο στοιχειώδης όγκος. Το $\mathbf{u}$ στη (σχ. 1.3) θ' αντικατασταθεί από τα διανυσματικά πεδία $\mathbf{E}$ (ένταση ηλεκτρικού πεδίου) ή $\mathbf{B}$ (μαγνητική επαγωγή) ή από οποιοδήποτε άλλο διανυσματικό πεδίο απαιτηθεί.

2) Θεώρημα του Stokes

Έστω $\mathbf{u}$ το διανυσματικό πεδίο που ορίσαμε προηγουμένως. Τότε η κυκλοφορία $C = \oint_\Gamma \mathbf{u} \cdot d\mathbf{l}$ του διανύσματος $\mathbf{u}$ κατά μήκος μιας τυχαίας κλειστής τροχιάς Γ στο πεδίο, θα είναι ίση με την ροή της στροφής του διανύσματος $\mathbf{u}$ ($\nabla \times \mathbf{u} \equiv curl\mathbf{u}$) δηλ. της $\iint_S (\nabla \times \mathbf{u}) \cdot d\mathbf{S}$ διά μέσου μίας τυχαίας επιφάνειας S με τα όριά της επί της τροχιάς Γ. Όπου:

$$\nabla \times \mathbf{u} = \left(\frac{\partial u_z}{\partial y} - \frac{\partial u_y}{\partial z}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial x}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y}\right)\mathbf{k} \tag{2.1}$$

Η μαθηματική λοιπόν έκφραση του θεωρήματος του Stokes είναι η εξής:

$$\oint_{\Gamma} \mathbf{u} \cdot d\mathbf{l} = \iint_{S} (\nabla \times \mathbf{u}) \cdot d\mathbf{S} \tag{2.2}$$

όπου $d\mathbf{l}$ το στοιχειώδες μήκος κατά μήκος της τροχιάς Γ και το $d\mathbf{S}$ είναι αυτό όπως ορίστηκε προηγουμένως.

A) Ηλεκτροστατικό και μαγνητοστατικό πεδίο

1) Κυκλοφορία και στροφή του ηλεκτροστατικού πεδίου

Είναι γνωστό ότι επειδή οι δυνάμεις που ασκούνται μεταξύ των ηλεκτρικών φορτίων (σ' ένα πεδίο Coulomb) είναι κεντρικές, τότε το ηλεκτρικό πεδίο $\mathbf{E}$ είναι συντηρητικό. Κάτω από αυτές τις συνθήκες το έργο A αυτών των δυνάμεων επί μίας τυχαίας κλειστής τροχιάς στο εσωτερικό του πεδίου είναι μηδέν. Δηλαδή:

$$A = \oint_{\Gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = \oint_{\Gamma} q\mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0 \tag{A 1.1}$$

Οπότε:

$$\oint_{\Gamma} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0 \tag{A 1.2}$$

Με βάση όμως το θεώρημα του Stokes:

$$\oint_{\Gamma} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \iint_{S} \left(\nabla \times \mathbf{E}\right) \cdot d\mathbf{S} = 0 \tag{A 1.3}$$

Προκειμένου όμως η (σχ. A1.3) να ισχύει για τυχαία επιφάνεια επί της τροχιάς Γ στο πεδίο $\mathbf{E}$, θα πρέπει η υπό ολοκλήρωση ποσότητα $\nabla \times \mathbf{E}$ να ισούται με μηδέν.

Άρα:

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0 \tag{A 1.4}$$

Δηλ. το ηλεκτροστατικό πεδίο $\mathbf{E}$ είναι όπως λέγεται (εφόσον ισχύει η (σχ. A1.4)) ***αστρόβιλο (non-circuital)***.

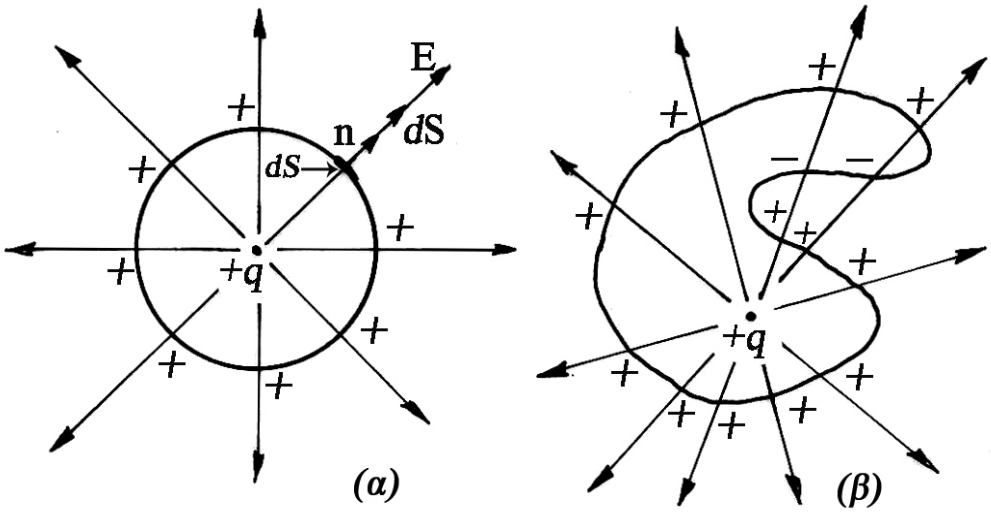
2) Θεώρημα του Gauss

α) Ολοκληρωτική μορφή

Είναι εύκολο ν' αποδειχθεί ότι η ροή Φ_E που προκύπτει από ένα φορτίο (έστω $+q$) έχει την τιμή $\Phi_E = q/\varepsilon_0$ όπου $\varepsilon_0 = 8.85\times10^{-12}$ F/m η ***ηλεκτρική διαπερατότητα(electric permittivity) του κενού***. Πράγματι (Σχ. Α2.1α), διά μίας νοητής κλειστής επιφάνειας με τη μορφή σφαίρας ακτίνας R που περιβάλλει το φορτίο $+q$ και που βρίσκεται στο κέντρο της θα έχουμε:

$$\Phi_E = \oiint_S \mathbf{E}\cdot d\mathbf{S} = \oiint_S EdS = E\oiint_S dS = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{R^2}4\pi R^2 = \frac{q}{\varepsilon_0} \qquad \text{(A2.1)}$$

επειδή $\mathbf{E} // d\mathbf{S}$. Στο ίδιο αποτέλεσμα οδηγούμαστε και στην περίπτωση που η επιφάνεια είναι τυχαίου σχήματος (Σχ. Α2.1β) με βάση τον ορισμό για την Φ_E (σχ. 1.2).



(Σχ. Α2.1)

Αν τώρα η τυχαία επιφάνεια S περιβάλλει N τον αριθμό φορτία, τότε η Φ_E θα είναι:

$$\Phi_E = \oiint_S \mathbf{E}\cdot d\mathbf{S} = \oiint_S (\sum_{i=1}^{N}\mathbf{E}_i)\cdot d\mathbf{S} = \sum_{i=1}^{N}\oiint_S \mathbf{E}_i\cdot d\mathbf{S} \qquad \text{(A2.2)}$$

Και επειδή: $\oiint_S \mathbf{E}_i\cdot d\mathbf{S} = q_i/\varepsilon_0$

θα έχουμε: $$\Phi_E = \oiint_S \mathbf{E}\cdot d\mathbf{S} = \frac{1}{\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{N} q_i \qquad \text{(A2.3)}$$

όπου για την απόδειξη χρησιμοποιήσαμε την αρχή της επαλληλίας ($\mathbf{E} = \sum \mathbf{E}_i$) για την ένταση του ηλεκτρικού πεδίου. Η (σχ. Α2.3) που ονομάζεται ***θεώρημα του Gauss*** είναι μια πολύ χρήσιμη σχέση, προκειμένου να μπορούμε να υπολογίζουμε ηλεκτρικά πεδία που προέρχονται από συγκεκριμένες κατανομές φορτίων.

β) Διαφορική μορφή

Αν τώρα θεωρήσουμε ότι έχουμε μια συνεχή κατανομή φορτίων στο χώρο με πυκνότητα $\rho = \rho(x, y, z)$ θα είναι: $\rho = dq/dV$ όπου dq η στοιχειώδης ποσότητα φορτίου που περιλαμβάνεται στον στοιχειώδη όγκο dV. Επομένως:

$$\sum q_i = \iiint_V \rho dV \qquad \text{(A2.4)}$$

Και η (σχ. Α2.3) γίνεται:

$$\oiint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{1}{\varepsilon_0} \iiint_V \rho dV \qquad \text{(A2.5)}$$

Αλλά με τη βοήθεια του θεωρήματος των Ostrogradsky-Gauss θα έχουμε:

$$\oiint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \iiint_V \nabla \mathbf{E} dV = \frac{1}{\varepsilon_0} \iiint_V \rho dV \qquad \text{(A2.6)}$$

Για να ισχύει η τελευταία για οποιοδήποτε όγκο V στο εσωτερικό του πεδίου θα πρέπει να είναι ίσες οι υπό ολοκλήρωση ποσότητες. Άρα:

$$\nabla \mathbf{E} = \rho / \varepsilon_0 \qquad \text{(A2.7)}$$

Από φυσική άποψη η τελευταία εκφράζει το γεγονός ότι μια κατανομή φορτίων στο χώρο δημιουργεί ηλεκτρικό πεδίο.

3) Πόλωση των διηλεκτρικών και τα διανυσματικά πεδία **D** *και* **P**

Διηλεκτρικά (ή μονωτές) είναι τα υλικά που η αγωγιμότητά τους είναι μικρότερη κατά 15-20 τάξεις μεγέθους σε σχέση με τους αγωγούς (βλ. ΕΡΓΑΣ/ΚΗ ΟΠΤΙΚΗ [5]: Π.Α.Α.Φ. (§ 3.4.7.1)). Όταν εξετάζουμε τα στατικά ηλεκτρικά πεδία που αναπτύσσονται σ' αυτά, θα πρέπει να λάβουμε υπόψη μας ότι τα τελευταία δεν

δημιουργούνται μόνο από τις συνήθεις κατανομές φορτίων ρ (εντός και εκτός τους) και τα οποία ονομάζουμε ***εξωγενή(extraneous)*** φορτία. Πράγματι η επίδραση ήλ. πεδίου μπορεί ν' αναπτύξει και τα λεγόμενα φορτία πόλωσης (βλ. ΕΡΓΑΣΤ/ΚΗ ΟΠΤΙΚΗ [5]: Π.Α.Α.Φ. (§ 4.1)) πυκνότητας ρ' που οφείλονται κατά κύριο λόγο στις μετατοπίσεις των κέντρων βάρους θετικών και αρνητικών φορτίων με τη βοήθεια διαφόρων μηχανισμών. Τα τελευταία ονομάζονται ***δέσμια(bound)*** και παρά το ότι δεν μπορούν να μετακινηθούν στο εσωτερικό του υλικού, εντούτοις συνεισφέρουν στη διαμόρφωση του συνολικού ηλεκτρικού πεδίου στο εσωτερικό του. Επομένως στην περίπτωση αυτή η (σχ. Α2.7) παίρνει τη μορφή:

$$\nabla \mathbf{E} = \frac{\rho + \rho'}{\varepsilon_0} \tag{A3.1}$$

Αποδεικνύεται ότι:

$$\rho' = -\nabla \mathbf{P} \tag{A3.2}$$

όπου $\mathbf{P}$ είναι ένα διάνυσμα που ονομάζεται ***πόλωση του διηλεκτρικού (polarization of a dielectric)*** και δίνεται από τη σχέση:

$$\mathbf{P} = \frac{\sum \mathbf{p}_i}{\Delta V} \tag{A3.3}$$

όπου $\sum \mathbf{p}_i$ το άθροισμα των ηλεκτρικών διπολικών ροπών στο στοιχειώδη όγκο ΔV.

Ηλεκτρικό δίπολο είναι μια κατανομή δύο ίσων και αντιθέτου πρόσημου φορτίων τα οποία βρίσκονται σε μια ορισμένη απόσταση μεταξύ τους. Αποδεικνύεται ότι τα μόρια στην ύλη μπορούν να συμπεριφερθούν σαν ηλεκτρικά δίπολα. Το μέτρο της ηλεκτρικής διπολικής ροπής (βλ. ΕΡΓΑΣΤ/ΚΗ ΟΠΤΙΚΗ [5]: Π.Α.Α.Φ. (§ 4.1)) είναι το γινόμενο του ενός των φορτίων του επί την απόσταση μεταξύ τους. Η επίδραση ηλ. πεδίου στην ύλη έχει σαν αποτέλεσμα την εμφάνιση διπόλων άρα και μίας συνολικής ηλ. διπολικής ροπής ανά μονάδα όγκου. Η τελευταία, μέσω του διανύσματος της πόλωσης του διηλεκτρικού καθορίζει την πυκνότητα ρ' των φορτίων πόλωσης τα οποία συνεισφέρουν στη διαμόρφωση του συνολικού πεδίου στο εσωτερικό του διηλεκτρικού. Είναι επίσης γνωστό ότι:

$$\mathbf{P} = \chi \varepsilon_0 \mathbf{E} \tag{A3.4}$$

όπου χ η ***ηλεκτρική επιδεκτικότητα (electric susceptibility)*** του μέσου και $\mathbf{E}$ το συνιστάμενο πεδίο στο εσωτερικό του διηλεκτρικού. Η αντικατάσταση της (σχ. Α3.2) στην (σχ. Α3.1) μας δίνει:

$$\nabla\left(\varepsilon_0\mathbf{E}+\mathbf{P}\right)=\rho \qquad \text{(A3.5)}$$

Το μέγεθος $\mathbf{D}=\varepsilon_0\mathbf{E}+\mathbf{P}$ (Α3.6)

το ονομάζουμε ***ηλεκτρική μετατόπιση(electric displacement)***. Επομένως:

$$\nabla\mathbf{D}=\rho \qquad \text{(A3.7)}$$

Πρόκειται για ένα βοηθητικό διανυσματικό μέγεθος που χρησιμοποιείται όταν εξετάζουμε τα ηλεκτρικά πεδία στην ύλη. Βλέπουμε ότι ο υπολογισμός του εξαρτάται μόνο από την κατανομή των εξωγενών φορτίων. Τότε με τη βοήθεια των σχέσεων (Α3.6) και (Α3.4) είναι πιο εύκολος ο υπολογισμός του $\mathbf{E}$ στο εσωτερικό του διηλεκτρικού σε σχέση με το αν αυτό επιδιωχθεί μέσω της πολύ πιο περίπλοκης σχέσης (Α3.1).

Από τις σχέσεις (Α3.6) και (Α3.4) θα έχουμε:

$$\mathbf{D}=\varepsilon_0\mathbf{E}+\mathbf{P}=\varepsilon_0\mathbf{E}+\chi\varepsilon_0\mathbf{E}=\varepsilon_0\left(1+\chi\right)\mathbf{E}=\varepsilon_0 k_e\mathbf{E}=\varepsilon\mathbf{E} \qquad \text{(A3.8)}$$

Όπου: $k_e=\varepsilon/\varepsilon_0$, $k_e=1+\chi$ η στατική ***διηλεκτρική σταθερή(dielectric constant)*** του μέσου και ε: η ***ηλεκτρική διαπερατότητα(electric permittivity)*** του μέσου. Η συγγραμμικότητα μεταξύ των $\mathbf{D}$ και $\mathbf{E}$ ισχύει μόνο για ομογενή και ισότροπα υλικά.

4) Συνεχή ηλεκτρικά ρεύματα. Νόμος της συνέχειας (αρχή διατήρησης των φορτίων). Διαφορικός νόμος του Ohm

Αν ένα ηλεκτρικό φορτίο συνολικά διάφορο του μηδενός διαπερνά μια υποθετική επιφάνεια στο εσωτερικό ενός υλικού (στερεού, υγρού ή αερίου), τότε θα λέμε ότι από την επιφάνεια αυτή διέρχεται ηλεκτρικό ρεύμα. Για να συμβαίνει αυτό θα πρέπει το υλικό να διαθέτει ηλεκτρικούς φορείς. Τέτοιους διαθέτουν ως επί το πλείστον οι αγωγοί (κυρίως τα μέταλλα) (βλ. ΕΡΓΑΣΤ/ΚΗ ΟΠΤΙΚΗ [5]: Π.Α.Α.Φ. (§ 3.4.7.1)) και σε μικρότερο βαθμό οι ημιαγωγοί και τα διηλεκτρικά. Αν παραλείψουμε τον μέσο χρονικό όρο που οφείλεται στη θερμική κίνηση των φορέων, τότε μπορούμε να πούμε ότι το ηλεκτρικό ρεύμα οφείλεται μόνο στη διατεταγ-

μένη κίνηση των φορέων της οποίας γενεσιουργός αιτία είναι η εφαρμογή ηλεκτρικού πεδίου.

Σαν ένταση ηλεκτρικού ρεύματος ορίζουμε το φορτίο που περνάει από μια επιφάνεια στη μονάδα του χρόνου δηλ.

$$I = dq/dt \tag{A4.1}$$

Αν όμως το ρεύμα διά μέσου αυτής της επιφάνειας δεν κατανέμεται ομοιόμορφα, τότε το τελευταίο περιγράφεται από ένα πιο ακριβές διανυσματικό μέγεθος το οποίο ονομάζεται ***πυκνότητα ρεύματος(current density)*** $\mathbf{j}$ και το μέτρο του δίνεται (σε ένα σημείο του αγωγού) από τη σχέση:

$$j = dI/dS_{\perp} \tag{A4.2}$$

Δηλ. πρόκειται για την ένταση του ρεύματος διά μέσου της επιφάνειας $dS_{\perp}$ στο σημείο αυτό και η οποία είναι προσανατολισμένη κάθετα προς τη διεύθυνση κίνησης των ηλεκ. φορέων. Με βάση τον τελευταίο ορισμό αν είναι γνωστή η $\mathbf{j}$ σε κάθε σημείο του χώρου, τότε θα έχουμε:

$$\Phi_j = I = \oiint_S \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S} \tag{A4.3}$$

Δηλ. η ροή της $\mathbf{j}$ είναι ίση με την ένταση I του ρεύματος.

Αρχή διατήρησης των ηλεκτρικών φορτίων

Αν τώρα θεωρήσουμε μια πεπερασμένη επιφάνεια S που περιβάλλει ένα τμήμα του αγωγού που διαρρέεται από ρεύμα, τότε η $\oiint_S \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S}$ θα μας δίνει το φορτίο το οποίο αναδύεται από την επιφάνεια S στη μονάδα του χρόνου (Σχ. Α4.1α).

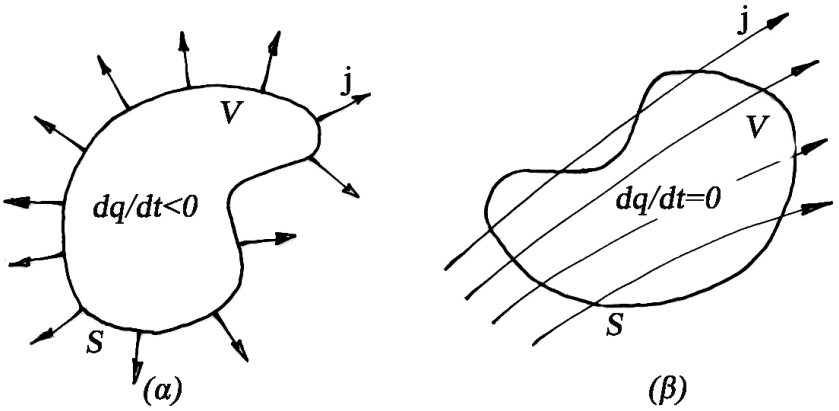
Για να ισχύει όμως η αρχή της διατήρησης των φορτίων θα πρέπει:

$$\oiint_S \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S} = -dq/dt \tag{A4.4}$$

Δηλ. τ' αναδυόμενα φορτία ανά μονάδα χρόνου από την S είναι ίσα με την απώλειά τους από το εσωτερικό της.

Επειδή $q = \iiint_V \rho dV$ (σχ. Α2.4) τότε:

$$\oiint_S \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S} = -\frac{d}{dt}\iiint_V \rho dV = -\iiint_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV \qquad \text{(A4.5)}$$



(Σχ. Α4.1)

(λόγου του ότι η επιφάνεια S είναι σταθερή, οπότε η μεταβολή της πυκνότητας ρ των φορτίων εξαρτάται μόνο από το χρόνο).Τέλος με τη βοήθεια του θεωρήματος των Ostrogradsky-Gauss θα έχουμε:

$$\oiint_S \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S} = -\iiint_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV = \iiint_V \nabla \mathbf{j}\, dV \qquad \text{(A4.6)}$$

Προκειμένου η τελευταία ισότητα να ισχύει για οποιονδήποτε όγκο στο εσωτερικό του αγωγού, θα πρέπει οι υπό ολοκλήρωση ποσότητες να είναι ίσες. Τότε:

$$\nabla \mathbf{j} = -\partial \rho / \partial t \qquad \text{(A4.7)}$$

η οποία ονομάζεται ***εξίσωση συνέχειας(continuity equation)*** και αποτελεί τον διαφορικό νόμο της αρχής της διατήρησης των φορτίων.

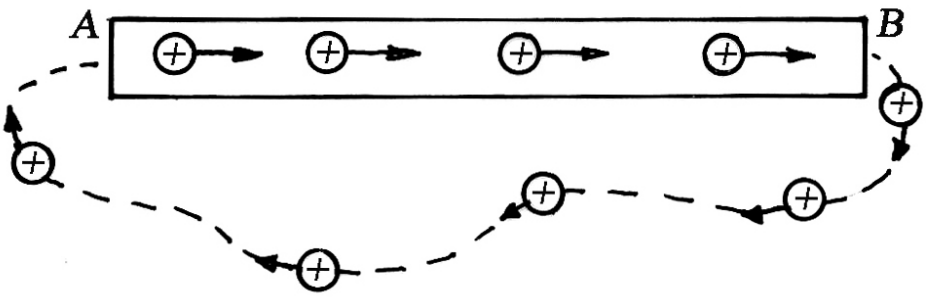
Ένα ρεύμα το οποίο δεν μεταβάλλεται συναρτήσει του χρόνου ονομάζεται ***συνεχές(steady)***. Για την περίπτωση αυτή το δυναμικό, η πυκνότητα των φορτίων, καθώς και άλλα μεγέθη στα διάφορα σημεία του αγωγού παραμένουν χρονικά σταθερά. Κάτω από αυτές τις συνθήκες η $\partial \rho / \partial t = 0$ οπότε:

$$\nabla \mathbf{j} = 0 \qquad \text{(A4.8)}$$

Τότε από τη (σχ. Α4.6) θα έχουμε: $\Phi_j = \oiint_S \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S} = 0$. Οπότε στην περίπτωση αυτή οι δυναμικές γραμμές του πεδίου $\mathbf{j}$ (ρευματικές γραμμές) δεν έχουν ούτε αρχή ούτε τέλος, δηλ. είναι κλειστές (βλ. Σχ. Α4.1β).

5) Η δράση των εξωγενών δυνάμεων σ' ένα ηλεκτρικό κύκλωμα και η ανάπτυξη της ηλεκτρεγερτικής δύναμης (Η.Ε.Δ.). Διαφορικός νόμος του Ohm.

Σ' ένα τμήμα αγωγού AB (Σχ. Α5.1) διατηρούμε κατά κάποιο τρόπο τη διατεταγμένη κίνηση των φορέων π.χ. με τη δράση ηλεκτρικού πεδίου. Τότε αυτός διαρρέεται από ρεύμα. Αν όμως προς στιγμή αποκλείσουμε τη δυνατότητα αυτή από τους φορείς, τότε το ρεύμα μηδενίζεται ακαριαία στο εσωτερικό του. Προκειμένου δηλ. να διατηρήσουμε την κίνηση των φορέων, πρέπει κατά κάποιο τρόπο να παραλαμβάνουμε τους φορείς (θετικούς στην περίπτωσή μας) από το άκρο B και να τους αποθέτουμε στο άκρο A του αγωγού συνεχώς. Τότε η συσσώρευση των φορτίων στο σημείο A θα προκαλεί λόγω άπωσης την μετακίνησή τους (εξαιτίας της ανάπτυξης ηλεκτρικού πεδίου) και κατ' ακολουθία μέσα στο τμήμα του αγωγού



(Σχ. Α5.1)

τη διατήρηση της ροής τους. Δηλ. θ' αναπτυχθεί ηλεκτρικό ρεύμα. Για να συμβαίνει όμως αυτό, θα πρέπει συνεχώς να εκτελούμε έργο κατά μήκος μιας εξωτερικής τροχιάς (διακεκομμένη γραμμή) από τη θέση B στη θέση A, προκειμένου να υπερνικήσουμε την άπωση μεταξύ των φορέων καθώς πλησιάζουμε στη θέση A του αγωγού.

Τη διαδικασία αυτή δεν μπορούν να την εκτελέσουν δυνάμεις ηλεκτροστατικής φύσης αλλά το είδος των δυνάμεων που ονομάζονται ***εξωγενείς(extraneous forces)***. Η προέλευσή τους μπορεί να είναι μέσω: α) Χημικών διεργασιών (βολταϊκά στοιχεία) β) Διάχυσης φορέων σε μη ομογενή μέσα γ) Ετεροεπαφών διαφόρων

μετάλλων (θερμοστοιχεία) δ) Μεταβαλλόμενων χρονικά μαγνητικών πεδίων ε) καθαρά μηχανικών διαδικασιών (π.χ. μηχανή Wimshurst) κ.λ.π. Μας ενδιαφέρει τελικά το εκτελούμενο έργο A ανά μονάδα φορτίου q των εφαρμοζόμενων στους φορείς εξωγενών δυνάμεων. Το μέγεθος αυτό ονομάζεται ***ηλεκτρεγερτική δύναμη (Η.Ε.Δ.) (electromotive force (e.m.f.)***. Δηλ.

$$\mathcal{E} = A/q \tag{A5.1}$$

Θεωρούμε κατ' αντιστοιχία με τις δυνάμεις πού ασκούνται στους φορείς από το ηλεκτροστατικό πεδίο ($\mathbf{F} = q\mathbf{E}$), ότι φορέας των εξωγενών δυνάμεων είναι ένα πεδίο $\mathbf{E}^*$ που ονομάζεται ***ένταση του πεδίου των εξωγενών δυνάμεων (strength of the extraneous forces)***. Δηλ.

$$\mathbf{F}_{extr} = q\mathbf{E}^* \tag{A5.2}$$

Τότε το εκτελούμενο έργο από τις εξωγενείς δυνάμεις στο φορτίο q για τη μετακίνησή του από μία θέση 1 στη θέση 2 (δηλ. σε τμήμα κυκλώματος) θα είναι:

$$A_{12} = \int_1^2 \mathbf{F}_{extr} \cdot d\mathbf{l} = q\int_1^2 \mathbf{E}^* \cdot d\mathbf{l} \tag{A5.3}$$

Το αντίστοιχο έργο για τη μετακίνηση του q κατά μήκος κλειστού κυκλώματος θα είναι:

$$A = q\oint \mathbf{E}^* \cdot d\mathbf{l} \tag{A5.4}$$

οπότε:

$$A/q = \mathcal{E} = \oint \mathbf{E}^* \cdot d\mathbf{l} \tag{A5.5}$$

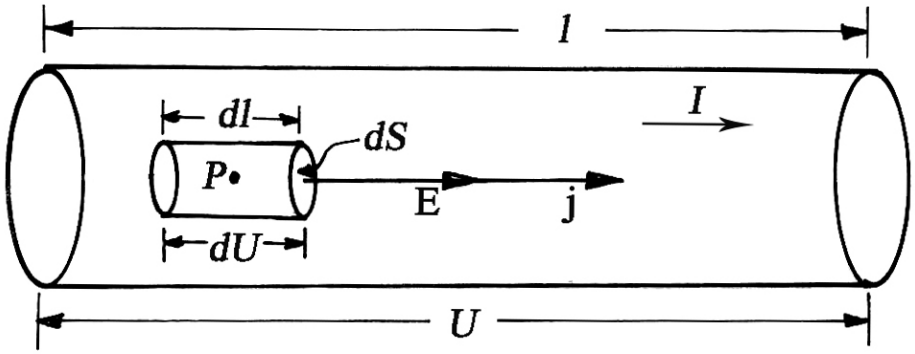
όπου $\mathcal{E}$ είναι η Η.Ε.Δ. πού δρα κατά μήκος του κλειστού κυκλώματος.

Διαφορικός νόμος του Ohm

Γνωρίζουμε ότι για ένα ***ομογενές*** τμήμα κυκλώματος δηλ. τέτοιο στο οποίο δεν δρουν Η.Ε.Δ. ισχύει ο νόμος του Ohm:

$$I = U/R \tag{A5.6}$$

όπου I η ένταση του ρεύματος που διαρρέει τον αγωγό, U η διαφορά δυναμικού στα άκρα του και R η αντίστασή του. $R = \rho l / S$ όπου ρ η ***ειδική αντίσταση (resistivity)*** l το μήκος του και S η διατομή του. Αν θέλουμε να δούμε τι ακριβώς συμβαίνει σ' ένα σημείο P στο εσωτερικό του αγωγού (Σχ. Α5.2), θα πρέπει να εφαρμόσουμε το νόμο του Ohm για ένα τμήμα του αγωγού απειροστού μήκους dl και διατομής dS που το περιβάλλει. Αν dU η διαφορά δυναμικού στα άκρα του dl τότε $I = dU/R$ με $R = \rho dl / dS$. Και επειδή $I = jdS$ θα έχουμε τελικά:



(Σχ. Α5.2)

$$\mathbf{j} = \frac{1}{\rho}\mathbf{E} = \sigma \mathbf{E} \qquad \text{(A5.7)}$$

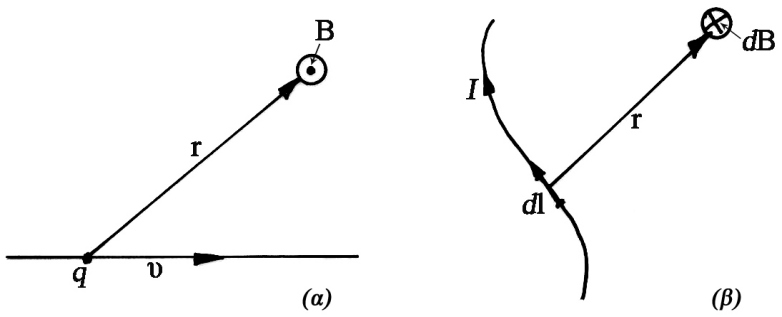
όπου $\sigma = 1/\rho$ η ***αγωγιμότητα (conductivity)*** του υλικού. Η τελευταία σχέση εκφράζει τη διαφορική μορφή του νόμου του Ohm.

6) Μαγνητικό πεδίο

Είναι γνωστό πειραματικά ότι μεταξύ των αγωγών που διαρρέονται από ρεύματα ασκούνται δυνάμεις (Ampère 1820).Τα ρεύματα αυτά αλληλεπιδρούν μέσω ενός πεδίου που ονομάζεται ***μαγνητικό***. Το μαγνητικό πεδίο, έχει μια έννοια κατευθυντικότητας (σχετίζεται με τη φορά της διατεταγμένης κίνησης των φορέων) (Oërsted 1820).Επομένως το πεδίο θα χαρακτηρίζεται από μια διανυσματική ποσότητα που τη συμβολίζουμε με **B** και ονομάζεται ***μαγνητική επαγωγή(magnetic induction)***.

Οι νόμοι που αφορούν τον μαγνητισμό, αναδεικνύονται μέσω πειραμάτων. Έτσι προκύπτει ότι η μαγνητική επαγωγή **B** (σε μονάδες Tesla στο σύστημα μονάδων S.I.). που αναπτύσσεται σε μια απόσταση **r** από κινούμενο φορτίο q με ταχύτητα **υ** (Σχ. Α6.1α) θα δίνεται από τη σχέση:

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{q\boldsymbol{\upsilon}\times\mathbf{r}}{r^3} \qquad \text{(A6.1)}$$

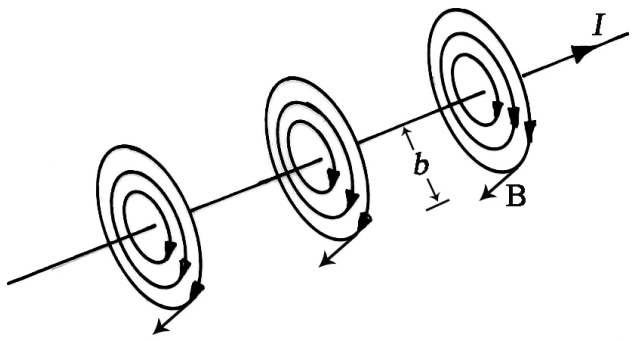


(Σχ. Α6.1)

όπου $\mu_0 = 4\pi\times10^{-7} = 1.26\times10^{-6}\ H/m$. Επίσης η στοιχειώδης μαγνητική επαγωγή $d\mathbf{B}$ που προκαλείται από το στοιχειώδες τμήμα $d\mathbf{l}$ (Σχ. Α6.1β) αγωγού που διαρρέεται από ρεύμα έντασης I σε μια απόσταση $\mathbf{r}$ από αυτό δίνεται από τη σχέση:

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{Id\mathbf{l}\times\mathbf{r}}{r^3} \quad \text{(Νόμος των Biot- Savart)} \qquad \text{(A6.2)}$$

Η εφαρμογή του νόμου αυτού για ευθύγραμμο αγωγό που διαρρέεται από ρεύμα



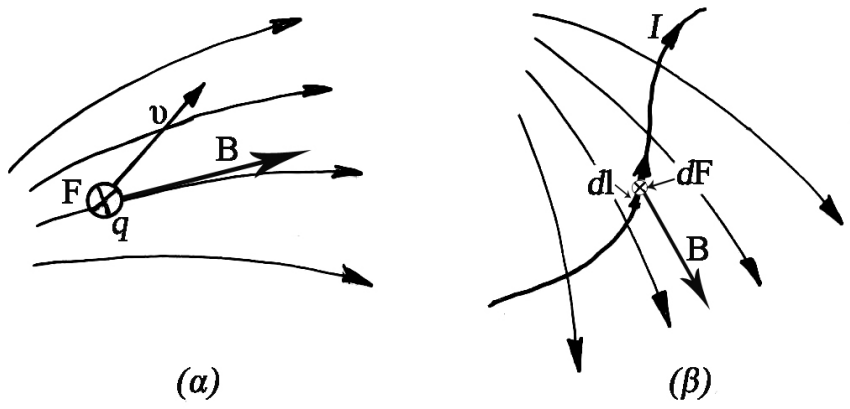
(Σχ. Α6.2)

έντασης I μας δείχνει ότι το μέτρο της μαγνητικής επαγωγής $\mathbf{B}$ σε κάθετη απόσταση b από αυτόν (Σχ. Α6.2) δίνεται από τη γνωστή σχέση:

$$|\mathbf{B}| = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{2I}{b} \qquad \text{(A6.3)}$$

Οι ασκούμενες δυνάμεις μεταξύ ρευματοφόρων αγωγών δεν είναι άλλο παρά δυνάμεις που ασκούνται μέσω του μαγνητικού πεδίου στους κινούμενους φορείς του ρεύματος. Βρίσκεται πειραματικά ότι αν ένα φορτίο q κινείται με ταχύτητα $\boldsymbol{\upsilon}$ (Σχ. Α6.3α) στο εσωτερικό ενός εγκατεστημένου μαγνητικού πεδίου επαγωγής $\mathbf{B}$, τότε η δύναμη που θ' ασκείται σ' αυτό θα δίνεται (S.I. σύστημα) από τη σχέση:

$$\mathbf{F} = q\boldsymbol{\upsilon} \times \mathbf{B} \quad \text{(Δύναμη Lorentz)} \qquad \text{(A6.4)}$$



(Σχ. Α6.3)

Επίσης αν θεωρήσουμε ότι στο προαναφερόμενο πεδίο υπάρχει ένας αγωγός που διαρρέεται από ρεύμα έντασης I (Σχ. Α6.3β) τότε σ' ένα στοιχειώδες τμήμα του $d\mathbf{l}$ θ' ασκείται στοιχειώδης δύναμη $d\mathbf{F}$ που θα δίδεται (S.I. σύστημα) από τη σχέση:

$$d\mathbf{F} = Id\mathbf{l} \times \mathbf{B} \quad \text{(Νόμος του Ampère)} \qquad \text{(A6.5)}$$

Αν εφαρμόσουμε την τελευταία σχέση για να υπολογίσουμε τη δύναμη ανά μονάδα μήκους που ασκείται μεταξύ δύο αγωγών που διαρρέονται από ρεύματα I_1 και I_2 αντίστοιχα, τότε με τη βοήθεια της (σχ. Α6.3) βρίσκουμε:

$$F_u = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{2I_1I_2}{b} \qquad \text{(A.6.6)}$$

Απόκλιση και στροφή του μαγνητικού πεδίου

Απόκλιση του πεδίου **B**

Η απουσία μαγνητικών μονοπόλων στη φύση έχει σαν αποτέλεσμα οι δυναμικές γραμμές του διανύσματος **B** να μην έχουν αρχή και τέλος. Δηλ. είναι κλειστές. Έτσι, σύμφωνα με τη (σχ. 1.2):

$$\Phi_B\,(=)\,N_{big.} - N_{ter.} \qquad \text{(A6.7)}$$

η ροή του **B** διά μέσου μιας κλειστής επιφάνειας (Σχ. A6.4) θα είναι μηδέν. Δηλ.

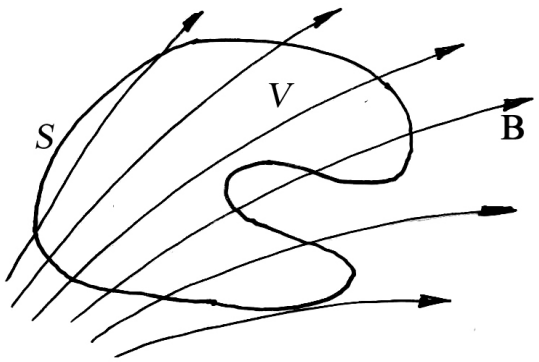
$$\Phi_B = \oiint \mathbf{B}\cdot d\mathbf{S} = 0 \qquad \text{(A6.8)}$$

Η τελευταία σχέση εκφράζει το θεώρημα του Gauss για το πεδίο **B** και μας λέει ότι η ροή του διανύσματος **B** της μαγνητικής επαγωγής διά μέσου κάθε κλειστής επιφάνειας είναι μηδέν. Έχουμε όμως (θεώρημα των Ostrogradsky-Gauss):

$$\oiint_S \mathbf{B}\cdot d\mathbf{S} = \iiint_V \nabla\mathbf{B}\,dV = 0 \qquad \text{(A6.9)}$$

Για να ισχύει η τελευταία σχέση για οποιοδήποτε όγκο στο πεδίο, θα πρέπει η υπό ολοκλήρωση ποσότητα να είναι μηδέν, οπότε:

$$\nabla\mathbf{B} = 0 \qquad \text{(A6.10)}$$



(Σχ. A6.4)

Στροφή του πεδίου **B**

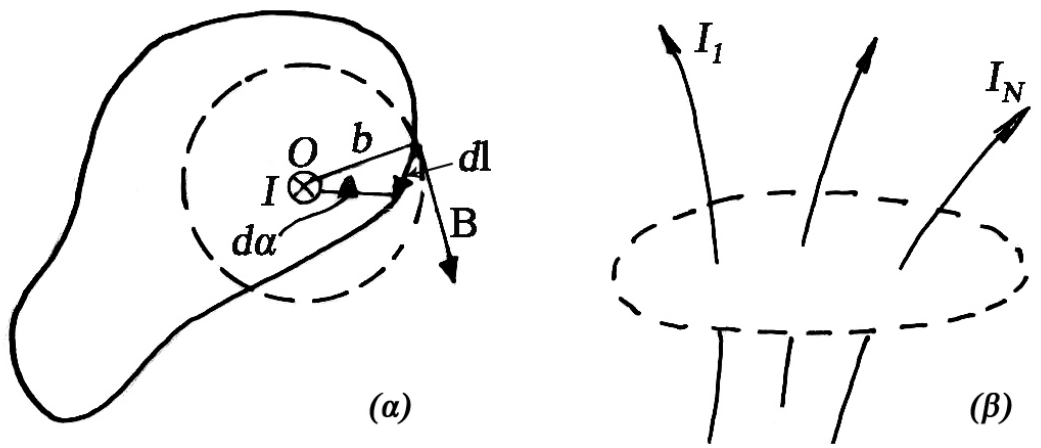
Θεωρούμε μια κλειστή τροχιά να περιβάλλει έναν ευθύγραμμο αγωγό (Σχ. A6.5α), που διαρρέεται από ρεύμα έντασης I. Υπολογίζουμε κατόπιν την κυκλοφορία του διανύσματος **B** κατά μήκος της από τη σχέση:

$$C_B = \oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} \qquad \text{(A6.11)}$$

Θα έχουμε: $\mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = B dl_B$ όπου dl_B η προβολή του $d\mathbf{l}$ στο $\mathbf{B}$. Αλλά $dl_B = b da$ όπου da η στοιχειώδης γωνία με την οποία φαίνεται το $d\mathbf{l}$ από το σημείο O του αγωγού και b η ακτίνα με κέντρο το O και πέρας το σημείο τομής με την κλειστή τροχιά. Το μέτρο όμως του $\mathbf{B}$ είναι γνωστό και δίνεται από τη (σχ. Α6.3). Επομένως:

$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \oint \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2I}{b} b da = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \oint da$. Και επειδή $\oint da = 2\pi$ θα έχουμε:

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 I \qquad \text{(A6.12)}$$



(Σχ. Α6.5)

Για την περίπτωση βέβαια που ο αγωγός βρίσκεται εκτός της διαγραφόμενης τροχιάς θα είναι $\oint da = 0$.

Όταν τώρα την κλειστή τροχιά την διαπερνούν πολλά ρεύματα (Σχ. Α6.5β), τότε με τη βοήθεια της αρχής της επαλληλίας για το μαγνητικό πεδίο ($\mathbf{B} = \sum_{i=1}^{N} \mathbf{B}_i$) θα είναι:

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \oint \left(\sum_{i=1}^{N} \mathbf{B}_i \right) \cdot d\mathbf{l} = \sum_{i=1}^{N} \oint \mathbf{B}_i \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 \sum_{i=1}^{N} I_i \qquad \text{(A6.13)}$$

Αν τελικά έχουμε συνεχή κατανομή ρευμάτων διά της κλειστής τροχιάς, τότε με βάση τη σχέση (Α4.3):

$$\sum I = \iint_S \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S} \qquad \text{(A6.14)}$$

και επομένως με τη βοήθεια του θεωρήματος του Stokes (σχ. 2.2):

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 \iint_S \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S} = \iint_S (\nabla \times \mathbf{B}) \cdot dS \qquad \text{(A6.15)}$$

Η τελευταία εξίσωση θα πρέπει να ισχύει για οποιαδήποτε επιφάνεια S στο εσωτερικό του πεδίου $\mathbf{B}$, που καταλήγει στην κλειστή τροχιά. Αυτό είναι δυνατόν μόνο όταν οι υπό ολοκλήρωση συναρτήσεις είναι ίσες. Άρα:

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j} \qquad \text{(A6.16)}$$

Η εξίσωση αυτή ισχύει μόνο για πεδίο $\mathbf{B}$ στο κενό και σε απουσία μεταβαλλόμενου ηλεκτρικού πεδίου.

7) Μαγνητικό πεδίο σ' ένα υλικό. Μαγνήτιση **M** *και ένταση* **H** *μαγνητικού πεδίου*

Όταν ένας αγωγός που διαρρέεται από ρεύμα δεν βρίσκεται στο κενό, αλλά στο εσωτερικό ενός υλικού μέσου, τότε το μαγνητικό πεδίο επαγωγής $\mathbf{B}$ που εγκαθιστά, αποτελείται από δύο προσθετέους. Δηλ.

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_0 + \mathbf{B}' \qquad \text{(A7.1)}$$

Ο $\mathbf{B}_0$ είναι το πεδίο που αναπτύσσεται σαν ο αγωγός να βρισκόταν στο κενό. Ο $\mathbf{B}'$ είναι ο επιπλέον όρος της μαγνητικής επαγωγής που αναδεικνύεται λόγω της δράσης του πεδίου $\mathbf{B}_0$ στα μόρια του υλικού. Πράγματι το κάθε μόριο (λόγω της κίνησης των ηλεκτρονίων) μπορεί να θεωρηθεί βρόγχος ρεύματος μιας ορισμένης μαγνητικής διπολικής ροπής $\mathbf{p}_m$ ($\mathbf{p}_m = Id\mathbf{S}$ όπου dS το εμβαδόν του βρόγχου, I η ένταση του ρεύματος και η φορά της $\mathbf{p}_m$ δίνεται με βάση τον κανόνα του δεξιοστρόφου κοχλία). Το $\mathbf{B}_0$ προσανατολίζει τα μαγνητικά δίπολα (μόρια), με συνέπεια την εμφάνιση του επιπλέον πεδίου $\mathbf{B}'$ που εξαρτάται από το $\mathbf{B}_0$. Το φαινόμενο αυτό ονομάζεται μαγνήτιση.

Ένα διανυσματικό μέγεθος που περιγράφει τη διαδικασία αυτή στο εσωτερικό του υλικού ονομάζεται ***μαγνήτιση(magnetization)*** $\mathbf{M}$ και ορίζεται από τη σχέση:

$$\mathbf{M} = \frac{\sum_{\Delta V} \mathbf{p}_m}{\Delta V} \qquad \text{(A7.2)}$$

όπου $\sum_{\Delta V} \mathbf{p}_m$ είναι το άθροισμα των μαγνητικών διπολικών ροπών στον όγκο ΔV. Η μαγνήτιση (σε μονάδες $\mathrm{A/m}$ στο σύστημα S.I.) είναι το αντίστοιχο μέγεθος της πόλωσης του διηλεκτρικού (σχ. Α3.3) που αφορά τον ηλεκτρισμό στην ύλη.

Αν τώρα εκτελέσουμε την πράξη της στροφής στα δύο μέλη της (σχ. Α7.1) θα έχουμε:

$$\nabla \times \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{B}_0 + \nabla \times \mathbf{B}' = \mu_0 \mathbf{j} + \nabla \times \mathbf{B}' \qquad \text{(A7.3)}$$

Κατ' αναλογία με τον όρο $\nabla \times \mathbf{B}_0 = \mu_0 \mathbf{j}$ (σχ. Α6.16) υποθέτουμε ότι:

$$\nabla \times \mathbf{B}' = \mu_0 \mathbf{j}_{mol} \qquad \text{(A7.4)}$$

όπου $\mathbf{j}_{mol}$ η πυκνότητα του ρεύματος που προκύπτει λόγω της μαγνήτισης των μορίων και $\mathbf{j}$ η αντίστοιχη των μακροσκοπικά υπαρχόντων ρευμάτων. Επομένως:

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 (\mathbf{j} + \mathbf{j}_{mol}) \qquad \text{(A7.5)}$$

Αποδεικνύεται ότι:

$$\mathbf{j}_{mol} = \nabla \times \mathbf{M} \qquad \text{(A7.6)}$$

δηλ. η πυκνότητα των ρευμάτων που προέρχονται από τα μόρια, καθορίζεται από τη στροφή της μαγνήτισης του υλικού. Η αντικατάσταση της (σχ. Α7.6) στη (σχ. Α7.5) μας δίνει: $\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j} + \mu_0 \nabla \times \mathbf{M}$. Και μετά τις πράξεις :

$$\nabla \times \left(\frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{M} \right) = \mathbf{j} \qquad \text{(A7.7)}$$

Κάνουμε την αντικατάσταση:

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{M} \qquad \text{(A7.8)}$$

οπότε: $$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{j} \qquad \text{(A7.9)}$$

όπου $\mathbf{H}$ είναι το διανυσματικό μέγεθος που ονομάζουμε ***ένταση του μαγνητικού πεδίου(magnetic field strength)***. Πρόκειται για ένα βοηθητικό μέγεθος (αντίστοιχο του διανύσματος της ηλεκτρικής μετατόπισης $\mathbf{D}$ που χρησιμοποιήσαμε κατά τη μελέτη των διηλεκτρικών (σχ. Α3.7)). Το χρησιμοποιούμε όταν εξετάζουμε τον μαγνητισμό στην ύλη και από την τη (σχ. Α7.9) βλέπουμε ότι εξαρτάται μόνο από την πυκνότητα $\mathbf{j}$ των μακροσκοπικά υπαρχόντων ρευμάτων.

Υποθέτουμε εδώ – αν και αποδεικνύεται πειραματικά – ότι η μαγνήτιση $\mathbf{M}$ σε κάθε σημείο ενός μαγνητικού υλικού δίνεται από τη σχέση:

$$\mathbf{M} = \chi_m \mathbf{H} \qquad \text{(A7.10)}$$

όπου χ_m ***μαγνητική επιδεκτικότητα (magnetic susceptibility***) και πρόκειται για αδιάστατο μέγεθος. Επειδή επίσης η $\mathbf{M}$ εκφράζεται σε $\mathrm{A/m}$, ίδιες θα είναι και οι διαστάσεις για την ένταση του μαγνητικού πεδίου $\mathbf{H}$.Τότε με τη βοήθεια των σχέσεων (Α7.10) και (Α7.8) βρίσκουμε $\mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \chi_m \mathbf{H}$. Οπότε:

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_0(1+\chi_m)} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_0 k_m} = \frac{\mathbf{B}}{\mu} \qquad \text{(A7.11)}$$

όπου $k_m = 1 + \chi_\mu$ ένα αδιάστατο μέγεθος που ονομάζεται διαμαγνητική σταθερή (σε αντιστοιχία με την διηλεκτρική σταθερή (σχ. Α3.8)) και $\mu = \mu_0 k_m$ η ***μαγνητική διαπερατότητα (magnetic permeability)*** του μέσου. Η συγγραμμικότητα (σχ. Α7.11) για τα $\mathbf{B}$ και $\mathbf{H}$ ισχύει μόνο για ομογενή και ισότροπα υλικά.

8) Επαγόμενη Η.Ε.Δ.

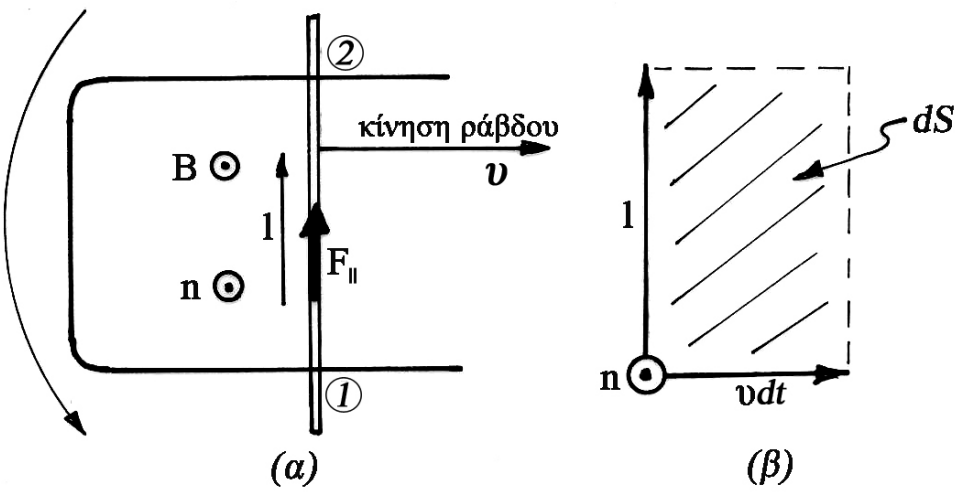
Το 1831 ο Faraday παρατήρησε ότι όταν η μαγνητική ροή Φ_B μεταβάλλεται διά μέσου ενός κλειστού μεταλλικού βρόγχου, τότε ο τελευταίος διαρρέεται από ρεύμα. Το ρεύμα αυτό συντηρείται από μια επαγόμενη Η.Ε.Δ. που σχετίζεται με τη μεταβαλλόμενη χρονικά ροή.

Θεωρούμε π.χ. ένα μεταλλικό συρμάτινο πλαίσιο (Σχ. Α8.1α) στο εσωτερικό μαγνητικού πεδίου επαγωγής $\mathbf{B}$ και μια ράβδο 1-2 σε επαφή με τους δύο βραχίονές του. Έστω τώρα ότι η μεταλλική ράβδος μετακινείται (σε επαφή πάντα με το πλαίσιο) προς τα δεξιά με σταθερή ταχύτητα $\boldsymbol{\upsilon}$, με την εφαρμογή κατάλληλης δύναμης. Τότε σε κάθε ηλεκτρόνιο της ράβδου, θ' αναπτυχθεί (σχ. Α6.4) δύναμη ίση με:

$$\mathbf{F}_{\text{II}} = -e\,\boldsymbol{\upsilon}\times\mathbf{B} \tag{A8.1}$$

Η δύναμη αυτή είναι εξωγενής (οφείλεται εδώ στο εκτελούμενο έργο για τη μετακίνηση της ράβδου με σταθερή ταχύτητα $\boldsymbol{\upsilon}$). Επομένως μπορούμε να πούμε ότι η ένταση $\mathbf{E}^*$ του ηλεκτρικού πεδίου των εξωγενών δυνάμεων, θα δίνεται από τη σχέση:

$$\mathbf{E}^* = \boldsymbol{\upsilon}\times\mathbf{B} \tag{A8.2}$$



(Σχ. Α8.1)

Θα θεωρήσουμε σαν θετική φορά διαγραφής του βρόγχου, τη διεύθυνση εφαρμογής της δύναμης $\mathbf{F}_{\text{II}}$. Η φορά διαγραφής καθορίζει και τη διεύθυνση της μοναδιαίας κάθετης $\mathbf{n}$ στο βρόγχο. Τότε με βάση τον ορισμό της Η.Ε.Δ. κατά μήκος κλειστού κυκλώματος (σχ. Α5.5) θα έχουμε:

$$\left.\begin{aligned}\mathcal{E}_i &= \oint \mathbf{E}^*\cdot d\mathbf{l} = \oint (\boldsymbol{\upsilon}\times\mathbf{B})\cdot d\mathbf{l} = \int_1^2 (\boldsymbol{\upsilon}\times\mathbf{B})\cdot d\mathbf{l}\\ &= \int_1^2 \mathbf{B}\cdot(d\mathbf{l}\times\boldsymbol{\upsilon}) = \mathbf{B}\cdot\left(\int_1^2 d\mathbf{l}\right)\times\boldsymbol{\upsilon} = \mathbf{B}\cdot(\mathbf{l}\times\boldsymbol{\upsilon})\end{aligned}\right\} \tag{A8.3}$$

όπου για την εξαγωγή της παραπάνω σχέσης δεχθήκαμε ότι μετακίνηση ηλεκτρονίων με ταχύτητα $\boldsymbol{\upsilon}$ συμβαίνει μόνο στο τμήμα 1-2 της κινούμενης ράβδου και ότι στον διανυσματικό λογισμό ισχύει η σχέση:

$$(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot\mathbf{c}=(\mathbf{b}\times\mathbf{c})\cdot\mathbf{a}=(\mathbf{c}\times\mathbf{a})\cdot\mathbf{b} \qquad \text{(A8.4)}$$

Η (σχ. Α8.3) όμως μπορεί να πάρει τη μορφή:

$$\mathcal{E}_i=\frac{\mathbf{B}\cdot(\mathbf{l}\times\boldsymbol{\upsilon})\,dt}{dt} \qquad \text{(A8.5)}$$

και επειδή (Σχ. Α8.1β): $(\mathbf{l}\times\boldsymbol{\upsilon})dt=\mathbf{l}\times\boldsymbol{\upsilon}dt=-\mathbf{n}dS$

$$\mathcal{E}_i=-\frac{d\Phi}{dt} \qquad \text{(A8.6)}$$

όπου: $\mathbf{B}\cdot\mathbf{n}dS=\mathbf{B}\cdot d\mathbf{S}=d\Phi$

Β) Δυναμικά (χρονικά μεταβαλλόμενα) πεδία

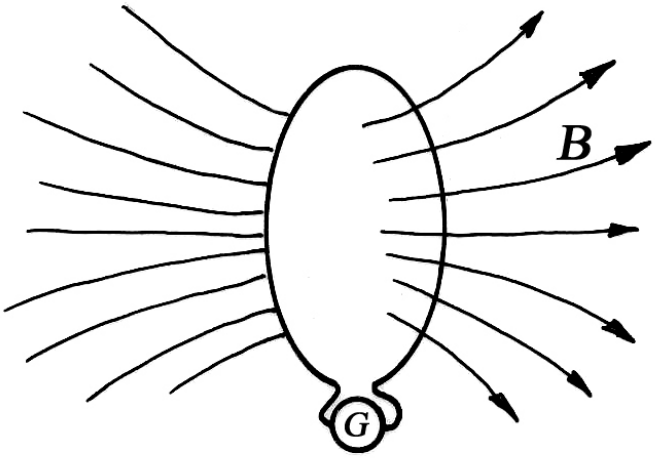
1) Στροβιλό ηλεκτρικό πεδίο

Υποθέτουμε ότι ένας μεταλλικός βρόγχος του οποίου οι διαστάσεις δεν μεταβάλλονται (Σχ. Β1.1) βρίσκεται στο εσωτερικό ενός μεταβαλλόμενου χρονικά μαγνητικού πεδίου επαγωγής $\mathbf{B}$. Τότε είναι γνωστό ότι διά μέσου του, θα μεταβάλλεται χρονικά και η μαγνητική ροή Φ_B με συνέπεια την εμφάνιση επαγόμενης Η.Ε.Δ. Η τελευταία είναι συνέπεια της δράσης πάνω στα ελεύθερα φορτία του αγωγού εξωγενών δυνάμεων. Τελικά βλέπουμε ότι σαν συνέπεια της μεταβαλλόμενης μαγνητικής ροής κατά μήκος του βρόγχου, εγκαθίσταται ένα ηλεκτρικό πεδίο $\mathbf{E}_B$ (αιτία της κίνησης των φορτίων). Η Η.Ε.Δ. η αναπτυσσόμενη κατά μήκος του κλειστού βρόγχου θα δίνεται από τη (σχ. Α5.5):

$$\mathcal{E}=\oint \mathbf{E}_B\cdot d\mathbf{l} \qquad \text{(B1.1)}$$

Και επειδή $\mathcal{E}=-d\Phi/dt$ (σχ. Α8.6) τότε:

$$\mathcal{E} = \oint \mathbf{E}_B \cdot d\mathbf{l} = -\frac{d}{dt}\iint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = -\iint_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} \qquad \text{(B1.2)}$$



(Σχ. B1.1)

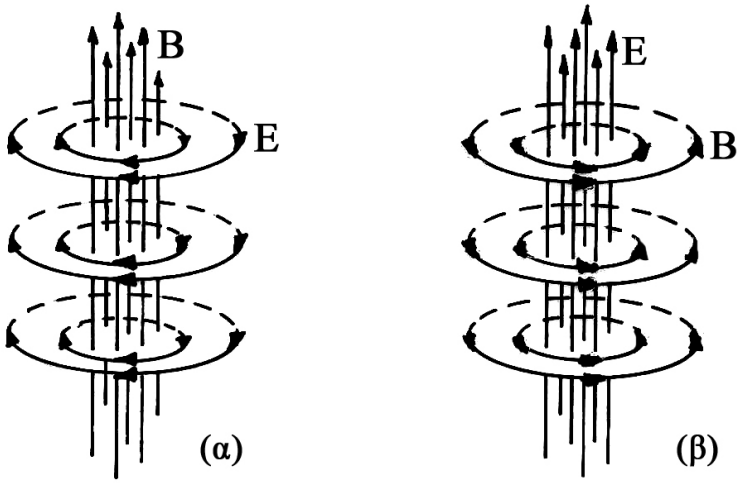
με βάση το γεγονός ότι η $\Phi_B = \iint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}$, είναι η ροή διά μιας επιφάνειας S με όρια το βρόγχο και το ότι λόγω της αμεταβλητότητας των διαστάσεών του, η πράξη της διαφόρισης περνάει στο εσωτερικό του ολοκληρώματος. Τότε με τη βοήθεια του θεωρήματος του Stokes (σχ. 2.2) θα έχουμε: $\iint_S (\nabla \times \mathbf{E}_B) \cdot d\mathbf{S} = -\iint_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S}$. Προκειμένου όμως να ισχύει η ισότητα για οποιαδήποτε επιφάνεια S διά του βρόγχου στο πεδίο $\mathbf{B}$, θα πρέπει οι υπό ολοκλήρωση ποσότητες να είναι ίσες. Άρα:

$$\nabla \times \mathbf{E}_B = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \qquad \text{(B1.3)}$$

Με βάση την τελευταία σχέση ο Maxwell υπέθεσε ότι η ανάδειξη του ηλεκτρικού πεδίου $\mathbf{E}_B$ (κάτω από συνθήκες μεταβαλλόμενου χρονικά μαγνητικού πεδίου) είναι δεδομένη και δεν εξαρτάται από την ύπαρξη του μεταλλικού βρόγχου. Με την παρουσία του βρόγχου και την κατ' ακολουθία ανάπτυξη σ' αυτόν Η.Ε.Δ. απλά γίνεται η πειραματική επιβεβαίωση της εγκατάστασης του ηλεκτρικού πεδίου $\mathbf{E}_B$.

Σαν τελικό συμπέρασμα προκύπτει ότι: ***χρονικά μεταβαλλόμενο μαγνητικό πεδίο δημιουργεί ηλεκτρικό πεδίο***. Η φύση όμως του πεδίου $\mathbf{E}_B$ δεν είναι αυτή ε-

νός ηλεκτροστατικού πεδίου $\mathbf{E}_q$. Πράγματι για το τελευταίο είχαμε αποδείξει (σχ. Α1.4) ότι είναι αστρόβιλο. Δηλ.



(Σχ. Β1.2)

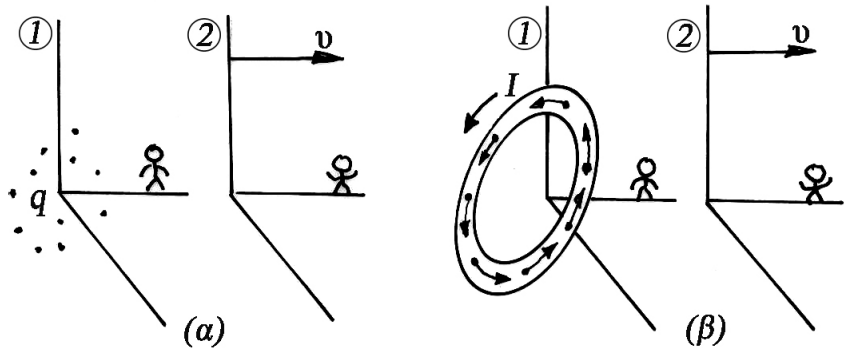
$$\nabla \times \mathbf{E}_q = 0 \qquad \text{(B1.4)}$$

Το πεδίο όμως $\mathbf{E}_B$ για το οποίο ισχύει η (σχ. Β1.3) είναι στροβιλό δηλ. οι δυναμικές του γραμμές είναι κλειστές (Σχ. Β1.2α). Σε αντιδιαστολή, στο ηλεκτροστατικό πεδίο $\mathbf{E}_q$ τα φορτία (θετικά ή αρνητικά) αποτελούν πηγές ή καταβόθρες αντίστοιχα των δυναμικών γραμμών. Στη γενικότερη περίπτωση της ύπαρξης στατικών πεδίων $\mathbf{E}_q$ και πεδίων $\mathbf{E}_B$ που προέρχονται από χρονικά μεταβαλλόμενα μαγνητικά πεδία: $\mathbf{E} = \mathbf{E}_q + \mathbf{E}_B$ οπότε:

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \qquad \text{(B1.5)}$$

Η τελευταία σχέση αποτελεί μια από τις θεμελιώδεις εξισώσεις της ηλεκτρομαγνητικής θεωρίας και εκφράζει την αμοιβαία εξάρτηση μεταξύ των πεδίων $\mathbf{E}$ και $\mathbf{B}$. Δηλ. τελικά η ξεχωριστή διαπραγμάτευση ενός εκάστου των πεδίων έχει μόνο σχετική έννοια με συνέπεια ν' αποτελούν εκφράσεις ενός και του αυτού πεδίου που ονομάζουμε ***ηλεκτρομαγνητικό***.

Πράγματι όπως βλέπουμε στο (Σχ. Β1.3α), στο σύστημα συντεταγμένων (1) υφίσταται μία κατανομή στατικών φορτίων τα οποία δημιουργούν ένα αμιγώς ηλεκτροστατικό πεδίο. Δεν συμβαίνει όμως το ίδιο και με το κινούμενο σύστημα (2).



(Σχ. Β1.3)

Για το τελευταίο, εκτός του ηλεκτροστατικού πεδίου (λόγω της ύπαρξης των φορτίων), εγκαθίσταται και ένα μαγνητικό, εξαιτίας της ως προς αυτό κίνησης τους. Επίσης στο (Σχ. Β1.3β) ο σταθερών διαστάσεων ρευματοφόρος βρόγχος είναι ακίνητος ως προς το σύστημα συντεταγμένων (1). Τότε στο χώρο αυτό υφίσταται ένα αμιγώς μαγνητικό πεδίο. Όμως για ένα κινούμενο σύστημα συντεταγμένων (2) εκτός του μαγνητοστατικού πεδίου εγκαθίσταται σ' οποιοδήποτε σημείο του και ένα στροβιλό ηλεκτρικό πεδίο λόγω του μεταβαλλόμενου στη θέση αυτή (ένεκα της κίνησης του βρόγχου) μαγνητικού πεδίου, άρα και της μαγνητικής ροής.

2) Ρεύμα μετατόπισης

Είναι γνωστό (σχ. Α6.16, Α7.9) ότι για ένα μαγνητικό πεδίο στο οποίο η κατανομή της πυκνότητας των ρευμάτων είναι $\mathbf{j}$ ισχύει η σχέση:

$$\nabla \times \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} = \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{j} \qquad \text{(B2.1)}$$

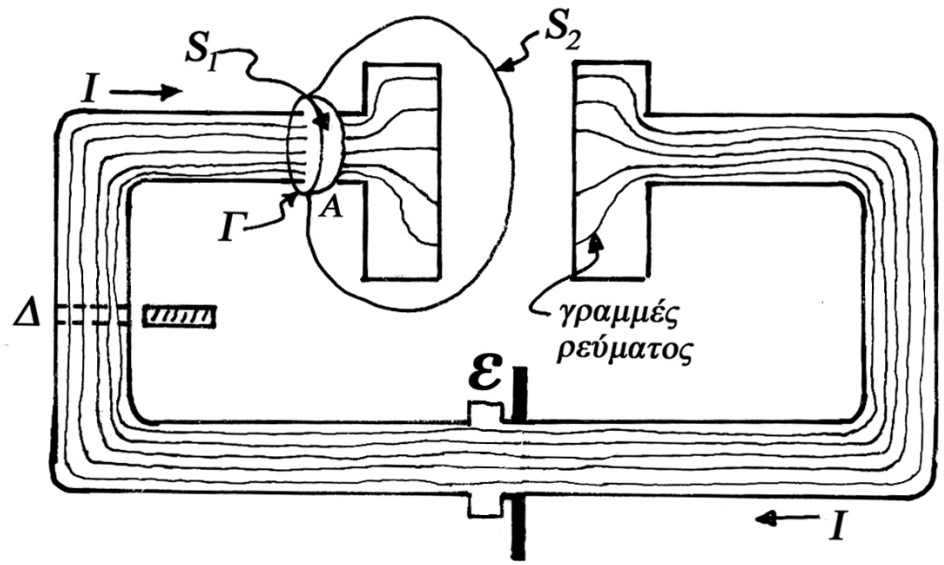
Γνωρίζουμε επίσης (σχ. Α4.7) ότι η κατανομή της πυκνότητας των φορτίων συνδέεται με την $\mathbf{j}$ μέσω της σχέσης:

$$\nabla \mathbf{j} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} \qquad \text{(B2.2)}$$

Αν υποθέσουμε ότι η ρ δεν μεταβάλλεται με το χρόνο, τότε από τη (σχ. Β2.2) θα έχουμε: $\nabla \mathbf{j} = 0$. Δηλ. οι γραμμές του ρεύματος (δυναμικές γραμμές του πεδίου $\mathbf{j}$) δεν έχουν αρχή και τέλος, επομένως είναι κλειστές.

Θα δούμε στα επόμενα ότι η (σχ. Β2.1) δεν ισχύει τουλάχιστον μ' αυτή τη μορφή για πεδία τα οποία μεταβάλλονται χρονικά. Σαν παράδειγμα παίρνουμε τη φόρτιση ενός πυκνωτή (Σχ. Β2.1) με τη βοήθεια μίας πηγής Η.Ε.Δ. $\mathcal{E}$. Από τη στιγμή που ο διακόπτης Δ κλείνει κύκλωμα, το τελευταίο διαρρέεται από μεταβαλλόμενο με το χρόνο ρεύμα I το οποίο μηδενίζεται όταν στα άκρα του πυκνωτή η διαφορά δυναμικού γίνει ίση με την $\mathcal{E}$. Χαρακτηριστικό σ' αυτήν περίπτωση είναι ότι οι γραμμές ρεύματος για τον ενδιάμεσο μεταξύ των οπλισμών χώρο διακόπτονται. Στη θέση A του αγωγού (λίγο πριν τον οπλισμό του πυκνωτή) θεωρούμε μια κλειστή τροχιά Γ που τον περιλαμβάνει και στα όριά της την επιφάνεια S_1. Τότε ολοκληρώνοντας την (σχ. Β2.1) επί της επιφάνειας αυτής και χρησιμοποιώντας το θεώρημα του Stokes θα έχουμε:

$$\iint_{S_1} (\nabla \times \mathbf{H}) \cdot d\mathbf{S} = \iint_{S_1} \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S} = \oint_{\Gamma} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = I \qquad \text{(B2.3)}$$



(Σχ. Β2.1)

Αν όμως η ίδια διαδικασία εκτελεστεί επί της επιφάνειας S_2 (διά της ίδιας τροχιάς Γ) η οποία όμως δεν περιλαμβάνει τον αγωγό, τότε:

$$\oint_{\Gamma} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \iint_{S_2} \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S} = 0 \qquad \text{(B2.4)}$$

Το οποίο βέβαια δεν είναι ακριβές αποτέλεσμα. Αιτία είναι προφανώς ότι η (σχ. Β2.1) δεν ισχύει πλέον όταν τα πεδία είναι χρονικά μεταβαλλόμενα. Και στην προ-

κειμένη περίπτωση, την χρονική μεταβλητότητα των πεδίων στο πείραμά μας την προκαλεί το μεταβαλλόμενο ρεύμα.

Μια άλλη διαδικασία ανάδειξης της ανακρίβειας της (σχ. Β2.1) για χρονικά μεταβαλλόμενα πεδία φαίνεται όταν πάρουμε την απόκλιση των δύο μερών της:

$$\nabla(\nabla \times \mathbf{H}) = \nabla \mathbf{j} \qquad \text{(B2.5)}$$

Τότε επειδή $\nabla(\nabla \times \mathbf{H}) = 0$ (ιδιότητα του διανυσματικού λογισμού), συνεπάγεται ότι και $\nabla \mathbf{j} = 0$ το οποίο όμως αποτέλεσμα δεν συμφωνεί με τη (σχ. Β2.2) που προφανώς ισχύει για χρονικά μεταβαλλόμενα πεδία, όπως αυτό του παραδείγματός μας. Πράγματι εκεί, η μεταβολή $\partial\rho/\partial t$ της πυκνότητας των φορτίων στους οπλισμούς του πυκνωτή χρονικά είναι διάφορη του μηδενός.

Ο Maxwell για να επιλύσει το πρόβλημα, πρότεινε ότι το δεύτερο μέλος της (σχ. Β2.1) θα πρέπει να συμπληρωθεί από έναν επιπλέον όρο με διαστάσεις πυκνότητας ρεύματος τον $\mathbf{j}_d$ που ονόμασε ***ρεύμα μετατόπισης(displacement current)***. Οπότε:

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{j} + \mathbf{j}_d \qquad \text{(B2.6)}$$

Υπέθεσε ότι: $$\nabla \mathbf{j}_d = -\nabla \mathbf{j} \qquad \text{(B2.7)}$$

Οπότε: $$\nabla(\nabla \times \mathbf{H}) = \nabla \mathbf{j} + \nabla \mathbf{j}_d = 0 \qquad \text{(B2.8)}$$

δηλ. η (σχ. Β2.1) έπαιρνε τη σωστή της μορφή με την προϋπόθεση ότι:

$$\mathbf{j}_{tot} = \mathbf{j} + \mathbf{j}_d \qquad \text{(B2.9)}$$

Με βάση τώρα τις σχέσεις (Β2.7) και (Β2.2) θα έχουμε:

$$\nabla \mathbf{j}_d = \frac{\partial \rho}{\partial t} \qquad \text{(B2.10)}$$

Με τη βοήθεια της τελευταίας σχέσης μπορούμε να συνδέσουμε το ρεύμα μετατόπισης με πεδιακά ηλεκτρικά μεγέθη όπως η ηλεκτρική μετατόπιση $\mathbf{D}$. Πράγματι η κατανομή ρ των εξωγενών φορτίων του πυκνωτή συνδέεται με το διανυσματικό πεδίο της ηλεκτρ. μετατόπισης $\mathbf{D}$ μέσω της (σχ. Α3.7):

$$\nabla \mathbf{D} = \rho \qquad \text{(B2.11)}$$

Επομένως: $\nabla \mathbf{j}_d = \frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}(\nabla \mathbf{D}) = \nabla(\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t})$ από την οποία θα έχουμε:

$$\mathbf{j}_d = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \qquad \text{(B2.12)}$$

Τελικά η (B2.6) γίνεται:

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \qquad \text{(B2.13)}$$

Είναι και αυτή όπως η (σχ. B1.5) μια από τις θεμελιώδεις εξισώσεις του Maxwell και η οποία από φυσική άποψη μας λέει ότι: ***παραγωγοί μαγνητικού πεδίου δεν είναι μόνο τα ρεύματα αλλά και τα μεταβαλλόμενα ηλεκτρικά πεδία*** (Σχ. B1.2β).

Γ) Εξισώσεις του Maxwell στην ύλη και το κενό

Η εισαγωγή του ρεύματος μετατόπισης από τον Maxwell, έκανε δυνατή την ανάπτυξη μίας πλήρους θεωρίας που μπορούσε να περιγράψει τα μέχρι τότε γνωστά ηλεκτρομαγνητικά φαινόμενα και να προβλέψει καινούρια. Ένα από αυτά είναι η ανάδειξη της ύπαρξης ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων, τα οποία στο κενό διαδίδονται με την ταχύτητα του φωτός και τα οποία μεταφέρουν ενέργεια, ορμή και στροφορμή. Οι εξισώσεις του Maxwell στη διαφορική τους μορφή, για τις περιοχές όπου υφίστανται κατανομές φορτίων και ρευμάτων στην ύλη είναι οι εξής: Το πρώτο ζεύγος αφορά το συσχετισμό των πεδιακών μεγεθών της έντασης του ηλεκτρικού πεδίου $\mathbf{E}$ και της μαγνητικής επαγωγής $\mathbf{B}$ στο εσωτερικό της ύλης και δίνονται από τις σχέσεις (B1.5) και (A6.10):

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \qquad \text{(Γ1.1)}$$

$$\nabla \mathbf{B} = 0 \qquad \text{(Γ1.2)}$$

Η (σχ. Γ1.1) αποτελεί έκφραση του νόμου της ηλεκτρομαγνητικής επαγωγής και αναδεικνύει την δημιουργία ηλεκτρικού πεδίου κάτω από συνθήκες μεταβαλλόμενου μαγνητικού πεδίου. Η (σχ. Γ1.2) είναι η έκφραση του γεγονότος της ανυπαρξίας μαγνητικών μονοπόλων. Το δεύτερο ζεύγος των εξισώσεων του Maxwell αφορά

τα βοηθητικά μεγέθη $\mathbf{D}$ (ηλεκτρική μετατόπιση) και $\mathbf{H}$ (ένταση του μαγνητικού πεδίου) καθώς και την κατανομή της πυκνότητας των ρευμάτων $\mathbf{j}$ στο χώρο. Δίνονται από τις σχέσεις (Β2.13) και (Α.3.7):

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \qquad (\Gamma 1.3)$$

$$\nabla \mathbf{D} = \rho \qquad (\Gamma 1.4)$$

Η (σχ. Γ1.3) από φυσική άποψη εκφράζει το γεγονός ότι γενεσιουργός αιτία μαγνητικού πεδίου δεν μπορεί να είναι μόνο τα ρεύματα αγωγιμότητας $\mathbf{j}$ αλλά και ένα μεταβαλλόμενο ηλεκτρικό πεδίο. Η (σχ. Γ1.4) μας λέει ότι πηγή του πεδίου $\mathbf{D}$ είναι μόνο τα εξωγενή φορτία πυκνότητας ρ.

Οι σχέσεις (Γ1.1) - (Γ1.4) αποτελούν τη διαφορική διανυσματική έκφραση των εξισώσεων Maxwell στη γενικότερη περίπτωση που στο χώρο που καταλαμβάνει το υλικό υφίσταται μια κατανομή ρευμάτων αγωγιμότητας όπως και φορτίων. Η αναλυτική έκφραση αυτών των εξισώσεων σε σχέση με τις συνιστώσες τους $\mathbf{E}(E_x, E_y, E_z)$, $\mathbf{B}(B_x, B_y, B_z)$, $\mathbf{D}(D_x, D_y, D_z)$, $\mathbf{H}(H_x, H_y, H_z)$ και $\mathbf{j}(j_x, j_y, j_z)$, μας οδηγεί σ' ένα σύνολο οκτώ διαφορικών εξισώσεων που περιλαμβάνουν δώδεκα συναρτήσεις (τις συνιστώσες των $\mathbf{E}, \mathbf{B}, \mathbf{D}, \mathbf{H}$) με την προϋπόθεση ότι οι συνιστώσες της $\mathbf{j}$ είναι γνωστές. Επειδή όμως ο αριθμός των αγνώστων συναρτήσεων είναι μεγαλύτερος του αριθμού των εξισώσεων, δεν θα ήταν δυνατόν να υπολογίσουμε τα πεδία εφόσον γνωρίζουμε μόνο τις κατανομές των ρευμάτων και των φορτίων. Για το λόγο αυτό χρησιμοποιούμε τρεις επιπλέον γνωστές εξισώσεις που δίνονται από τις σχέσεις: (Α.3.8), (Α7.11) και (Α5.7):

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 k_e \mathbf{E} = \varepsilon \mathbf{E} \qquad (\Gamma 1.5)$$

$$\mathbf{B} = \mu_0 k_m \mathbf{H} = \mu \mathbf{H} \qquad (\Gamma 1.6)$$

$$\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E} \qquad (\Gamma 1.7)$$

Σαν τελικό συμπέρασμα δεχόμαστε ότι η ηλεκτροδυναμική ενός ομογενούς και ισοτρόπου υλικού (για την περίπτωση που υφίστανται φορτία και ρεύματα) σε κατάσταση ισορροπίας, μπορεί να περιγραφεί από το σύνολο των εξισώσεων (Γ1.1)-(Γ1.7).

Οι εξισώσεις (Γ1.1)- (Γ1.4) επειδή ισχύουν οι σχέσεις (Γ1.5) - (Γ1.7) μπορεί να γραφούν:

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (\Gamma 1.8) \rightarrow (1.1.1) \qquad \nabla \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon} \quad (\Gamma 1.9) \rightarrow (1.1.2)$$

$$\nabla \mathbf{B} = 0 \quad (\Gamma 1.10) \rightarrow (1.1.3) \qquad \nabla \times \mathbf{B} = \mu\sigma \mathbf{E} + \mu\varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (\Gamma 1.11) \rightarrow (1.1.4)$$

Για την περίπτωση που εξετάζουμε τα πεδία στο κενό τότε: $k_e = 1$, $k_m = 1$ οπότε $\varepsilon = \varepsilon_0$ και $\mu = \mu_0$. Επίσης αν δεν υφίστανται κατανομές φορτίων και ρευμάτων τότε: $\rho = 0$ και $\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E} = 0$. Επομένως για το κενό οι εξισώσεις του Maxwell γράφονται:

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (\Gamma 1.12) \rightarrow (1.1.5) \qquad \nabla \mathbf{E} = 0 \quad (\Gamma 1.13) \rightarrow (1.1.6)$$

$$\nabla \mathbf{B} = 0 \quad (\Gamma 1.14) \rightarrow (1.1.7) \qquad \nabla \times \mathbf{B} = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (\Gamma 1.15) \rightarrow (1.1.8)$$

Δ) Ηλεκτρομαγνητικά κύματα. Διάδοσή τους στο κενό και σε ομογενή και ισότροπα υλικά

Έχουμε πλέον τη δυνατότητα στα επόμενα, να δείξουμε ότι η ύπαρξη ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων (Η/Μ διαταραχών), είναι απόρροια των εξισώσεων του Maxwell. Για το κενό οι σχέσεις αυτές είναι οι (Γ1.12)- (Γ1.15). Αν πράγματι πάρουμε τη στροφή των δύο μελών της (σχ. Γ1.12) θα έχουμε:

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = -\nabla \times (\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}) \qquad (\Delta 1.1)$$

Το σύμβολο ∇ κατά τα γνωστά δηλώνει διαφόριση ως προς τις συντεταγμένες του χώρου. Τότε αν στο δεύτερο μέλος της (σχ. Δ1.1) εκτελέσουμε μια αλλαγή στη σειρά της διαφόρισης σε σχέση με τις συντεταγμένες του χώρου και του χρόνου θα έχουμε:

$$\nabla \times (\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}) = \frac{\partial}{\partial t}(\nabla \times \mathbf{B}) \qquad (\Delta 1.2)$$

Κάνοντας αυτήν την αντικατάσταση στη (σχ. Δ1.1) και γνωρίζοντας την τιμή του $\nabla \times \mathbf{B}$ από τη (σχ. Γ1.15) θα είναι:

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = -\frac{\partial}{\partial t}\left(\varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}\right) = -\varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} \qquad (\Delta 1.3)$$

Είναι όμως γνωστό από τον διανυσματικό διαφορικό λογισμό ότι:

$$curl\, curl\mathbf{a} = grad\, div\mathbf{a} - \nabla^2 \mathbf{a} \quad \text{δηλ.} \quad \nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = \nabla(\nabla \mathbf{E}) - \nabla^2 \mathbf{E} \qquad (\Delta 1.4)$$

όπου:

$$\nabla^2 \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \qquad (\Delta 1.5)$$

ο τελεστής του Laplace σε καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων. Επειδή όμως για το κενό $\nabla \mathbf{E} = 0$ τότε $\nabla(\nabla \mathbf{E}) = 0$. Επομένως από τη (σχ. Δ1.3) θα έχουμε:

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0 \qquad (1.1.9) \qquad (\Delta 1.6)$$

Με την ίδια ακριβώς διαδικασία εκτελώντας την πράξη της στροφής στα δύο μέλη της (σχ. Γ1.15) και με τη βοήθεια της σχέσης (σχ. Γ1.14) βρίσκουμε:

$$\nabla^2 \mathbf{B} - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} = 0 \qquad (1.1.10) \qquad (\Delta 1.7)$$

Οι σχέσεις (Δ1.6) και (Δ1.7) αν και φαίνονται ανεξάρτητες, συνδέονται μεταξύ τους στενά επειδή οι αντίστοιχες σχέσεις (Γ1.12) και (Γ1.15) από τις οποίες προήλθαν περιλαμβάνουν η καθεμιά τα μεγέθη $\mathbf{E}$ και $\mathbf{B}$.

Για ένα καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων :

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= E_x \mathbf{i} + E_y \mathbf{j} + E_z \mathbf{k} \\ \mathbf{B} &= B_x \mathbf{i} + B_y \mathbf{j} + B_z \mathbf{k} \end{aligned} \qquad (\Delta 1.8)$$

Και επειδή:

$$\begin{aligned} \nabla^2 \mathbf{E} &= (\nabla^2 E_x)\mathbf{i} + (\nabla^2 E_y)\mathbf{j} + (\nabla^2 E_z)\mathbf{k} \\ \nabla^2 \mathbf{B} &= (\nabla^2 B_x)\mathbf{i} + (\nabla^2 B_y)\mathbf{j} + (\nabla^2 B_z)\mathbf{k} \end{aligned} \qquad (\Delta 1.9)$$

από τις σχέσεις (Δ1.6) και (Δ1.7) προκύπτουν ένα σύνολο έξη διαφορικών εξισώσεων της μορφής:

$$\nabla^2 \psi - \frac{1}{\upsilon^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0 \quad \text{ή} \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} - \frac{1}{\upsilon^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0 \qquad (\Delta 1.10)$$

όπου: $\psi \equiv E_x, E_y, E_z, B_x, B_y, B_z$ και $\upsilon^2 = 1/\varepsilon_0\,\mu_0$. Είναι γνωστό όμως ότι οι λύσεις αυτών των εξισώσεων παριστάνουν διαδιδόμενα κύματα με ταχύτητα φάσης υ.

Δηλαδή συμπεραίνουμε τελικά ότι κάθε συνιστώσα των πεδίων **E** και **B** (σαν συναρτήσεων του χώρου και του χρόνου) που αποτελεί λύση της διαφορικής εξίσωσης (Δ1.10), συνιστά μια κυματική διαταραχή που διαδίδεται με ταχύτητα $\upsilon = 1/\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}$. Ο Maxwell γνωρίζοντας από προηγούμενα πειράματα τις αριθμητικές τιμές των ε_0 και μ_0, υπολόγισε ότι η ταχύτητα υ είναι ίση με την ταχύτητα c του φωτός στο κενό.

Για ομογενή και ισότροπα υλικά οι διαφ. εξισώσεις του Maxwell έχουν τη μορφή:

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (\Delta 1.11) \qquad \nabla \mathbf{E} = 0 \quad (\Delta 1.12)$$

$$\nabla \mathbf{B} = 0 \quad (\Delta 1.13) \qquad \nabla \times \mathbf{B} = \varepsilon\mu \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (\Delta 1.14)$$

με λύσεις:

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \varepsilon\mu \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0 \quad (\Delta 1.15) \qquad \nabla^2 \mathbf{B} - \varepsilon\mu \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} = 0 \quad (\Delta 1.16)$$

Επομένως η ταχύτητα διάδοσης των κυμάτων θα δίνεται από τη σχέση:

$$\upsilon = 1/\sqrt{\varepsilon\mu} \qquad (\Delta 1.17)$$

προς οποιαδήποτε διεύθυνση στο εσωτερικό του υλικού.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ 2

Ανάδειξη του εγκάρσιου χαρακτήρα των Η/Μ κυμάτων, κατά τη διάδοσή τους στο κενό και σε ομογενή και ισότροπα υλικά

Στην αποδεικτική διαδικασία που ακολουθεί, θα θεωρήσουμε αρμονικής μορφής Η/Μ διαταραχές (συγκεκριμένα επίπεδα μέτωπα κύματος διαδιδόμενα στο κενό), κυκλικής συχνότητας $\omega\left(\omega = 2\pi\nu\right)$ και κυματάριθμου $k\left(k = 2\pi/\lambda\right)$, όπου ν, λ η συχνότητα και το μήκος κύματος της αρμονικής διαταραχής. Για την ανάδειξη του εγκάρσιου χαρακτήρα των Η/Μ κυμάτων, θα πρέπει στην πραγματικότητα ν' αποδείξουμε τις εξής σχέσεις:

$$(\alpha) \quad \mathbf{l}\cdot\mathbf{E_0} = 0 \qquad (2.1) \qquad \text{ή} \qquad (\beta) \quad \mathbf{l}\cdot\mathbf{B_0} = 0 \qquad (2.2)$$

Επίσης θ' αποδείξουμε την καθετότητα μεταξύ των $\mathbf{E_0}, \mathbf{B_0}$ και ότι η διαφορά φάσης μεταξύ τους είναι ίση με μηδέν. Δηλ.

$$(\gamma) \quad \mathbf{B_0} = \frac{\mathbf{l}\times\mathbf{E_0}}{c} \qquad (2.3) \qquad \text{ή} \qquad (\delta) \quad \mathbf{E_0} = -c\mathbf{l}\times\mathbf{B_0} \qquad (2.4)$$

Όπου $\mathbf{l}$ το μοναδιαίο διάνυσμα κατά μήκος του κυματοδιανύσματος $\mathbf{k}$ δηλ.: $\mathbf{k} = k\mathbf{l}$ με k $\left(k = 2\pi/\lambda\right)$ το μέτρο του κυματοδιανύσματος. $\mathbf{E_0}$ το πλάτος του διανύσματος (σταθερό κατά μέτρο) της έντασης του ηλεκτρικού πεδίου και $\mathbf{B_0}$ το πλάτος (σταθερό κατά μέτρο) του διανύσματος της μαγνητικής επαγωγής. c είναι η ταχύτητα (ταχύτητα φάσης) του φωτός στο κενό.

α) Προκειμένου ν' αποδειχθεί ότι $\mathbf{l}\cdot\mathbf{E_0} = 0$ δηλ. $\mathbf{l}\perp\mathbf{E_0}$, εκκινούμε με την διανυσματική έκφραση της έντασης του ηλεκτρικού πεδίου $\mathbf{E}$ που περιγράφει ένα επίπεδο μέτωπο κύματος πλάτους $\mathbf{E_0}$, που διαδίδεται κατά μήκος του $\mathbf{k}$ με συνημίτονα κατεύθυνσης: k_x, k_y, k_z σε καρτεσιανό σ.σ. x, y, z. Στη μιγαδική του μορφή θα έχουμε:

$$\mathbf{E} = E_x\mathbf{i} + E_y\mathbf{j} + E_z\mathbf{k} = \mathbf{E}_0 e^{i(\omega t - \mathbf{k}\cdot\mathbf{r})} = \left(E_{0x}\mathbf{i} + E_{0y}\mathbf{j} + E_{0z}\mathbf{k}\right)e^{i\left(\omega t - k_x x - k_y y - k_z z\right)} \qquad (2.5)$$

Όπου E_x, E_y, E_z οι συνιστώσες του $\mathbf{E}$ και E_{0x}, E_{0y}, E_{0z} οι συνιστώσες του πλάτους του $\mathbf{E_0}$. Επομένως μπορούμε να γράψουμε:

$$E_m = E_{0m} e^{i(\omega t - \mathbf{k}\cdot\mathbf{r})} = E_{0m} e^{i\left(\omega t - k_x x - k_y y - k_z z\right)} \qquad m = x, y, z \tag{2.6}$$

Οπότε:
$$\frac{\partial E_m}{\partial n} = -ik_n E_{0m} e^{i(\omega t - \mathbf{k}\cdot\mathbf{r})} \qquad n = x, y, z \tag{2.7}$$

Επειδή όμως από τη (σχ. Γ1.13): $\nabla\mathbf{E} = 0$ θα έχουμε:

$$\nabla\mathbf{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0 \;\Rightarrow\; -ie^{i(\omega t - \mathbf{k}\cdot\mathbf{r})}\left(k_x E_{0x} + k_y E_{0y} + k_z E_{0z}\right) = 0 \text{ Αλλά: } -ie^{i(\omega t - \mathbf{k}\cdot\mathbf{r})} \neq 0,$$

οπότε: $k_x E_{0x} + k_y E_{0y} + k_z E_{0z} = 0$ δηλ. $\mathbf{k}\cdot\mathbf{E_0} = 0 \Rightarrow k\mathbf{l}\cdot\mathbf{E_0} = 0 \Rightarrow \left(k \neq 0\right) \Rightarrow$

$$\mathbf{l}\cdot\mathbf{E_0} = 0 \tag{2.8}$$

Δηλ. έχουμε αποδείξει τη (σχ.2.1), που από φυσική άποψη σημαίνει ότι το ταλαντούμενο ηλεκτρικό πεδίο $\mathbf{E}$ είναι κάθετο στη διεύθυνση διάδοσης $\mathbf{k}$. Δηλ. το Η/Μ κύμα είναι εγκάρσιο.

β) Προκειμένου ν' αποδειχθεί ότι $\mathbf{l}\cdot\mathbf{B_0} = 0$ δηλ. $\mathbf{l} \perp \mathbf{B_0}$, εκκινούμε με την διανυσματική έκφραση της μαγνητικής επαγωγής $\mathbf{B}$, που θεωρούμε ότι και εδώ περιγράφεται από ένα επίπεδο μέτωπο κύματος πλάτους $\mathbf{B_0}$, που διαδίδεται κατά μήκος του $\mathbf{k}$ με συνημίτονα κατεύθυνσης: k_x, k_y, k_z σε καρτεσιανό σ.σ. x, y, z. Στη μιγαδική του μορφή θα έχουμε:

$$\mathbf{B} = B_x\mathbf{i} + B_y\mathbf{j} + B_z\mathbf{k} = \mathbf{B_0} e^{i(\omega t - \mathbf{k}\cdot\mathbf{r})} = \left(B_{0x}\mathbf{i} + B_{0y}\mathbf{j} + B_{0z}\mathbf{k}\right) e^{i\left(\omega t - k_x x - k_y y - k_z z\right)} \tag{2.9}$$

Όπου B_x, B_y, B_z οι συνιστώσες του $\mathbf{B}$ και B_{0x}, B_{0y}, B_{0z} οι συνιστώσες του πλάτους του $\mathbf{B_0}$.

Εκκινώντας τώρα από τη (σχ. Γ1.14): $\nabla\mathbf{B}=0$ και ακολουθώντας τους ίδιους συλλογισμούς όπως στην προηγούμενη αποδεικτική διαδικασία, βρίσκουμε τελικά ότι:

$$\mathbf{l}\cdot\mathbf{B_0}=0 \tag{2.10}$$

που από φυσική άποψη σημαίνει ότι η ταλαντούμενη μαγνητική επαγωγή $\mathbf{B}$ είναι κάθετη στη διεύθυνση διάδοσης $\mathbf{k}$. Δηλ. το Η/Μ κύμα είναι εγκάρσιο.

γ) Προκειμένου ν' αποδειχθεί η καθετότητα μεταξύ των $\mathbf{E_0}$ και $\mathbf{B_0}$ η εκκίνηση γίνεται από τη (σχ. Γ1.12):

$$\nabla\times\mathbf{E}=-\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t} \tag{2.11}$$

με: $\mathbf{E}=E_x\mathbf{i}+E_y\mathbf{j}+E_z\mathbf{k}=\mathbf{E}_0e^{i(\omega t-\mathbf{k}\cdot\mathbf{r})}=\left(E_{0x}\mathbf{i}+E_{0y}\mathbf{j}+E_{0z}\mathbf{k}\right)e^{i\left(\omega t-k_xx-k_yy-k_zz\right)}$ και

$\mathbf{B}=B_x\mathbf{i}+B_y\mathbf{j}+B_z\mathbf{k}=\mathbf{B_0}e^{i(\omega t-\mathbf{k}\cdot\mathbf{r})}=\left(B_{0x}\mathbf{i}+B_{0y}\mathbf{j}+B_{0z}\mathbf{k}\right)e^{i\left(\omega t-k_xx-k_yy-k_zz\right)}$.

όπως καθοριστήκαν από τις (σχ. 2.5,9). Οπότε: $E_m=E_{0m}e^{i(\omega t-\mathbf{k}\cdot\mathbf{r})}$ $m=x,y,z$ και $B_m=B_{0m}e^{i(\omega t-\mathbf{k}\cdot\mathbf{r})}$ $m=x,y,z$. Αλλά κατά τα γνωστά:

$$\nabla\times\mathbf{E}=\begin{pmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ E_x & E_y & E_z\end{pmatrix}=\left(\frac{\partial E_z}{\partial y}-\frac{\partial E_y}{\partial z}\right)\mathbf{i}+\left(\frac{\partial E_x}{\partial z}-\frac{\partial E_z}{\partial x}\right)\mathbf{j}+\left(\frac{\partial E_y}{\partial x}-\frac{\partial E_x}{\partial y}\right)\mathbf{k}$$

όπως και: $\frac{\partial E_m}{\partial n}=-ik_nE_{0m}e^{i(\omega t-\mathbf{k}\cdot\mathbf{r})}$ $n=x,y,z$, οπότε:

$$\nabla\times\mathbf{E}=\left\{\left[-ik_yE_{0z}+ik_zE_{0y}\right]\mathbf{i}+\left[-ik_zE_{0x}+ik_xE_{0z}\right]\mathbf{j}+\left[-ik_xE_{0y}+ik_yE_{0x}\right]\mathbf{k}\right\}e^{i(\omega t-\mathbf{k}\cdot\mathbf{r})}\Rightarrow$$

$$\nabla\times\mathbf{E}=-ie^{i(\omega t-\mathbf{k}\cdot\mathbf{r})}\left[\left(k_yE_{0z}-k_zE_{0y}\right)\mathbf{i}+\left(k_zE_{0x}-k_xE_{0z}\right)\mathbf{j}+\left(k_xE_{0y}-k_yE_{0x}\right)\mathbf{k}\right]\Rightarrow$$

$$\nabla\times\mathbf{E}=-ie^{i(\omega t-\mathbf{k}\cdot\mathbf{r})}\mathbf{k}\times\mathbf{E_0} \tag{2.12}$$

$$-\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}=-\frac{\partial}{\partial t}\left[\mathbf{B_0}e^{i(\omega t-\mathbf{k}\cdot\mathbf{r})}\right]=-\frac{\partial}{\partial t}\left[\left(B_{0x}\mathbf{i}+B_{0y}\mathbf{j}+B_{0z}\mathbf{k}\right)e^{i\left(\omega t-k_x x-k_y y-k_z z\right)}\right]=$$
$$=\left(-i\omega B_{0x}\mathbf{i}-i\omega B_{0y}\mathbf{j}-i\omega B_{0z}\mathbf{k}\right)e^{i(\omega t-\mathbf{k}\cdot\mathbf{r})}\Rightarrow$$

$$-\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}=-i\omega\mathbf{B_0}e^{i(\omega t-\mathbf{k}\cdot\mathbf{r})} \tag{2.13}$$

Επομένως από τις (σχ. 2.11,12,13) θα έχουμε:

$-ie^{i(\omega t-\mathbf{k}\cdot\mathbf{r})}\mathbf{k}\times\mathbf{E_0}=-i\omega\mathbf{B_0}e^{i(\omega t-\mathbf{k}\cdot\mathbf{r})}$ και επειδή: $\mathbf{k}=k\mathbf{l}$ $\Rightarrow$ $\mathbf{B_0}=\dfrac{\mathbf{l}\times\mathbf{E_0}}{(\omega/k)}$ $\Rightarrow$

$$\mathbf{B_0}=\frac{\mathbf{l}\times\mathbf{E_0}}{c} \tag{2.14}$$

που από φυσική άποψη σημαίνει ότι: α) Τα διανύσματα $\mathbf{E_0}$ και $\mathbf{B_0}$ είναι κάθετα μεταξύ τους. β) Τα διανύσματα $\mathbf{E_0}$,$\mathbf{B_0}$ και $\mathbf{l}$ σχηματίζουν τρισορθογώνιο σ.σ. γ) Μεταξύ των πεδίων $\mathbf{E_0}$ και $\mathbf{B_0}$ η διαφορά φάσης είναι μηδέν. Είναι αυτονόητο βέβαια ότι αν πολλαπλασιάσουμε τα δύο μέλη της (σχ. 2.14) με τον παράγοντα $e^{i(\omega t-\mathbf{k}\cdot\mathbf{r})}$ θα έχουμε:

$$\mathbf{B}=\frac{\mathbf{l}\times\mathbf{E}}{c} \tag{2.15}$$

δ) Ακολουθώντας ίδιες περίπου διαδικασίες και εκκινώντας από τη (σχ. Γ1.15): $\nabla\times\mathbf{B}=\varepsilon_0\mu_0\dfrac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}$ βρίσκουμε τελικά:

$$\mathbf{E_0}=-c\mathbf{l}\times\mathbf{B_0} \tag{2.16}$$

Και αν πολλαπλασιάσουμε τα δύο μέλη της (σχ. 2.16) με τον παράγοντα $e^{i(\omega t-\mathbf{k}\cdot\mathbf{r})}$ θα έχουμε:

$$\mathbf{E}=-c\mathbf{l}\times\mathbf{B} \tag{2.17}$$

Μπορούμε τέλος να υπολογίσουμε τη σχέση που υφίσταται μεταξύ των πλατών $\mathbf{E_0}$ και $\mathbf{B_0}$. Πράγματι με τη βοήθεια της (σχ. 2. 14):

$$\mathbf{B_0} = \frac{\mathbf{l} \times \mathbf{E_0}}{c} \quad \Rightarrow \quad |\mathbf{B_0}| = \frac{|\mathbf{l} \times \mathbf{E_0}|}{c} = \frac{|\mathbf{l}||\mathbf{E_0}|\sin\theta}{c} \text{ και επειδή: } |\mathbf{l}| = 1 \ , \ \ \mathbf{E_0} \perp \mathbf{l} \Rightarrow \sin\theta = 1$$

Θα έχουμε τελικά:

$$|\mathbf{B_0}| = \frac{|\mathbf{E_0}|}{c} \tag{2.18}$$

Προκειμένου τέλος οι τύποι που αφορούν τον εγκάρσιο χαρακτήρα των Η/Μ κυμάτων στο κενό να ισχύουν για ομογενή και ισότροπα μέσα, θα πρέπει η ταχύτητα φάσης $c = 1/\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}$ του κενού ν' αντικατασταθεί με την $\upsilon = 1/\sqrt{\varepsilon\mu}$ που ισχύει για το μέσο.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ 3

Μεταφορά ενέργειας, ορμής και στροφορμής από τα Η/Μ κύματα

3.1 *Μεταφορά ενέργειας από τα Η/Μ κύματα. Ένταση του φωτός*

Βασικό χαρακτηριστικό των Η/Μ κυμάτων είναι ότι μεταφέρουν ενέργεια, ορμή και στροφορμή. Η εφαρμογή της αρχής της διατήρησης της ενέργειας, οδηγεί στην ανάδειξη αναλυτικών σχέσεων (συναρτήσει της έντασης του ηλεκτρικού πεδίου $\mathbf{E}$ και της μαγνητικής επαγωγής $\mathbf{B}$) για τα μεγέθη της πυκνότητας u (ηλεκτρικής και μαγνητικής ανά μονάδα όγκου) καθώς και της ροής $\mathbf{S}$ (ανά μονάδα χρόνου και ανά μονάδα επιφάνειας) της ενέργειας του πεδίου. Η $\mathbf{S}$ σχετίζεται με ένα θεμελιώδες για την Οπτική ενεργειακό μέγεθος που ονομάζεται ***ένταση του φωτός (irradiance)***, στο οποίο αποκρίνονται οι διάφοροι σε κοινή χρήση ανιχνευτές της ορατής περιοχής του Η/Μ φάσματος. Πράγματι ένας άλλος σπουδαίος παράγοντας (εκτός της συμφωνίας) που αφορά τη μελέτη του συσχετισμού των Η/Μ διαταραχών, είναι και ο τρόπος ανίχνευσής τους. Οι γνωστοί ανιχνευτές φωτός που χρησιμοποιούνται συνήθως είναι: ο αμφιβληστροειδής του ματιού μας, τα φωτογραφικά φιλμ, οι φωτοδίοδοι, οι φωτοαντιστάσεις, οι φωτοπλασιαστές, οι C.C.D. κάμερες κ.λ.π.. Η ιδιαιτερότητα των παραπάνω ανιχνευτών, οφείλεται στο ότι η 'μέτρηση' της Η/Μ ακτινοβολίας (αναφερόμαστε εδώ για την ορατή περιοχή του φάσματος), διαρκεί για μεγάλο χρονικό διάστημα σε σχέση με την περίοδο T του κύματος. Πράγματι για το αρμονικά εναλλασσόμενο ηλεκτρικό πεδίο στην προαναφερόμενη περιοχή συχνοτήτων (όπου $\nu \simeq 10^{14}\,\mathrm{Hz}$) θα είναι: $T = 1/\nu \simeq 10^{-14}\,\mathrm{s}$. Δηλ. πρόκειται για ένα ταχύτατα μεταβαλλόμενο μέγεθος. Ας υποθέσουμε τώρα ότι διαθέτουμε ένα ανιχνευτή με ***χρόνο απόκρισης (response time)*** $T' \simeq 10^{-6}\,\mathrm{s}$. Σαν χρόνο απόκρισης αυτού του οργάνου θα μπορούσαμε (με όχι πολύ αυστηρό τρόπο) να χαρακτηρίσουμε το ελάχιστο χρονικό διάστημα κατά τη διάρκεια του οποίου ο ανιχνευτής έχει τη δυνατότητα να μετρήσει ('ν' αντιληφθεί') ένα γεγονός ανεξάρτητο από ένα άλλο που ακολουθεί. Με βάση τα προαναφερόμενα, ο ανιχνευτής με $T' \simeq 10^{-6}\,\mathrm{s}$ δεν θα έχει τη δυνατότητα να 'καταγράψει' αλλαγές γεγονότων που συμβαίνουν με συχνότητα $\nu' = 1/T' > 10^{6}\,\mathrm{Hz}\left(1\mathrm{MHz}\right)$. Επειδή όμως

για την ορατή περιοχή του φάσματος η περίοδος είναι περίπου $T \simeq 10^{-14}\,\mathrm{s}$, τότε τα 'γεγονότα' (περίοδοι) που θα δέχεται ο προαναφερόμενος ανιχνευτής στο διάστημα των $T' \simeq 10^{-6}\,\mathrm{s}$ θα είναι: $N = \; N = T'/T = 10^{-6}/10^{-14} = 10^{8}$. Βλέπουμε δηλ. ότι στο ελάχιστο χρονικό διάστημα που μπορεί ν' ανιχνεύσει ευκρινώς δέχεται 10^8 περιόδους της μεταβολής του $\mathbf{E}$. Πόσο μάλλον θα μπορούσε ν' ανιχνεύσει (και να μετρήσει) στιγμιαία τιμή του ηλεκτρικού πεδίου!

Αυτός είναι ο λόγος, για τον οποίο οι συνήθεις ανιχνευτές στην πραγματικότητα μετρούν το ενεργειακό αποτέλεσμα ενός προσπίπτοντος Η/Μ κύματος (στην προκειμένη περίπτωση του φωτός), για ένα μεγάλο χρονικό διάστημα σε σχέση με την περίοδό του. Από φυσική άποψη η διαδικασία αφορά τον υπολογισμό της μέσης χρονικής τιμής (για τον χρόνο μέτρησης), του μέτρου του διανύσματος Poynting. Το συγκεκριμένο διάνυσμα εκφράζει τη στιγμιαία τιμή της ενέργειας ανά μονάδα χρόνου που διέρχεται από τη μονάδα επιφάνειας κάθετης στη διεύθυνση διάδοσης της Η/Μ ακτινοβολίας. Δηλ. τελικά οι ανιχνευτές μετρούν το μέγεθος το οποίο ονομάσαμε ***ένταση του φωτός*** και εκφράζεται σε μονάδες $\mathrm{W/m^2}$. Είναι απαραίτητο επίσης ν' αναφέρουμε ότι οι ανιχνευτές που χρησιμοποιούμε συνήθως για μετρήσεις έντασης του φωτός, έχουν σαν βασικό χαρακτηριστικό ότι ο ***χρόνος ολοκλήρωσής*** τους (διάρκεια της μέτρησης) είναι πολύ μεγαλύτερος του ***χρόνου συμφωνίας*** της ακτινοβολίας που εκπέμπουν οι συγκεκριμένες πηγές. Σαν χρόνο συμφωνίας μπορούμε να ορίσουμε με όχι πολύ αυστηρό τρόπο τη χρονική διάρκεια εκάστου των εκπεμπόμενων κυματοσυρμών. Μια ενδεικτική τιμή αυτού του χρόνου μπορούμε να θεωρήσουμε (για την περίπτωση των χαοτικών πηγών, όπως είναι μια πηγή λευκού φωτός) το χρόνο διέγερσης – αποδιέγερσης των ατόμων $\left(\tau \simeq 10^{-8}\,\mathrm{s}\right)$ κατά τη διαδικασία παραγωγής του φωτός

Η αρχή της διατήρησης της ενέργειας στο Η/Μ πεδίο. Το διάνυσμα Poynting[*]

Σκοπός μας είναι να βρούμε τρόπο για να εκφράσουμε την αρχή της διατήρησης της ενέργειας που οφείλεται αποκλειστικά στο Η/Μ πεδίο. Για το λόγο αυτό, θεωρούμε ένα πεπερασμένο όγκο V στο εσωτερικό του οποίου υφίσταται εκτός του Η/Μ πεδίου και ύλη. Τότε η συνολική ενέργεια του πεδίου

[*] R.Feynman, R.Leighton & M.Sands:'The Feynman Lectures on Physic' vol.II 27-2 .

ελαττώνεται: α) επειδή υπάρχει ροή ενέργειας προς το εξωτερικό του προαναφερομένου όγκου (ακτινοβολούμενη ενέργεια) και β) επειδή το πεδίο εκτελεί έργο στην ύλη. Αν υποθέσουμε ότι με u συμβολίζουμε την πυκνότητα ενέργειας του πεδίου (ενέργεια ανά μονάδα όγκου), τότε η συνολική ενέργεια στο εσωτερικό του όγκου V θα είναι:

$$\iiint_V u dV \tag{3.1.1}$$

και ο λόγος της ελάττωσής της θα δίνεται από τη χρονική παράγωγο αυτού του ολοκληρώματος. Η ροή της ενέργειας του πεδίου προς τα εξωτερικά του όγκου V θα είναι το επιεπιφάνειο ολοκλήρωμα του $\mathbf{S}$ (ενέργεια ανά μονάδα χρόνου και ανά μονάδα επιφάνειας) υπεράνω της Σ που περικλείει τον όγκο V. Δηλ.

$$\iint_\Sigma \mathbf{S}\cdot\mathbf{n}\, d\alpha \tag{3.1.2}$$

όπου $\mathbf{n}$ η μοναδιαία κάθετος στη στοιχειώδη επιφάνεια da. Επομένως θα έχουμε τελικά:

$-\dfrac{\partial}{\partial t}\iiint_V u dV = \iint_\Sigma \mathbf{S}\cdot\mathbf{n}\, d\alpha +$ (χρονικός ρυθμός του εκτελούμενου έργου από το πεδίο στην ύλη, που περιλαμβάνεται στο εσωτερικό του όγκου V). (3.1.3)

Η (σχ. 3.1.3) αποτελεί μια ***τοπική έκφραση*** της αρχής της διατήρησης της ενέργειας για το Η/Μ πεδίο. Δεδομένου όμως ότι η ύλη αποτελείται από κινούμενα φορτία, τότε στο καθένα από αυτά (επειδή βρίσκονται υπό την επίδραση του πεδίου), θα ασκείται μία δύναμη Lorentz της μορφής $\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \boldsymbol{\upsilon}\times\mathbf{B})$ και επειδή ο ρυθμός του εκτελουμένου έργου (ισχύς) δίνεται από τη γνωστή σχέση $\mathbf{F}\cdot\boldsymbol{\upsilon}$ θα έχουμε: $\mathbf{F}\cdot\boldsymbol{\upsilon} = q\,\mathbf{E}\cdot\boldsymbol{\upsilon}$. Αν υποθέσουμε ότι υπάρχουν N 'σωματίδια' ανά μονάδα όγκου θα είναι: $\mathbf{F}\cdot\boldsymbol{\upsilon} = Nq\mathbf{E}\cdot\boldsymbol{\upsilon}$. Αλλά είναι γνωστό ότι $Nq\boldsymbol{\upsilon} = \mathbf{j}$, όπου $\mathbf{j}$ η πυκνότητα του ρεύματος ($\mathbf{j} = \sigma\mathbf{E}$ με σ την αγωγιμότητα του υλικού), οπότε: $Nq\mathbf{E}\cdot\boldsymbol{\upsilon} = \mathbf{E}\cdot\mathbf{j}$. Τότε το ολοκλήρωμα όγκου της τελευταίας σχέσης μας δίνει το ρυθμό του εκτελούμενου έργου από το πεδίο στην ύλη που βρίσκεται στο εσωτερικό του όγκου V. Επομένως η (σχ. 3.1.3) γράφεται:

$$-\frac{\partial}{\partial t}\iiint u dV = \iint_{\Sigma} \mathbf{S}\cdot\mathbf{n}\, da + \iiint_{V} \mathbf{E}\cdot\mathbf{j}\, dV \tag{3.1.4}$$

και αποτελεί την ολοκληρωτική έκφραση της αρχής της διατήρησης της ενέργειας στο Η/Μ πεδίο. Με τη βοήθεια του θεωρήματος των Ostrogradsky – Gauss θα έχουμε: $\iint_{\Sigma} \mathbf{S}\cdot\mathbf{n} da = \iiint_{V} \nabla\mathbf{S} dV$. Η τελευταία αν αντικατασταθεί στη (σχ. 3.1.4) βρίσκουμε:

$$-\iiint_{V} \frac{\partial u}{\partial t} dV = \iiint_{V} \nabla\mathbf{S}\, dV + \iiint_{V} \mathbf{E}\cdot\mathbf{j} dV \tag{3.1.5}$$

Προκειμένου η (σχ. 3.1.5) να ικανοποιείται για οποιοδήποτε όγκο V, θα πρέπει για τις υπό ολοκλήρωση ποσότητες να ισχύει:

$$-\frac{\partial u}{\partial t} = \nabla\mathbf{S} + \mathbf{E}\cdot\mathbf{j} \tag{3.1.6}$$

που αποτελεί τη διαφορική έκφραση της τοπικής αρχής της διατήρησης της ενέργειας για το Η/Μ πεδίο.

Παρά το ότι τα μεγέθη u (ενέργεια πεδίου ανά μονάδα όγκου) και $\mathbf{S}$ (ροή της ενέργειας ανά μονάδα χρόνου και ανά μονάδα επιφάνειας) δεν μπορούν να εκφραστούν μονοσήμαντα συναρτήσει των $\mathbf{E}$ και $\mathbf{B}$ από τη (σχ. 3.1.6), εντούτοις με τη βοήθεια των εξισώσεων Maxwell (σχ. Γ1.12,15) και την ιδιότητα:

$$\nabla\left(\mathbf{B}\times\mathbf{E}\right) = \mathbf{E}\cdot\left(\nabla\times\mathbf{B}\right) - \mathbf{B}\cdot\left(\nabla\times\mathbf{E}\right)$$

ο Poynting (1884) κατόρθωσε ν' αποδείξει ότι για δυναμικά πεδία οι εκφράσεις των u και $\mathbf{S}$ στο κενό είναι οι εξής:

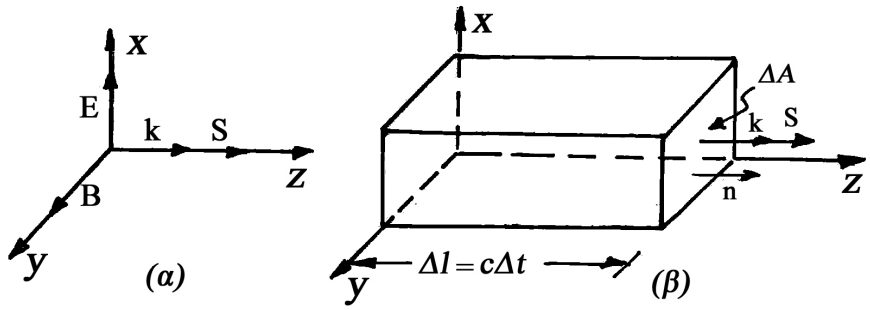
$$u = \frac{\varepsilon_o}{2}\mathbf{E}\cdot\mathbf{E} + \frac{\varepsilon_o c^2}{2}\mathbf{B}\cdot\mathbf{B} = \frac{\varepsilon_o}{2}\mathbf{E}\cdot\mathbf{E} + \frac{1}{2\mu_0}\mathbf{B}\cdot\mathbf{B} \tag{3.1.7}$$

$$\mathbf{S} = \varepsilon_0 c^2 \mathbf{E}\times\mathbf{B} \tag{3.1.8}$$

Η (σχ. 3.1.7) εκφράζει την ενέργεια ανά μονάδα όγκου στην περιοχή ενός δυναμικού (δηλ. χρονικά μεταβαλλόμενου) Η/Μ πεδίου. Βλέπουμε ότι αποτελείται από δύο προσθετέους οι οποίοι με τη σειρά τους εκφράζουν τις πυκνότητες του ηλεκτρικού και του μαγνητικού πεδίου. Είναι φανερό ότι η σχέση $u_e = \varepsilon_0 \mathbf{E} \cdot \mathbf{E}/2$, είναι πανομοιότυπη με αυτήν της πυκνότητας ενέργειας για το ηλεκτροστατικό πεδίο (π.χ. μεταξύ των παραλλήλων οπλισμών ενός φορτισμένου πυκνωτή). Επίσης η σχέση $u_m = \mathbf{B} \cdot \mathbf{B}/2\mu_0$ είναι πανομοιότυπη με αυτήν της πυκνότητας ενός μαγνητοστατικού πεδίου (π.χ. στο εσωτερικό ενός μακρού σωληνοειδούς που διαρρέεται από ρεύμα έντασης I). Το διάνυσμα $\mathbf{S}$ γνωστό σαν ***διάνυσμα Poynting***, παριστάνει τη στιγμιαία τιμή της ροής της ενέργειας στο Η/Μ πεδίο. Δηλ. τη διακινούμενη ενέργεια ανά μονάδα χρόνου και ανά μονάδα επιφάνειας κατά μήκος της διεύθυνσης διάδοσης $(\mathbf{E} \times \mathbf{B})$ του Η/Μ κύματος.

Η ένταση του φωτός (Irradiance)

Στα επόμενα θα προσπαθήσουμε να δούμε τον τρόπο με τον οποίο το διάνυσμα Poynting $\mathbf{S}$ (ή η πυκνότητα ενέργειας u), χρησιμεύουν για τον προσδιορισμό του μεγέθους της έντασης του φωτός. Για το λόγο αυτό επιλέγουμε – χωρίς να παραβιάζεται η γενικότητα – μια περιοχή στο κενό, όπου διαδίδεται



(Σχ. 3.1.1)

ένα επίπεδο Η/Μ κύμα (Σχ. 3.1.1α) προς ορισμένη διεύθυνση. Θεωρούμε ένα πεπερασμένο όγκο ΔV στο εσωτερικό του διαδιδόμενου πεδίου, με τη μορφή παραλληλεπιπέδου μήκους Δl (κατά τη διεύθυνση διάδοσης) και διατομής ΔA (Σχ. 3.1.1β). Κατόπιν εφαρμόζουμε την αρχή διατήρησης της ενέργειας (σχ. 3.1.4) με την προϋπόθεση βέβαια ότι στο εσωτερικό του όγκου ΔV δεν υπάρχει ύλη και

η πυκνότητα ενέργειας του πεδίου είναι u. Θα πρέπει τότε η χρονική μεταβολή της u στον ΔV να είναι ίση με τη ροή της ενέργειας από την επιφάνεια $\Delta\Sigma$ που περικλείει τον προαναφερόμενο όγκο. Δηλαδή:

$$-\frac{\partial}{\partial t}\iiint_V u\, dV = \iint_\Sigma \mathbf{S}\cdot\mathbf{n}da \quad \text{ή} \quad -\frac{u\Delta V}{\Delta t} = |\mathbf{S}|\cdot\Delta A \tag{3.1.9}$$

Πράγματι επειδή στο συγκεκριμένο παράδειγμα θεωρούμε τη διάδοση επιπέδου κύματος, η ενέργεια εξέρχεται μόνο από την επιφάνεια ΔA (δηλ. ρέει προς τη διεύθυνση z) του όγκου ΔV (Σχ. 3.1.1β) για χρόνο έστω Δt. Άρα θα είναι η ενέργεια που περιλαμβάνεται στο εσωτερικό του όγκου $\Delta V = \Delta l\cdot\Delta A = c\Delta t\cdot\Delta A$. Επομένως από τη (σχ. 3.1.9) βρίσκουμε:

$$|\mathbf{S}| = uc \tag{3.1.10}$$

Εξαιτίας της τελευταίας σχέσης, ο ορισμός της έντασης του φωτός μπορεί να γίνει ισοδύναμα: α) είτε μέσω του $|\mathbf{S}|$, β) είτε μέσω της u.

α) Για επίπεδο Η/Μ κύμα θα έχουμε:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0\cos(\omega t - kz), \quad \mathbf{B} = \mathbf{B}_0\cos(\omega t - kz) \tag{3.1.11}$$

Επομένως με βάση τη (σχ. 3.1.8):

$$|\mathbf{S}| = \varepsilon_0 c^2 |\mathbf{E}\times\mathbf{B}| = \varepsilon_0 c^2 |\mathbf{E}_0\times\mathbf{B}_0|\cos^2(\omega t - kz) \tag{3.1.12}$$

Όμως μεταξύ των πλατών $\mathbf{E_0}$ και $\mathbf{B_0}$ υφίσταται η (σχ. 2.18): $|\mathbf{B_0}| = |\mathbf{E_0}|/c$ ή $B_0 = E_0/c$ οπότε: $|\mathbf{E}_0\times\mathbf{B}_0| = E_0^2/c$. Τότε:

$$|\mathbf{S}| = \varepsilon_0 c^2 |\mathbf{E}\times\mathbf{B}| = \varepsilon_0 c E_0^2\cos^2(\omega t - kz) \tag{3.1.13}$$

Η τελευταία μας δίνει τη στιγμιαία τιμή της διακινούμενης ενέργειας ανά μονάδα χρόνου και ανά μονάδα επιφάνειας στη διεύθυνση διάδοσης του κύματος.

Επικαλεσθήκαμε στην εισαγωγή αυτού του κεφαλαίου τις πολύ υψηλές τιμές των συχνοτήτων ταλάντωσης των πεδίων για την ορατή περιοχή του Η/Μ φάσματος $\left(\simeq 10^{14}\,\mathrm{Hz}\right)$ γεγονός που καθιστά αποτρεπτική την προσπάθεια 'μέτρησης' τους από κοινούς ανιχνευτές με χρόνο απόκρισης ακόμα και της τάξης των $\left(\simeq 10^{-6}\,\mathrm{s}\right)$. Για το ίδιο ακριβώς λόγο δεν μπορεί να μετρηθεί ούτε η στιγμιαία τιμή του μέτρου του διανύσματος Poynting επειδή μάλιστα η συχνότητά του έχει διπλάσια τιμή αυτής των πεδίων $\left(\cos^2\theta = 1-\cos 2\theta\right)$. Από το γεγονός αυτό οδηγούμαστε στο να υιοθετήσουμε ένα μετρήσιμο μέγεθος ενεργειακής φύσης για το πεδίο. Πρόκειται για τη μέση χρονική τιμή του μέτρου του διανύσματος Poynting $\langle|\mathbf{S}|\rangle$, όπου μπορούμε να θεωρήσουμε ότι ο χρόνος ολοκλήρωσης είναι η διάρκεια μέτρησης του ανιχνευτή. Τότε από τη (σχ. 3.1.13) βρίσκουμε:

$$I = \langle|\mathbf{S}|\rangle = \frac{1}{\tau}\int_0^{\tau}|\mathbf{S}|\,dt = \varepsilon_0 c E_0^2\left[\frac{1}{\tau}\int_0^{\tau}\cos^2\left(\omega t - kz\right)dt\right] = \varepsilon_0 c E_0^2\left\langle\cos^2\left(\omega t - kz\right)\right\rangle_{\tau} \Rightarrow$$

$$I = \langle|\mathbf{S}|\rangle = \frac{1}{2}\varepsilon_0 c E_0^2 \qquad (3.1.14)$$

όπου E_0 το πλάτος της έντασης του ηλεκτρικού πεδίου, τ ο χρόνος ολοκλήρωσης και $\left\langle\cos^2\left(\omega t - kz\right)\right\rangle_{\tau} = 1/2$ Η ποσότητα I μετρούμενη σε $\mathrm{W/m^2}$ ονομάζεται ***ένταση του φωτός (irradiance)*** και αποτελεί το μετρούμενο από τους συνήθεις ανιχνευτές μέγεθος.

β) Γνωρίζουμε ότι η πυκνότητα ενέργειας στον όγκο ΔV του πεδίου δίνεται από τη (σχ. 3.1.7):

$$u = \frac{\varepsilon_o}{2}\mathbf{E}\cdot\mathbf{E} + \frac{\varepsilon_o c^2}{2}\mathbf{B}\cdot\mathbf{B} = \frac{\varepsilon_o E^2}{2} + \frac{\varepsilon_o c^2 B^2}{2} = \frac{\varepsilon_o E^2}{2} + \frac{\varepsilon_o c^2}{2}\left(\frac{E}{c}\right)^2 = \varepsilon_o E^2 \qquad (3.1.15)$$

Όπου $B = E/c$ και $E = E_0\cos\left(\omega t - kz\right)$. Άρα η ενέργεια που διέρχεται από την επιφάνεια ΔA σε χρόνο Δt, είναι αυτή που περιλαμβάνεται στον όγκο ΔV δηλ. η $u\Delta V = u\left(c\Delta t\right)\Delta A$. Επομένως η διερχόμενη ενέργεια ανά μονάδα χρόνου και ανά μονάδα επιφάνειας θα είναι:

$$\frac{u\left(c\Delta t\right)\cdot\Delta A}{\Delta t\cdot\Delta A}=cu=\left|\mathbf{S}\right|=\varepsilon_0 cE^2=\varepsilon_0 cE_0^2\cos^2\left(\omega t-kz\right) \qquad (3.1.16)$$

Οπότε η λήψη της μέσης χρονικής της τιμής (δηλ. η ένταση του φωτός), μας οδηγεί σε μια πανομοιότυπη έκφραση όπως αυτή της σχέσης (σχ. 3.1.14).

Παράδειγμα

Η ισχύς εξόδου ενός εργαστηριακού Laser αερίου $\mathrm{He-Ne}$ είναι $P=3\mathrm{mW}$. Γνωστού όντως ότι το μέτωπο κύματος της εξερχόμενης δέσμης είναι επίπεδο και ότι η διάμετρός της είναι $d=2\mathrm{mm}$ να υπολογιστούν: α) Το πλάτος E_0 της έντασης του ηλεκτρικού πεδίου και β) το πλάτος B_0 της μαγνητικής επαγωγής.

- α) Από τη (σχ. 3.1.14) έχουμε: $I=\left(1/2\right)\varepsilon_0 cE_0^2$ όπου $I=P/A$ με A το εμβαδόν της διατομής της δέσμης. Επειδή $A=\pi\left(d/2\right)^2=3.14\times10^{-6}\,\mathrm{m}^2$, τότε $I=0.955\times10^3\,\mathrm{W/m}^2$ θα είναι η τιμή της έντασης του φωτός. Έχουμε επίσης: $E_0=\sqrt{2I/\left(\varepsilon_0 c\right)}$ και επειδή $\varepsilon_0=8.842\times10^{-12}\,\mathrm{F/m}$ και $c=2.9979\times10^8\,\mathrm{m/s}$ βρίσκουμε: $E_0=848\,\mathrm{V/m}$. β) Με βάση επίσης τη σχέση $B_0=E_0/c$ θα είναι: $B_0=2.82\times10^{-6}\,\mathrm{Tesla}$.

Η (σχ. 3.1.14) μας δίνει την ένταση του φωτός σαν μέση χρονική τιμή του μέτρου του διανύσματος Poynting για την περίπτωση της διάδοσης της ακτινοβολίας στο κενό, όπου η $\left|\mathbf{S}\right|$ περιγράφεται από τη (σχ. 3.1.13). Όταν όμως η ακτινοβολία διαδίδεται στο εσωτερικό οπτικού μέσου ομογενούς, ισοτρόπου και γραμμικού, του οποίου ο δ.δ είναι n τότε η (σχ. 3.1.13) παίρνει τη μορφή:

$$\left|\mathbf{S}\right|=\varepsilon\upsilon^2\left|\mathbf{E}'\times\mathbf{B}'\right|\cos^2\left(\omega t-kz\right)=\varepsilon\upsilon E_0'^2\cos^2\left(\omega t-kz\right) \qquad (3.1.17)$$

όπου υ η ταχύτητα του φωτός στο μέσον, ε η αντίστοιχη διαπερατότητά του και E_0' το πλάτος του ηλ. πεδίου στο μέσον με $B_0'=E_0'/\upsilon$. Τότε θα έχουμε:

$$I=\left\langle\left|\mathbf{S}\right|\right\rangle=\frac{1}{\tau}\int_0^{\tau}\left|\mathbf{S}\right|dt=\frac{1}{2}\varepsilon\upsilon E_0'^2 \qquad (3.1.18)$$

Επειδή όμως $n = c/\upsilon$, $k_e = \varepsilon/\varepsilon_0$ και $n^2 = k_e$ όπου k_e η διηλεκτρική σταθερή του μέσου, τότε από τη σχέση (σχ. 3.1.18) βρίσκουμε:

$$I = n\frac{\varepsilon_o c}{2}E_o'^2 \ . \tag{3.1.19}$$

3.2 Μεταφορά ορμής από τα Η/Μ κύματα. Πίεση ακτινοβολίας

Είναι γνωστό και πειραματικά αποδεδειγμένο ότι αν Η/Μ ακτινοβολία προσπέσει σ' ένα σώμα θα του μεταδώσει ορμή. Δηλ. πάνω του ασκείται μια πίεση. Θα θεωρήσουμε αρχικά ότι το σώμα είναι μέτριας αγωγιμότητας ($k_e \simeq 1$, $k_m \simeq 1$) γεγονός που θα έχει σαν συνέπεια την απορρόφηση από αυτό της Η/Μ ακτινοβολίας . Έστω τώρα ότι ένα επίπεδο μέτωπο κύματος πέφτει κάθετα σ' αυτό. Κατά την πρόσκρουση (Σχ. 3.2.1), το πεδίο $\mathbf{E}$ του κύματος αναγκάζει τους ηλεκτρικούς φορείς του υλικού να κινηθούν και δημιουργεί ένα ρεύμα πυκνότητας $\mathbf{j} = \sigma\mathbf{E}$. Τότε το μαγνητικό πεδίο του κύματος επαγωγής $\mathbf{B}$ δρα πάνω στον καθένα τους με μια δύναμη $\langle\mathbf{F}\rangle = q\langle\boldsymbol{\upsilon}\rangle\times\mathbf{B}$ (δύναμη Lorentz. βλ. ΠΑΡ/ΜΑ 1 (Σχ. Α6.4)) όπου q το φορτίο ενός εκάστου και $\langle\boldsymbol{\upsilon}\rangle$ η ταχύτητα της διατεταγμένης κίνησης των φορέων λόγω του πεδίου $\mathbf{E}$. Αν τώρα θεωρήσουμε ένα στοιχειώδη όγκο dV του υλικού, τότε η συνολικά ασκούμενη δύναμη στον τελευταίο θα είναι:

$$\mathbf{F} = ndV\langle\mathbf{F}\rangle = ndVq\langle\boldsymbol{\upsilon}\rangle\times\mathbf{B} \tag{3.2.1}$$

όπου n ο αριθμός των φορέων ανά μονάδα όγκου. Η τελευταία σχέση μπορεί να γραφεί ως εξής:

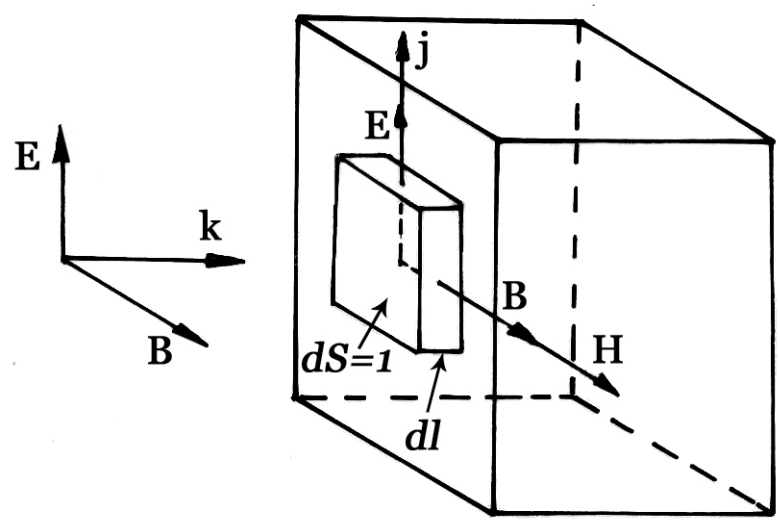
$$\mathbf{F} = ndVq\langle\boldsymbol{\upsilon}\rangle\times\mathbf{B} = \left(nq\langle\boldsymbol{\upsilon}\rangle\right)\times\mathbf{B}dV = \mathbf{j}\times\mathbf{B}dV \tag{3.2.2}$$

όπου $\mathbf{j} = nq\langle\boldsymbol{\upsilon}\rangle$ είναι η πυκνότητα του ρεύματος με διαστάσεις $\mathrm{A/m^2}$. Τελικά η ασκούμενη δύναμη στον αγωγό ανά μονάδα όγκου θα είναι:

$$\mathbf{F}_{u,V.} = \mathbf{j}\times\mathbf{B} = \mu_0\mathbf{j}\times\mathbf{H} \quad \left(k_m \cong 1\right) \tag{3.2.3}$$

Η διεύθυνση της δύναμης αυτής όπως φαίνεται και από το (Σχ. 3.2.1) είναι αυτή της πρόσπτωσης του κύματος.

Αν τώρα υποθέσουμε ότι το μέτρο της επιφάνειας dS (του στοιχειώδους όγκου $dV = dSdl$) είναι ίση με τη μονάδα και το πάχος του dl, τότε η στοιχειώδης ορμή dp που θα μεταφέρεται κατά τα γνωστά ανά μονάδα χρόνου στο 'πλακίδιο' αυτό θα είναι:



(Σχ. 3.2.1)

$$dp = Fdt = \frac{F}{dV} dVdt = F_{u,V} dSdldt = F_{u,V} dl = \mu_0 jHdl \qquad (3.2.4)$$

επειδή $dS = 1$, $dt = 1$ και τα διανύσματα **j** και **H** είναι κάθετα μεταξύ τους. Γνωρίζουμε όμως (βλ. επόμενη σημείωση) ότι η απορροφούμενη ενέργεια από το 'πλακίδιο' στη μονάδα του χρόνου θα είναι:

$$dW = jEdl \qquad (3.2.5)$$

Σημείωση

Θεωρούμε ένα αγωγό (ΠΑΡ/ΜΑ 1 (Σχ. Α.5.2)) ο οποίος διαρρέεται από ρεύμα έντασης I όπου μεταξύ των άκρων του υφίσταται διαφορά δυναμικού U. Τότε $q = It$ είναι το φορτίο το οποίο περνάει από μια διατομή του σε χρόνο t. Το

παραγόμενο στον αγωγό έργο (που προέρχεται από την πηγή που συντηρεί την κίνηση των φορέων) θα είναι ίσο με $W = Uq$. Η τελευταία προκύπτει από το γεγονός ότι θεωρούμε το φορτίο q (συνολικά) να μετακινείται (σε χρόνο t) από το ένα άκρο του αγωγού στο άλλο μεταξύ των οποίων επικρατεί διαφορά δυναμικού U. Ο συνδυασμός των προαναφερομένων σχέσεων και του νόμου το Ohm μας δίνει:

$$W = Uq = UIt = RI^2 t \tag{3.2.6}$$

Στην περίπτωση που δεν συντελούνται χημικές διεργασίες στον αγωγό και δεν εκτελείται έργο σε εξωτερικά σώματα τότε το W θα προκαλεί αύξηση στην εσωτερική ενέργεια του αγωγού δηλ. θα μετατρέπεται σε θερμότητα.

Αν τώρα θελήσουμε να δούμε τι ακριβώς συμβαίνει σ' ένα πολύ μικρό τμήμα του αγωγού όσον αφορά το παραγόμενο και ταυτόχρονα μετατρεπόμενο σε θερμότητα στοιχειώδες έργο dW ανά μονάδα όγκου και χρόνου θα έχουμε (ΠΑΡ/ΜΑ 1 (Σχ. Α.5.2)):

$$dW = RI^2 dt = \frac{\rho dl}{dS}\left(jdS\right)^2 dt = \rho j^2 dVdt \tag{3.2.7}$$

όπου $dV = dS \cdot dl$. Επομένως το ποσό της θερμότητας που απορροφείται ανά μονάδα όγκου και ανά μονάδα χρόνου (***unit thermal power of current***) θα είναι:

$$Q_u = dW \big/ dVdt = \rho j^2 \tag{3.2.8}$$

Άρα για την περίπτωση του 'πλακιδίου' όγκου dV' όπου $dV' = dSdl$ με $dS = 1$ η απορροφούμενη κατά την πρόσπτωση της Η/Μ ακτινοβολίας ενέργεια στη μονάδα του χρόνου ($\Delta t = 1$) θα είναι:

$$\begin{aligned} dW &= Q_u dV' = \rho j^2 \Delta S \Delta l = \rho j^2 \Delta l = \\ &= \rho j \sigma E \Delta l = jEdl \quad \rightarrow \text{(σχ. 3.2.5)} \end{aligned} \tag{3.2.9}$$

Οπότε με τη βοήθεια των (σχ. 3.2.4,5) μπορούμε να βρούμε τον λόγο dp/dW (και κατά προέκταση του p/W) της μεταδιδόμενης ορμής προς την απορροφούμενη ενέργεια του Η/Μ κύματος από το 'πλακίδιο'. Οπότε:

$$\frac{dp}{dW} = \frac{p}{W} = \mu_0 \frac{H}{E} \tag{3.2.10}$$

και δεδομένου ότι $E/B = 1/c$ θα έχουμε:

$$\frac{p}{W} = \mu_0 \frac{H}{E} = \frac{B}{E} = \frac{1}{c} \tag{3.2.11}$$

που σημαίνει ότι Η/Μ κύμα που μεταφέρει ενέργεια W, θα μπορούσε να μεταφέρει και ορμή:

$$p = (1/c)W \tag{3.2.12}$$

Σημείωση

Θα πρέπει ν' αναφέρουμε εδώ ότι η ίδια ακριβώς σχέση μεταξύ ορμής και ενέργειας, ισχύει και για σωματίδια που έχουν μηδενική μάζα ηρεμίας όπως π.χ. είναι τα φωτόνια. Πράγματι με βάση την ειδική θεωρία της σχετικότητας, η συνολική ενέργεια $\mathcal{E}$ ενός σωματιδίου που η ορμή του είναι p και η μάζα ηρεμίας του m δίνεται από τη σχέση:

$$\mathcal{E} = c\sqrt{p^2 + m^2c^2} \tag{3.2.13}$$

Εάν τώρα (π.χ. για το φωτόνιο) $m = 0$ τότε $\mathcal{E} = cp$ δηλ.

$$p = (1/c)\mathcal{E} \tag{3.2.14}$$

Το γεγονός αυτό δεν αποτελεί κάτι το καινοφανές επειδή – όπως θα δούμε και στα αμέσως επόμενα – το επίπεδο Η/Μ κύμα (η δέσμη φωτός) λόγω της

μποζονικής φύσης των φωτονίων, μπορεί να παρασταθεί από ένα μεγάλο στατιστικό σύνολο φωτονίων της ίδιας κατάστασης.

Από τη (σχ. 3.2.12) μπορούμε να έχουμε:

$$p_{u,V} = \frac{1}{c} u \tag{3.2.15}$$

όπου $p_{u,V}$ το μέτρο της πυκνότητας της ορμής (δηλ. η μεταφερόμενη από το Η/Μ κύμα ορμή ανά μονάδα όγκου του υλικού) και u η πυκνότητα ενέργειας (δηλ. η μεταφερόμενη ενέργεια ανά μονάδα όγκου). Επειδή όμως $S = uc$ όπου S το μέτρο του διανύσματος Poynting τότε η (σχ. 3.2.15) γίνεται:

$$p_{u,V} = \frac{1}{c^2} S \quad \text{ή} \quad \mathbf{p}_{u,V} = \frac{1}{c^2}\mathbf{S} = \frac{1}{c^2}\mathbf{E}\times\mathbf{H} \tag{3.2.16}$$

$$\mathbf{S} = c^2 \varepsilon_o \mathbf{E}\times\mathbf{B}\,, \quad c^2 = 1/\varepsilon_o \mu_o\,, \quad \mathbf{H} = \mathbf{B}/\mu_o \quad k_m \simeq 1$$

επειδή θεωρήσαμε ομογενές υλικό.

Πολλαπλασιάζουμε τώρα τα δύο μέλη της (σχ. 3.2.15) επί $\Delta l/\Delta t$ όπου Δl το πάχος του 'πλακιδίου' (Σχ. 3.2.1) και Δt η χρονική διάρκεια της δράσης του Η/Μ κύματος. Τότε το μέγεθος που προκύπτει θα είναι η μεταφερόμενη από το Η/Μ κύμα ορμή ανά μονάδα επιφάνειας και ανά μονάδα χρόνου με διαστάσεις δύναμης ανά μονάδα επιφάνειας. Το μέγεθος αυτό εκφράζει την ασκούμενη ***πίεση*** $\mathcal{P}$ ***της ακτινοβολίας (radiation pressure)***. Δηλ.

$$\frac{p_{u,V}\Delta l}{\Delta t} = \mathcal{P} = \frac{1}{c} u \frac{\Delta l}{\Delta t} = \frac{1}{c} u \frac{c\Delta t}{\Delta t} = u \tag{3.2.17}$$

Επειδή το μέγεθος αυτό σαν πεδιακό πάλλεται σε υψηλές συχνότητες (για την ορατή περιοχή $\nu \simeq 10^{14}\,\text{Hz}$) μπορούμε να μετρήσουμε μόνο τη μέση χρονική του τιμή. Δηλ. τελικά:

$$\mathcal{P} = \langle u \rangle \tag{3.2.18}$$

Από τη (σχ. 3.2.12) θα έχουμε:

$$p_{u,V} = \frac{p}{V} = \frac{W}{Vc} = \frac{W}{c\Delta l\Delta S} = \frac{W\Delta t}{c\Delta l\Delta S\Delta t} = \frac{1}{c}\left[\frac{W}{\Delta S\Delta t}\right]\frac{\Delta t}{\Delta l}$$

οπότε: $$p_{u,V} = \frac{I}{c^2} \qquad (3.2.19)$$

επειδή: $\Delta l = c\Delta t$ και $I = W/\Delta S\Delta t$. Επίσης από τη (σχ. 3.2.15) $p_{u,V} = \frac{1}{c}u$ προκύπτει:

$$\frac{p_{u,V}\Delta l}{\Delta t} = \frac{1}{c}\frac{\Delta l}{\Delta t}u = \frac{1}{c}\frac{\Delta l}{\Delta t}\frac{W}{\Delta V} = \frac{1}{c}\left(\frac{W}{\Delta t\Delta S}\right)$$

και επειδή: $$\frac{p_{u,V}\Delta l}{\Delta t} = \frac{\Delta p}{\Delta V}\frac{\Delta l}{\Delta t} = \frac{\Delta p\Delta l}{\Delta S\Delta l\Delta t} = \left(\frac{\Delta p}{\Delta t}\right)\frac{1}{\Delta S} = \frac{F}{\Delta S} = \mathcal{P}$$

(δηλ. η πίεση της ακτινοβολίας (σχ. 3.2.17)) και $W/(\Delta t\Delta S) = I$ (δηλ. η ένταση μιας δέσμης μονοχρωματικού φωτός – επιπέδου μετώπου κύματος – διατομής ΔS), τελικά βρίσκουμε:

$$\mathcal{P} = I/c \qquad (3.2.20)$$

Στο συμπέρασμα ότι η $p_{u,V}$ (πυκνότητα της μεταφερόμενης ορμής του Η/Μ πεδίου) καθορίζεται από τη σχέση $dp = p_{u,V}dV$ με $dV = Sdl = Scdt$, κατέληξε και ο Maxwell το 1873.

Η ανάδειξη της έννοιας της πίεσης της ακτινοβολίας, μέσω μιας καθαρά θερμοδυναμικής θεώρησης προτάθηκε και από τον Bartoli το 1879. Πράγματι σύμφωνα με τον δεύτερο θερμοδυναμικό νόμο κατά την έκφραση του Clausius, δεν υπάρχει διαδικασία της οποίας το μοναδικό αποτέλεσμα να είναι η μεταφορά θερμικής ενέργειας (θερμότητας) από ένα ψυχρό σε ένα θερμό σώμα. Ήταν αποδεδειγμένο όμως ότι κάθε σώμα το οποίο βρίσκεται σε μια θερμοκρασία $T\left({}^0\mathrm{K}\right)$ εκπέμπει ενέργεια με τη μορφή Η/Μ ακτινοβολίας (ακτινοβολία μέλανος σώματος). Η ενέργεια αυτή θα μπορούσε να μεταφερθεί από ένα ψυχρό σ' ένα

θερμό σώμα χωρίς κατ' αρχή να παραβιάζεται ο πρώτος θερμοδυναμικός νόμος (αρχή της διατήρησης της ενέργειας σ' ένα κλειστό σύστημα). Ο Bartoli πρότεινε ότι μπορούμε να διαθέσουμε ένα π.χ. κυλινδρικό δοχείο με αδιαβατικά τοιχώματα και με τις εσωτερικές του επιφάνειες κατοπτρικές. Μέσα σ' αυτό βρίσκεται ένα σώμα θερμοκρασίας T_1 το οποίο ακτινοβολεί. Στο εσωτερικό του κυλίνδρου μπορεί να κινείται (μπρός−πίσω) ένα έμβολο, με τις ίδιες ιδιότητες όπως αυτές του κυλίνδρου. Τότε ένα ποσό της ακτινοβολούμενης (και εγκλωβισμένης στον κύλινδρο) ενέργειας, θα μπορούσε 'κατά κάποιο τρόπο' ν' αποσπαστεί με το τράβηγμα προς τα έξω του εμβόλου και συνακόλουθα 'ν' αποδοθεί' (μέσω αντίστροφης κινήσεις του εμβόλου) σ' ένα σώμα θερμοκρασίας T_2 (όπου $T_2 > T_1$).

Μια τέτοια θερμική μηχανή βέβαια είναι πολύ δύσκολο να κατασκευαστεί στην πράξη, εντούτοις το εγχείρημα δεν είναι απαγορευτικό. Με βάσει αυτές τις προϋποθέσεις ο Bartoli συμπέρανε ότι προκειμένου η μηχανή να μην παραβιάζει τον δεύτερο θερμοδυναμικό νόμο κατά τον κύκλο λειτουργίας της, το εκτελούμενο έργο (για τη μεταφορά της ακτινοβολούμενης θερμικής ενέργειας) από το ψυχρό σώμα θερμοκρασίας T_1 στο θερμό θερμοκρασίας T_2) θα προέρχεται από μια δύναμη. Η δύναμη αυτή θα μπορούσε ν' αναδειχθεί μόνο μέσω της ύπαρξης μιας πίεσης που θ' ασκούσε η εκπεμπόμενη από το σώμα Η/Μ ακτινοβολία. Ο Maxwell λοιπόν (μέσω Η/Μ υποθέσεων) καθώς και ο Bartoli (μέσω θερμοδυναμικών) κατέληξαν στο ίδιο συμπέρασμα: Ότι οι Η/Μ ακτινοβολίες (στις οποίες ανήκει και το φως) ασκούν πίεση (δύναμη ανά μονάδα επιφάνειας) στα σώματα στα οποία προσπίπτουν.

Στη γενικότερη περίπτωση που τα σώματα ανακλούν το φως μερικώς η (σχ. 3.2.20) παίρνει τη μορφή:

$$\mathcal{P} = (1+R)\frac{I}{c} \tag{3.2.21}$$

(όπου R ο συντελεστής ανακλαστικότητας), σύμφωνα με την αρχή της διατήρησης της ορμής. Όταν λοιπόν η επιφάνεια ανακλά ολικά το φως $(R=1)$ τότε $\mathcal{P} = 2I/c$. Σε αντιδιαστολή, όταν η επιφάνεια είναι πλήρως απορροφητική $(R=0)$ τότε $\mathcal{P} = I/c$.

Υπολογισμοί που έγιναν με τη βοήθεια της (σχ. 3.2.21) έδειξαν ότι η πίεση που ασκεί το φως είναι πάρα πολύ μικρή σε μέγεθος. Π.χ. η πίεση του

ηλιακού φωτός έντασης $I = 0.1\,\mathrm{W/cm^2}$ πάνω σ' ένα κάτοπτρο $(R = 1)$ είναι: $\mathcal{P} \simeq 10^{-4}\,\mathrm{dyn/cm^2}$. Αυτός ακριβώς είναι ο λόγος της δυσκολίας της πειραματικής της επιβεβαίωσης, δομένου ότι η δράση της συγκαλύπτεται από διάφορα συνοδευτικά φαινόμενα.

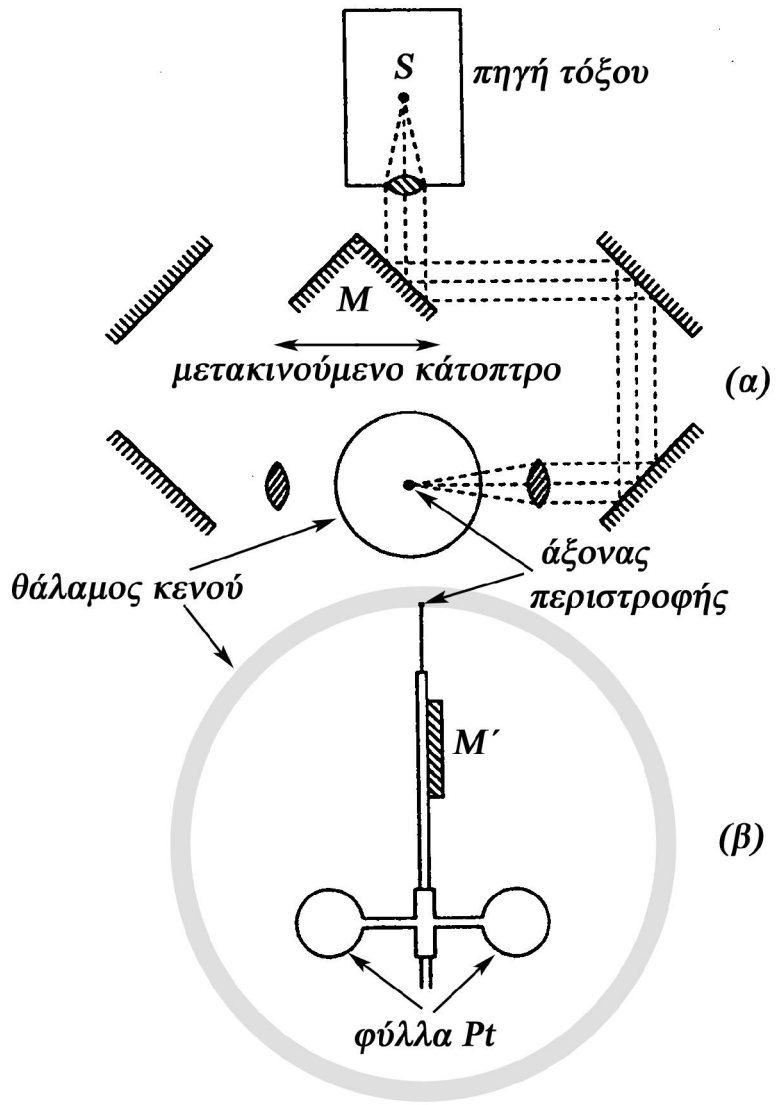
Η πρώτη ακριβής πειραματική μέτρηση της πίεσης της ακτινοβολίας του φωτός έγινε από τον Ρώσο φυσικό P.N. Lebedev to 1898*. Η πειραματική του διάταξη φαίνεται στο (Σχ. 3.2.2α). Αποτελείται από μία λυχνία τόξου η οποία μέσω ενός συστήματος απεικόνισης (από φακούς και κάτοπτρα) έχει τη δυνατότητα να φωτίσει φύλλο από Λευκόχρυσο, μικρών διαστάσεων και μικρού πάχους, το οποίο βρίσκεται στο εσωτερικό ενός θαλάμου. Στην πραγματικότητα υφίστανται δύο πανομοιότυπα φύλλα Λευκόχρυσου τοποθετημένα αντιδιαμετρικά και πιασμένα από ελαστικό λεπτό νήμα, το οποίο είναι αναρτημένο από την κορυφή του θαλάμου (Σχ. 3.2.2β). Το όλο σύστημα επομένως έχει τη δυνατότητα να περιστραφεί κατά μια γωνία, αν κατά κάποιο τρόπο αναπτυχθεί η ροπή ενός ζεύγους δυνάμεων που είναι κάθετες στις επιφάνειες των φύλλων. Το τελευταίο μπορεί να επιτευχθεί με τη μετακίνηση του γωνιακής μορφής κατόπτρου M (Σχ. 3.2.2α) σε συμμετρική θέση ως προς το προσπίπτον σ' αυτό παράλληλο μέτωπο κύματος. Τότε τα δύο φύλλα φωτίζονται ταυτόχρονα και προς αντίθετες κατευθύνσεις, με αποτέλεσμα λόγω της ασκούμενης πίεσης της ακτινοβολίας ν' αναπτυχθεί η προαναφερόμενη ροπή στρέψης. Η μέτρηση της γωνίας στροφής του νήματος γίνεται με τη βοήθεια ενός πολύ μικρών διαστάσεων και βάρους κατόπτρου M' προσκολλημένου στον κατακόρυφο άξονα περιστροφής, με την πρόσπτωση σ' αυτό δέσμης φωτός πολύ μικρής ισχύος.

Η προσπίπτουσα στα δύο φύλλα ένταση φωτός (και κατά προέκταση το εκτελούμενο σ' αυτά έργο), μετρήθηκε με ειδικό χρωματόμετρο (colorimetric measurements). Κατόπιν μέσω της γνωστής σχέσης: έργου – ροπής – γωνίας στροφής υπολογίστηκε η ροπή και κατά προέκταση η ασκούμενη δύναμη στο καθένα από τα φύλλα του Λευκόχρυσου. Επειδή τέλος το εμβαδόν τους S ήταν γνωστό, από τη σχέση $\mathcal{P} = F/S$ μπόρεσε να υπολογιστεί η ασκούμενη πίεση της ακτινοβολίας.

Από τη (σχ. 3.2.21) υπολογίστηκε θεωρητικά και βρέθηκε ότι οι ασκούμενες γενικά πιέσεις από ακτινοβολίες είναι πολύ μικρές. Το γεγονός αυτό έλαβε σοβαρά υπόψη του ο Lebedev και διευθέτησε δύο σοβαρούς παράγοντες οι οποίοι θα μπορούσαν να οδηγήσουν σε αποτυχία το πείραμά του. Ήταν οι

* Lebedev, P. N. (1901) Annalen der Physik, **6** 433-458

λεγόμενες α) Ραδιομετρικές δυνάμεις (radiometric forces) και β) Τα φαινόμενα μεταφοράς θερμότητας μέσω αγωγής. Για το λόγο αυτό:



(Σχ. 3.2.2)

α) Τα φύλλα του Λευκόχρυσου επιλεχθήκαν να είναι πολύ λεπτά $(d \simeq 0.02\text{mm})$. Πράγματι σε αντίθετη περίπτωση, η πρόσπτωση της ακτινοβολίας (λόγω του πεπερασμένου χρόνου μεταφοράς της θερμότητας) θα είχε σαν αποτέλεσμα ν' αναπτυχθεί διαφορετική θερμοκρασία στις δύο πλευρές του κάθε φύλλου. Τότε τα μόρια του αέρα που βρίσκονται κοντά σ' αυτές, θ' ανακρούονταν με διαφορετικές ταχύτητες. Το γεγονός θα οδηγούσε κατά μέσο όρο σε μεταφορά

στις δύο επιφάνειες του κάθε φύλλου σημαντικών διαφορετικών ορμών με συνέπεια την αλλοίωση των αναμενόμενων αποτελεσμάτων. Για το λόγο αυτό ο θάλαμος βρισκόταν υπό κενό. Επίσης λόγω της επιλογής μικρού πάχους φύλλων λευκόχρυσου, η μεταφορά της θερμότητας (με την πρόσπτωση σ' αυτά της ακτινοβολίας) ήταν ακαριαία, με συνέπεια η διαφορά θερμοκρασίας μεταξύ των δύο πλευρών να είναι σχεδόν μηδενική.

β) Τα δύο φύλλα του Λευκόχρυσου ήταν πλήρως συμμετρικά και αντιδιαμετρικά τοποθετημένα στο σύστημα της ανάρτησης. Τότε η απώλεια θερμότητας του πρώτου λόγω αγωγής προς το δεύτερο, αντισταθμιζόταν από μια καθ' όλα αντίθετη διαδικασία, με συνέπεια τον ακριβή έλεγχο της μεταφερόμενης ενέργειας από την προσπίπτουσα ακτινοβολία. Επίσης όλο το σύστημα βρισκόταν υπό ψύξη. Κάτω από αυτές τις συνθήκες αποδείχθηκε ότι: 1) Οι προσπίπτουσες δέσμες φωτός ασκούν πίεση στις επιφάνειες. 2) Οι δυνάμεις που ασκούνται στις επιφάνειες, είναι ανάλογες της απορροφούμενης ενέργειας και δεν εξαρτώνται από το μήκος κύματος της προσπίπτουσας ακτινοβολίας. 3) Οι υπολογισθείσες τιμές των πιέσεων των ακτινοβολιών μέσα στα όρια του πειραματικού σφάλματος, συνέπιπταν με τις θεωρητικά υπολογιζόμενες από τους Maxwell και Bartoli. Σήμερα κατά τα γνωστά μπορούμε με τη βοήθεια των Laser να δημιουργήσουμε ισχυρές δέσμες φωτός, τέτοιες ώστε να ελέγξουμε (όπως απέδειξε ο Ashkin[*]) την κίνηση μικρών σωματιδίων.

[*] Ashkin, A. (1972) : ' The pressure of Laser light' Scientific American, **226** , 63-71

3.3 *Μεταφορά στροφορμής από τα Η/Μ κύματα. Πόλωση του φωτός*

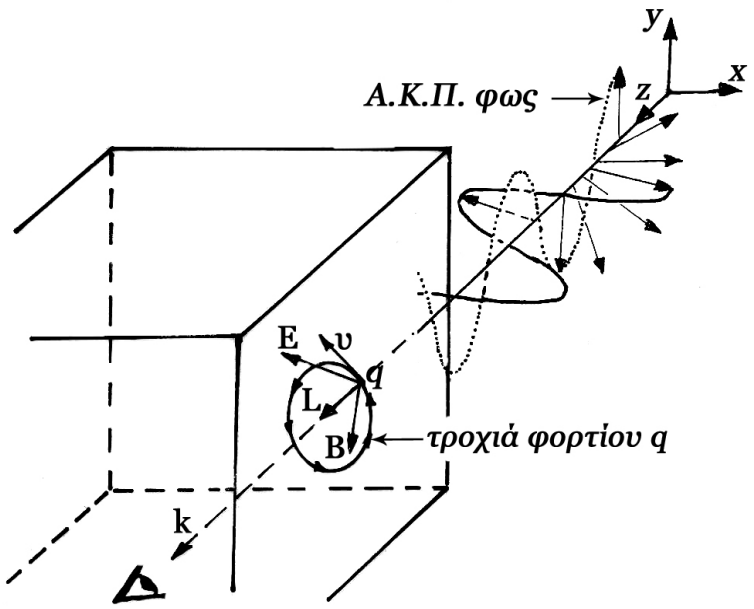
Είναι γνωστό και πειραματικά αποδεδειγμένο, ότι ένα Η/Μ κύμα εκτός της ενέργειας και της ορμής κατά την πρόσπτωσή του σ' ένα σώμα, μεταφέρει και ***στροφορμή (angular momentum)***. Για να συμβεί όμως αυτό θα πρέπει η συνολική δράση των δυνάμεων του προσπίπτοντος πεδίου στα φορτία του σώματος (δηλ. ηλεκτρική και μαγνητική), να είναι τέτοια ώστε τα τελευταία να εκτελέσουν περιστροφική κίνηση στο εσωτερικό του υλικού. Μια τέτοια κίνηση δεν είναι δυνατόν να προκληθεί όταν το μέτωπο κύματος – το οποίο στην προκειμένη περίπτωση θεωρούμε ότι είναι επίπεδο – είναι γραμμικά πολωμένο. Δηλ. το πεδίο $\mathbf{E}$ (και το συνοδεύον αυτό $\mathbf{B}$) να ταλαντεύονται κατά τη διάδοσή τους χωρικά και χρονικά σ' ένα συγκεκριμένο επίπεδο, που είναι γνωστό σαν επίπεδο πόλωσης (βλ. Κεφ. 3 (§ 3.3)). Το επίπεδο μέτωπο κύματος τελικά θα πρέπει να είναι τουλάχιστον κυκλικά πολωμένο (αριστερόστροφο ή δεξιόστροφο) (βλ. Κεφ. 3 (§ 3.2)).

Στο (Σχ. 3.3.1) δίνεται μια εποπτική εικόνα της όλης διαδικασίας όπου ένα επίπεδο αριστερόστροφα κυκλικά πολωμένο (Α.Κ.Π.) μέτωπο κύματος προσπίπτει κάθετα στην επιφάνεια ενός υλικού. Το $\mathbf{k}$ μας δίνει τη διεύθυνση διάδοσης και τα $\mathbf{E}$ και $\mathbf{B}$ είναι αντίστοιχα το ηλεκτρικό πεδίο και η μαγνητική επαγωγή. $\mathbf{k}$, $\mathbf{E}$ και $\mathbf{B}$ συνδέονται μεταξύ τους με τη γνωστή σχέση καθετότητας. Οι παραμετρικές εξισώσεις για το (Α.Κ.Π.) φως ως προς $\mathbf{E}$ δίνονται από τη σχέση:

$$\begin{aligned} E_x &= A\cos(\omega t - kz) \\ E_y &= A\cos(\omega t - kz - \pi/2) \end{aligned} \qquad (3.3.1)$$

Δηλ. βλέπουμε ότι το πλάτος A του $\mathbf{E}$ παραμένει σταθερό καθώς αυτό περιστρέφεται χρονικά αριστερόστροφα για παρατηρητή που βρίσκεται στη διεύθυνση διάδοσης και βλέπει κατ' ευθείαν την πηγή. Επίσης η συνιστώσα E_y καθυστερεί κατά $\pi/2$ σε σχέση με την E_x. Τη στιγμή της άφιξης του Η/Μ κύματος με τα χαρακτηριστικά που περιγράψαμε προηγουμένως σ' ένα φορτίο q, δρα το πεδίο $\mathbf{E}$, και τείνει να το μετακινήσει προς μια διεύθυνση με ταχύτητα $\boldsymbol{\upsilon}$. Επειδή το q κινείται μ' αυτήν την ταχύτητα και ταυτόχρονα βρίσκεται στο

μαγνητικό πεδίο επαγωγής $\mathbf{B}$, θ' ασκηθεί πάνω του μια δύναμη Lorentz ίση με $q\boldsymbol{\upsilon}\times\mathbf{B}$. Επειδή τα $\boldsymbol{\upsilon}$, $\mathbf{E}$ και $\mathbf{B}$ βρίσκονται στο επίπεδο x,y η διεύθυνση της μαγνητικής δύναμης θα βρίσκεται σ' αυτήν της z (δηλ. τη διεύθυνση του $\mathbf{k}$). Άρα η μαγνητική δύναμη κάμπτει ελαφρά τη διεύθυνση κίνησης του φορτίου q. Κατά προσέγγιση όμως θα δεχτούμε ότι η τροχιά του q διαγράφεται στο επίπεδο x,y επειδή το μέτρο της $\mathbf{B}$ είναι πολύ μικρό ($B = E/c$). Την επόμενη χρονική στιγμή (αυτής που περιγράψαμε προηγουμένως), η διεύθυνση του $\mathbf{E}$ αλλάζει και οι ηλεκτρικές και μαγνητικές δυνάμεις συνεχίζουν να δρουν στο φορτίο κ.ο.κ.



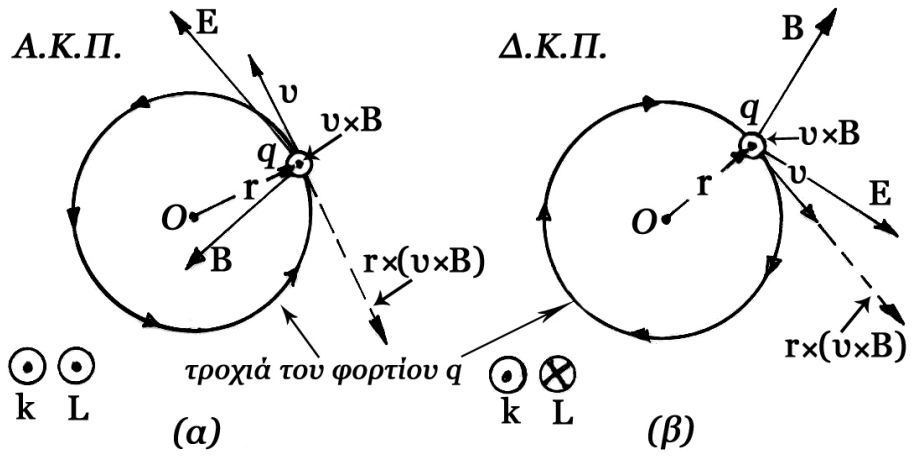
(Σχ. 3.3.1)

Σημείωση

Γνωρίζουμε ότι κατά την πρόσπτωση του μετώπου κύματος στο φορτίο q, μεταφέρεται και ορμή, η οποία έχει σαν συνέπεια τη σχετικά μικρή μετατόπισή του κατά τη διεύθυνση διάδοσης. Στα επόμενα το γεγονός αυτό δεν θα το λάβουμε υπόψη μας.

Επειδή το $\mathbf{E}$ περιστρέφεται με συχνότητα $\omega\ (\omega = 2\pi\nu), \nu = 10^{14}\,\mathrm{Hz}$ για την ορατή περιοχή του Η/Μ φάσματος, μπορούμε να υποθέσουμε ότι και το φορτίο q

θα τείνει να διαγράψει στο επίπεδο x, y μια κυκλική τροχιά με την ίδια συχνότητα. Μας ενδιαφέρει εδώ να υπολογίσουμε τη ροπή $\mathbf{M}$ που ασκείται στο φορτίο q (και κατά προέκταση τη στροφορμή $\mathbf{L}$) για μια μέση χρονική τιμή που είναι ίση με την περίοδο T του κύματος (δηλ. το χρόνο που χρειάζεται το $\mathbf{E}$ να εκτελέσει μια πλήρη περιστροφή). Στο (Σχ. 3.3.2α) βλέπουμε τη θέση του q και τα πεδία $\mathbf{E}$ και $\mathbf{B}$ που δρουν επάνω του, σ' ένα επίπεδο κάθετο στη διεύθυνση διάδοσης του (Α.Κ.Π.) φωτός. Επίσης βλέπουμε την τροχιά που διαγράφει με κέν-



(Σχ. 3.3.2)

τρο το O, ως προς το οποίο θα υπολογίσουμε τη ροπή $\mathbf{M}$ της ασκούμενης δύναμης στο q. Αν $\mathbf{r}$ είναι το διάνυσμα θέσης από το O στο φορτίο q, τότε κατά τα γνωστά:

$$\lim_{\Delta t \to 0} \Delta \mathbf{r} / \Delta t = \boldsymbol{\upsilon} \quad \text{και} \quad \upsilon = \Delta r / \Delta t = \frac{r \Delta \theta}{\Delta t} = r\omega \tag{3.3.2}$$

όπου $\Delta\theta$ η στοιχειώδης γωνία με την οποία φαίνεται από το O η στοιχειώδης μετατόπιση $\Delta \mathbf{r}$ του φορτίου. Άρα το μέτρο της ταχύτητας $\boldsymbol{\upsilon}$ θα είναι ίσο με ωr.

Τελικά η ροπή $\mathbf{M}$ της ασκούμενης δύναμης στο φορτίο q ως προς το σημείο O που αποτελεί το κέντρο της περιστροφής του θα είναι:

$$\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} \tag{3.3.3}$$

όπου $$\mathbf{F} = q\mathbf{E} + q\boldsymbol{\upsilon} \times \mathbf{B} \tag{3.3.4}$$

Οπότε: $$\mathbf{M} = \mathbf{r} \times q\mathbf{E} + \mathbf{r} \times q\left(\boldsymbol{\upsilon} \times \mathbf{B}\right) \tag{3.3.5}$$

Αν τώρα πολλαπλασιάσουμε τα μέλη της (σχ. 3.3.5) επί ω και πάρουμε τη μέση χρονική τιμή για ένα κύκλο θα έχουμε:

$$\omega\left\langle \mathbf{M} \right\rangle = \left\langle \omega\mathbf{r} \times q\mathbf{E} + \right\rangle + \omega q\left\langle \mathbf{r} \times \left(\boldsymbol{\upsilon} \times \mathbf{B}\right)\right\rangle \tag{3.3.6}$$

Παρατηρούμε όμως από το (Σχ. 3.3.2α), ότι η διεύθυνση του διανύσματος $\mathbf{r} \times \left(\boldsymbol{\upsilon} \times \mathbf{B}\right)$ είναι αυτή της $-\boldsymbol{\upsilon}$. Και επειδή ο μέσος όρος για κάθε συνιστώσα της $\boldsymbol{\upsilon}$ είναι μηδέν για ένα κύκλο, τότε βλέπουμε ότι το μαγνητικό πεδίο δεν συνεισφέρει στη ροπή για το q στο ίδιο χρονικό διάστημα. Επομένως:

$$\omega\left\langle \mathbf{M} \right\rangle = q\left\langle \omega\mathbf{r} \times \mathbf{E} \right\rangle \tag{3.3.7}$$

Είναι επίσης σχετικά εύκολο με τη βοήθεια του (Σχ. 3.3.2α) ν' αποδείξουμε ότι:

$$\omega\mathbf{r} \times \mathbf{E} = \left(\boldsymbol{\upsilon} \cdot \mathbf{E}\right)\mathbf{z}_0 \tag{3.3.8}$$

όπου $\mathbf{z}_0$ το μοναδιαίο διάνυσμα κατά τη διεύθυνση του άξονα διάδοσης z. Επομένως θα έχουμε:

$$\omega\left\langle \mathbf{M} \right\rangle = \left\langle q\boldsymbol{\upsilon} \cdot \mathbf{E} \right\rangle \mathbf{z}_0 \tag{3.3.9}$$

Από τη μηχανική όμως γνωρίζουμε ότι η ροπή της ασκούμενης δύναμης στο φορτίο q θα είναι ίση με τη χρονική μεταβολή της στροφορμής $\mathbf{L}$ δηλ. $\mathbf{M} = d\mathbf{L}/dt$. Επίσης το αποδιδόμενο από το Η/Μ πεδίο έργο προκειμένου να μετακινηθεί το φορτίο q μεταξύ δύο σημείων 1,2 (στο εσωτερικό του πεδίου) θα είναι:

$$W_{12} = \int_1^2 \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = q\int_1^2 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} \;\Rightarrow\; dW = q\;\mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = qd\mathbf{l} \cdot \mathbf{E}$$

και η χρονική μεταβολή της απορροφούμενης ενέργειας :

$$\frac{dW}{dt} = q\frac{d\mathbf{l}}{dt}\cdot\mathbf{E} \quad \Rightarrow \quad \frac{dW}{dt} = q\mathbf{v}\cdot\mathbf{E}$$

Επομένως από τη (σχ. 3.3.9) βρίσκουμε:

$$\left\langle \frac{d\mathbf{L}}{dt} \right\rangle = \frac{1}{\omega}\left\langle \frac{dW}{dt} \right\rangle \mathbf{z}_o \tag{3.3.10}$$

Από την τελευταία σχέση συμπεραίνουμε ότι αν το φορτίο q απορροφά ενέργεια W κατά την πρόσπτωση ενός κυκλικά πολωμένου επιπέδου μετώπου κύματος σ' ένα υλικό, τότε μεταφέρεται σ' αυτό μια γωνιακή στροφορμή ίση με :

$$\mathbf{L} = \frac{W}{\omega}\mathbf{z}_0 \tag{3.3.11}$$

Στην περίπτωση που η απορροφούμενη ενέργεια ανά μονάδα όγκου του υλικού (δηλ. η πυκνότητα ενέργειας) είναι η u τότε και η μεταφερόμενη στροφορμή ανά μονάδα όγκου δηλ. η $\mathbf{L}_{u,V}$ θα είναι:

$$\mathbf{L}_{u,V} = \frac{u}{\omega}\mathbf{z}_0 \tag{3.3.12}$$

Τέλος το ψευδοδιάνυσμα της στροφορμής $\mathbf{L}$ θα είναι της ίδιας φοράς με το $\mathbf{k}$ αν έχουμε πρόσπτωση Α.Κ.Π. φωτός και αντίθετης φοράς αν το προσπίπτον φως είναι Δ.Κ.Π.

Θα πρέπει να γνωρίζουμε (Άσκ. 2.2 – Λυμένη) ότι ένα γραμμικά πολωμένο φως πλάτους A είναι δυνατόν να προκύψει από την επαλληλία δύο κυκλικά πολωμένων φώτων πλάτους το καθένα $A/2$ και αντίθετης στροφικότητας. Αν λοιπόν δύο τέτοια φώτα προσπέσουν σ' ένα σώμα, η τελικά μεταφερόμενη στροφορμή θα είναι ίση με μηδέν. Αυτός ακριβώς είναι ο λόγος για τον οποίο ένα επίπεδο γραμμικά πολωμένο μέτωπο κύματος δεν μπορεί να μεταφέρει στροφορμή.

Μια άλλη παράμετρος που αφορά όμως την μεταφερόμενη σ' ένα σώμα στροφορμή L ανά μονάδα χρόνου και ανά μονάδα επιφάνειας, μιας προσπίπτουσας δέσμης φωτός, είναι η Ω. Πράγματι από τη (σχ. 3.3.12) κατά μέτρο θα έχουμε:

$$L_{u,V} = \frac{u}{\omega} \Rightarrow \frac{L}{\Delta t \Delta S \Delta l} = \frac{u}{\Delta t \omega} \Rightarrow \frac{L}{\Delta t \Delta S} = \frac{u \Delta l}{\Delta t \omega} = \Omega \Rightarrow$$

$$\Omega = \frac{uc\Delta t}{\Delta t \omega} = \frac{uc}{\omega} = \frac{uc}{2\pi\nu} = \frac{uc}{2\pi\left(c/\lambda\right)} \Rightarrow$$

$$\Omega = u\lambda/2\pi \tag{3.3.13}$$

Όπου λ το μ.κ. της προσπίπτουσας ακτινοβολίας.

Σημείωση

Η (σχ. 3.3.13) προκύπτει και μέσω καθαρά φωτονικών συλλογισμών. Πράγματι αν $N = n/\Delta V$ ο αριθμός των n κινουμένων φωτονίων στον όγκο ΔV τότε θα έχουμε:

$$N = \frac{n}{\Delta V} = \frac{n}{\Delta S \Delta l} = \frac{n}{\Delta S c \Delta t} \Rightarrow \frac{n}{\Delta S \Delta t} = Nc \tag{3.3.14}$$

Όπου Nc πλέον, ο αριθμός των κινουμένων (και προσπιπτόντων) φωτονίων ανά μονάδα επιφάνειας και ανά μονάδα χρόνου. Γνωρίζουμε όμως ότι η στροφορμή έκαστου φωτονίου είναι κβαντισμένο μέγεθος και η τιμή της είναι $\hbar = h/2\pi$. Επομένως το μέγεθος $\frac{n}{\Delta S \Delta t}\hbar$ θα είναι η μεταφερόμενη στροφορμή των n φωτονίων στην επιφάνεια ΔS ανά μονάδα χρόνου. Δηλ. η Ω. Άρα με τη βοήθεια της (σχ. 3.3.14) θα έχουμε:

$$\frac{n}{\Delta S \Delta t}\hbar = \frac{L}{\Delta t \Delta S} = \Omega = Nc\hbar = \frac{Nch}{2\pi} \Rightarrow$$

$$\Omega = Nhc/2\pi \tag{3.3.15}$$

Γνωρίζουμε επίσης όμως ότι και η ενέργεια έκαστου φωτονίου είναι κβαντισμένο μέγεθος και δίνεται από τη σχέση: $\mathcal{E} = h\nu$. Άρα επειδή N είναι ο αριθμός των φωτονίων ανά μονάδα όγκου και $\mathcal{E} = h\nu$ η ενέργεια του καθενός θα έχουμε:

$$u = Nh\nu \tag{3.3.16}$$

όπου κατά τα γνωστά η u μας δίνει την πυκνότητα ενέργειας. Τότε από τη (σχ. 3.3.15) βρίσκουμε:

$$\Omega = \frac{Nhc}{2\pi} = \frac{(Nh\nu)c}{2\pi\nu} = \frac{uc}{2\pi\nu} \quad \text{και επειδή} \quad c = \lambda\nu \quad \text{έχουμε τελικά:}$$

$$\Omega = u\lambda/2\pi \quad \rightarrow \quad (\text{σχ. } 3.3.13)$$

Το μέτρο της μεταφερόμενης στροφορμής L μια δέσμης κυκλικά πολωμένου φωτός όταν η απορροφούμενη ενέργεια από το σώμα (στο οποίο προσπίπτει η ακτινοβολία) είναι W, δίνεται κατά τα γνωστά από τη (σχ. 3.3.11). Οπότε αν $W = 1\text{J}$ είναι η ενέργεια ενός π.χ. παλμού φωτός με μ.κ. $\lambda = 0.5\mu\text{m}$, τότε βρίσκουμε: $L = W/\omega = W\lambda/2\pi c = 2.5\times10^{-9}\,\text{erg}\cdot\text{s}$. Επίσης η (σχ. 3.3.10) έχει τη δυνατότητα να γραφεί με τη μορφή: $M = P/\omega$. Όπου $M = dL/dt$ η ροπή των ασκούμενων δυνάμεων στο σώμα και $P = dW/dt$ η ισχύς της προσπίπτουσας ακτινοβολίας. Επομένως αν υποθέσουμε ότι $P = 100\text{W}$ και $\lambda = 0.5\mu\text{m}$ τότε από τη σχέση $M = P/\omega = P\lambda/2\pi c$ βρίσκουμε: $M = 25\times10^{-7}\,\text{dyne}\cdot\text{cm}$. Το αριθμητικό αυτό παράδειγμα μας δείχνει ότι η μέτρηση της μεταφερόμενης σ' ένα σώμα γωνιακής στροφορμής L θ' αφορά ένα άκρως ευαίσθητο και περίπλοκο πείραμα. Ένα τέτοιο πείραμα εκτελέστηκε το 1936 από τον Beth*. Το διάγραμμα της πειραματικής του διάταξης φαίνεται στο (Σχ. 3.3.3).

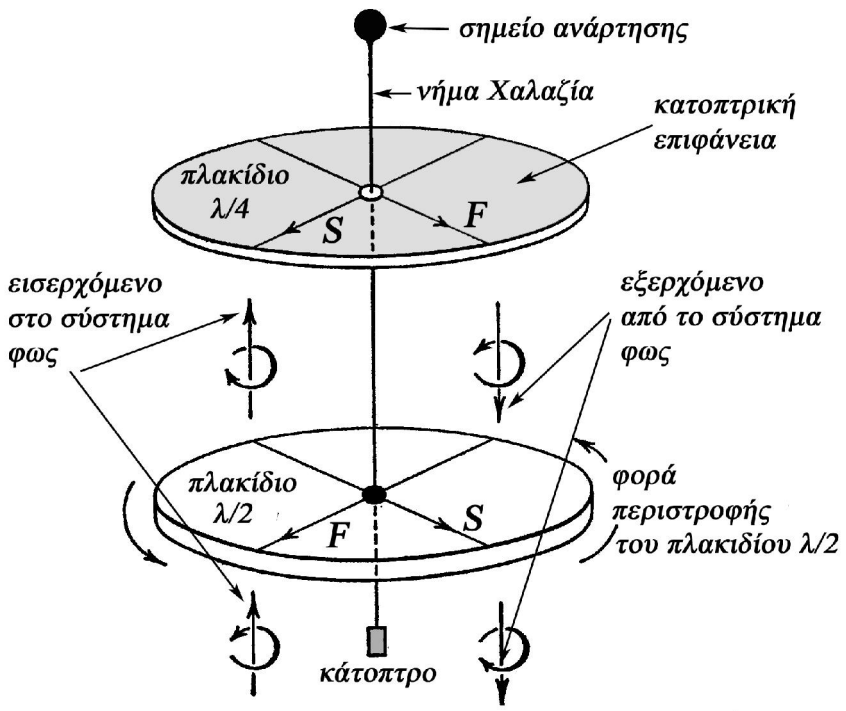
Από ένα πολύ λεπτό νήμα Χαλαζία που είναι ακλόνητο στη μια του άκρη (και του οποίου οι μηχανικές ιδιότητες είναι γνωστές), αναρτάται από το κέντρο του ένα πλακίδιο καθυστέρησης $\lambda/2$ με δυνατότητα περιστροφής. Το νήμα που συγκρατεί το πλακίδιο $\lambda/2$, περνά ελεύθερα από το άνοιγμα που βρίσκεται στο

---

* R. A. Beth: 'Mechanical Detection and Measurement of the Angular Momentum of light' Physical Review **50** (115-125) 1936

κέντρο ενός ακλόνητου πλακιδίου $\lambda/4$ (δηλ. που δεν έχει τη δυνατότητα να περιστραφεί) και που η πάνω του επιφάνεια είναι επαργυρωμένη (δηλ. κατοπτρική). Οι διευθύνσεις των αξόνων (F,S) των πλακιδίων φαίνονται στο ίδιο σχήμα (αν και στην συγκεκριμένη ανάλυση δεν θα είναι κρίσιμες).

Η κύρια διαδικασία του πειράματος, είναι να φωτίσουμε το πλακίδιο $\lambda/2$ με φορά από κάτω προς τα πάνω με μια δέσμη κυκλικά πολωμένου φωτός η οποία μετά την ανάκλασή της από την πάνω επιφάνεια του πλακιδίου $\lambda/4$ θ' ακολουθήσει την αντίστροφη πορεία, εξερχόμενη από πλακίδιο $\lambda/2$. Όπως προ-



(Σχ. 3.3.3)

κύπτει – κάτω από αυτές τις συνθήκες – λόγω της μεταφερόμενης στροφορμής από το προσπίπτον και διερχόμενο (κατ' αντίθετη φορά) φως, το πλακίδιο $\lambda/2$ περιστρέφεται. Πιο συγκεκριμένα το $\lambda/2$ φωτίζεται σ' όλο του το εύρος από ένα παράλληλο μέτωπο κύματος αριστερόστροφα κυκλικά πολωμένου φωτός και η φορά περιστροφής του φαίνεται στο (Σχ. 3.3.3). Κατά τα γνωστά το φως κατά την έξοδό του από το $\lambda/2$ μετατρέπεται σε δεξιόστροφα κυκλικά πολωμένο. Κατόπιν το φως αυτό προσπίπτει στο πλακίδιο $\lambda/4$ και διανύοντας το πάχος του δύο

φορές (λόγω ανάκλασης στην πάνω του επιφάνεια) αλλάζει διεύθυνση. Το φως κατά την έξοδό του από το $\lambda/4$ (μετά την ανάκλαση) είναι σαν να διαδόθηκε μέσα από πλακίδιο $\lambda/2$. Το φως όμως που βγαίνει από την κάτω επιφάνεια του $\lambda/4$ είναι και πάλι δεξιόστροφα κυκλικά πολωμένο επειδή εκτός της πρόσθετης φάσης π που προσέλαβε λόγω της διέλευσής του από το υποθετικό $\lambda/2$, προσέλαβε και μια επιπλέον φάση περίπου ίση με π λόγω της ανάκλασής του πάνω στην κατοπτρική επιφάνεια του $\lambda/4$. Επομένως το φως που προσπίπτει (από τα πάνω προς τα κάτω) στην πάνω επιφάνεια του $\lambda/2$, ασκεί μια ροπή της ίδιας φοράς με αυτήν της προηγούμενης, ενισχύοντας την περιστροφή του $\lambda/2$ προς την ίδια διεύθυνση.

Κατά την πειραματική διαδικασία, το φως που τελικά πέφτει από κάτω στην πειραματική διάταξη, δεν είναι συνεχές αλλά διακοπτόμενο περιοδικά. Η περίοδός του ήταν τέτοια, ώστε συνέπιπτε με αυτήν της φυσικής περιόδου στρέψης του αναρτημένου πλακιδίου $\lambda/2$. Η προκύπτουσα ταλάντωση του συστήματος, μπορούσε να παρατηρηθεί με την βοήθεια μιας ασθενικής δέσμης φωτός η οποία προσέπιπτε σ' ένα μικροσκοπικό κάτοπτρο, τοποθετημένο κάτω από πλακίδιο $\lambda/2$.

Τα πειραματικά αποτελέσματα έδειξαν ότι πράγματι ισχύει η (σχ. 3.3.13). Δηλ. ότι μια δέσμη κυκλικά πολωμένου φωτός κατά την πρόσπτωσή της (και κατ' ακολουθία απορρόφησή της) από ένα σώμα, μεταφέρει μια γωνιακή στροφορμή ανά μονάδα επιφάνειας και ανά μονάδα χρόνου ίση με $\Omega = u\lambda/2\pi$. Και στο πείραμα αυτό (όπως και σ' εκείνο του Lebedev που αφορούσε τη μέτρηση της μεταφερόμενης από το φως ορμής), προέκυψαν πλείστες όσες δυσκολίες. Πράγματι η επιτυγχανόμενη ροπή στρέψης του συστήματος ήταν της τάξης των $10^{-11}\,\mathrm{dyne}\cdot\mathrm{cm}$. Οπότε αν π.χ. το προσπίπτον φως δεν διαπερνούσε το σύστημα συμμετρικά, τότε λόγω των αναπτυσσόμενων ραδιομετρικών δυνάμεων (βλ. πείραμα του Lebedev) (δηλ. είχαμε διαφορετική θέρμανση διαφορετικών τμημάτων των πλακιδίων) θ' αναπτύσσονταν ισχυρές ροπές, οι οποίες σαν 'θόρυβος' τελικά θα κάλυπτε το επιθυμητό μετρούμενο μέγεθος. Για την ίδια περίπτωση επίσης της ασύμμετρης πρόσπτωσης, θα είχαμε την ανάπτυξη διαφορετικών πιέσεων ακτινοβολίας και κατ' ακολουθία και πάλι ανεπιθύμητων ροπών στρέψης. Η εξάλειψη τελικά τέτοιου είδους 'θορύβων', οδήγησε όπως προαναφέραμε τελικά στην επιβεβαίωση της (σχ. 3.3.13) με απόκλιση $\pm 10\,\%$.

3.4 *Μια κατ' αρχή φωτονική εικόνα για το φως*

Στην κβαντομηχανική για το φως, υιοθετούμε σαν φορέα ενέργειας, ορμής και στροφορμής το σωματίδιο με μηδενική μάζα ηρεμίας που ονομάζεται ***φωτόνιο (photon)***. Ένας αριθμός παραμέτρων – τέσσερεις τον αριθμό – καθορίζουν αυτό που ονομάζουμε ***κατάσταση (state)*** του κάθε φωτονίου ξεχωριστά. Μια συνήθης τετράδα παραμέτρων είναι οι τρεις συνιστώσες k_x, k_y, k_z (του κυματοδιανύσματος $\mathbf{k}$) που σχετίζονται με την ***ορμή*** $\mathbf{p}$ του φωτονίου και η παράμετρος σ που την ονομάζουμε ***στροφορμή*** του φωτονίου και μπορεί να πάρει μόνο δύο διακεκριμένες τιμές : $+\hbar$ ή $-\hbar$ όπου $\hbar = h/2\pi$ και h η σταθερή του Planck.

α) Ενέργεια του φωτονίου

$$\mathcal{E} = h\nu = \frac{h}{2\pi} 2\pi\nu = \hbar\omega$$

και επειδή $k = 2\pi/\lambda$ και $c = \lambda\nu \Rightarrow$

$$\mathcal{E} = \hbar kc \quad \text{με} \quad k = \sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2} \tag{3.4.1}$$

όπου c η ταχύτητα του φωτός στο κενό. Από τη (σχ. 2.7.1) βλέπουμε ότι η ενέργεια $\mathcal{E}$ ενός φωτονίου, μπορεί να εκφραστεί με βάση τις παραμέτρους k_x, k_y, k_z της κατάστασής του.

β) Ορμή του φωτονίου

Έχει αποδειχθεί για τα φωτόνια ότι ισχύει: $\mathcal{E} = cp$ όπου p το μέτρο της ορμής του. Επειδή:

$$\mathcal{E} = \hbar\omega \Rightarrow \hbar\omega = cp \Rightarrow p = \hbar\omega/c = \hbar k$$

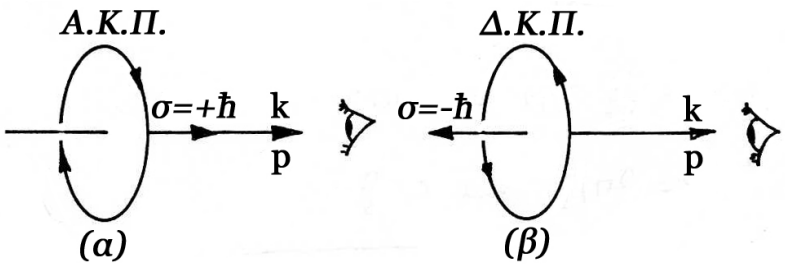
Άρα: $$\mathbf{p} = \hbar\mathbf{k} \tag{3.4.2}$$

Από τη (σχ. 3.4.2) μπορούμε να δούμε ότι η διεύθυνση της ορμής του φωτονίου, καθορίζεται από τη διεύθυνση του κυματοδιανύσματος **k** και κατά προέκταση τις τρεις συνιστώσες του k_x, k_y, k_z.

γ) Στροφορμή του φωτονίου

Προκειμένου να συνδέσουμε την παράμετρο σ της κατάστασης ενός φωτονίου με το φαινόμενο της πόλωσης του φωτός, δεχόμαστε (Σχ. 3.4.1) τα εξής: Για φωτόνιο που η στροφορμή του είναι αριστερόστροφη καθώς αυτό κατευθύνεται προς τα εμάς (Σχ. 3.4.1α), η παράμετρος σ θα έχει τιμή $+\hbar$. Για φωτόνιο που η στροφορμή του είναι δεξιόστροφη (Σχ. 3.4.1β), η παράμετρος σ θα έχει τιμή $-\hbar$.

Μπορούμε να λέμε ότι πολλά φωτόνια βρίσκονται στην ίδια κατάσταση όταν το καθένα από αυτά χαρακτηρίζεται από τις ίδιες τιμές των παραμέτρων



(Σχ. 3.4.1)

(k_x, k_y, k_z, σ). Η αλλαγή της τιμής μιας των τεσσάρων παραμέτρων, αντιστοιχεί σε αλλαγή της κατάστασης του φωτονίου. Είναι ευνόητο, ότι θα μπορούσαμε να κάνουμε κατ' αρχή, τον παραλληλισμό μεταξύ ενός διαδιδόμενου επιπέδου μονοχρωματικού μετώπου κύματος μιας κατάστασης πόλωσης και ενός συνόλου φωτονίων τα οποία βρίσκονται σε μια συγκεκριμένη κατάσταση. Πράγματι η διεύθυνση της ορμής των φωτονίων αντιστοιχεί στη διεύθυνση της κυματοκαθέτου **k** του κύματος και η στροφορμή τους στην κατάσταση πόλωσης του κύματος (στο κατ' αρχή τουλάχιστον δεξιόστροφα ή αριστερόστροφα κυκλικά πολωμένο φως). Σύνολα φωτονίων που βρίσκονται σε διαφορετική κατάσταση, θ' αντιστοιχούν σε διαφορετικά επίπεδα μέτωπα κύματος. Από τις σχέσεις: $\mathcal{E} = h\nu$, $\mathcal{E} = cp$ και $c = \lambda\nu$ βρίσκουμε ότι: $p = h/\lambda$. Από αυτές οι :

$$\mathcal{E} = h\nu \qquad \text{και} \qquad p = h/\lambda$$

μας αναδεικνύουν το ***δυϊσμό(duality)*** μεταξύ των σωματιδιακών και κυματικών ιδιοτήτων των φωτονίων. Πράγματι οι σχέσεις αυτές συνδέουν τα σωματιδιακά $(\mathcal{E}, p)$ με τα κυματικά (ν, λ) χαρακτηριστικά των φωτονίων.

Φερμιόνια, Μποζόνια και κύματα φωτός

Παρά τον μεγάλο αριθμό των διαφόρων μικροσωματιδίων που υπάρχουν στη φύση, αυτά κατατάσσονται από στατιστική άποψη σε δύο βασικές κατηγορίες: τα ***φερμιόνια (fermions)*** και τα ***μποζόνια (bosons)***. Γνωστοί αντιπρόσωποι των φερμιονίων είναι τα ηλεκτρόνια και των μποζονίων τα φωτόνια. Ο χαρακτήρας των ηλεκτρονίων θα λέγαμε ότι είναι βασικά ατομικιστικός. Δηλ. κάθε ηλεκτρόνιο στο άτομο βρίσκεται σε μια συγκεκριμένη κατάσταση και κανένα άλλο δεν μπορεί να καταλάβει την ίδια (απαγορευτική αρχή του Pauli). Άμεση συνέπεια αυτού του γεγονότος είναι ότι οι ενεργειακές στάθμες των ηλεκτρονίων στις διάφορες στιβάδες των ατόμων χαρακτηρίζονται για το καθένα από μια εντελώς συγκεκριμένη (κβαντική) κατάσταση. Το τελευταίο έχει σαν αποτέλεσμα να μην έχουν τη δυνατότητα της μαζικής κατάληψης μιας ορισμένης στάθμης. Εδώ ακριβώς οφείλεται η σταθερότητα και η διαφορετικότητα της ατομικής δομής στη φύση.

Ο χαρακτήρας των φωτονίων είναι εντελώς διαφορετικός. Από ένα σύνολο φωτονίων, ο αριθμός που μπορεί να βρίσκεται στην ίδια κατάσταση είναι απεριόριστος. Π.χ. ο μηχανισμός της προτρεπόμενης εκπομπής φωτονίων (stimulated emission) διεγερμένων ατόμων μέσω φωτονίων μιας ορισμένης κατάστασης, συνιστά ένα μηχανισμό αύξησης σε μεγάλο βαθμό του στατιστικού συνόλου φωτονίων της ίδιας κατάστασης. Το γεγονός αυτό μπορεί να συμβεί σε μια κοιλότητα συντονισμού ενός Laser (βλ. ΕΡΓΑΣ/ΚΗ ΟΠΤΙΚΗ [5]: Π.Α.Α.Φ. (Κεφ.3)). Μ' αυτό τον τρόπο έχουμε τη δυνατότητα να αναδείξουμε την έννοια μιας δέσμης φωτός (ενός μετώπου κύματος), με τη βοήθεια όμως ενός συνόλου φωτονίων.

Προηγουμένως είχαμε προσπαθήσει να συσχετίσουμε την έννοια μιας κατάστασης (k_x, k_y, k_z, σ) ενός φωτονίου με αυτήν ενός επιπέδου μετώπου κύματος. Οι κυματικές όμως ιδιότητες ενός και μόνου φωτονίου δεν μπορούν να μας οδηγήσουν άμεσα στην ανάδειξη ενός αντιστοίχου μετώπου κύματος φωτός

από κλασσική άποψη. Θα χρειαστεί οπωσδήποτε να δούμε ποια είναι η συμπεριφορά ενός μεγάλου πλήθους (στατιστικού συνόλου) φωτονίων, στατιστική ή ποια διέπει το συγκεκριμένο σύνολο των φωτονίων. Η στατιστική αυτή για την περιγραφή του συμφώνου φωτός είναι η ονομαζόμενη του Poisson ενώ για το ασύμφωνο φως αυτή των Bose – Einstein (με την προϋπόθεση ότι οι εντάσεις του φωτός είναι χαμηλές) (βλ. ΕΡΓΑΣ/ΚΗ ΟΠΤΙΚΗ [5]: Π.Α.Α.Φ. (§ 1.2)). Με βάση π.χ. την κατανομή Poisson (η οποία παρεμπιπτόντως αφορά την σεκπομπή φωτός από Laser), μπορεί ν' αναπτυχθεί ένας πολύ μεγάλος αριθμός φωτονίων που έκαστο χαρακτηρίζεται από την ίδια κατάσταση. Αν λοιπόν με η_{ph} χαρακτηρίσουμε τον αριθμό των φωτονίων του στατιστικού συνόλου που βρίσκονται στην ίδια κατάσταση, θα ισχύει:

$$\eta_{ph} \gg 1 \tag{3.4.3}$$

Τότε οι κυματικές ιδιότητες αυτού του συνόλου των φωτονίων, συντείνουν στο ν' αναδειχθεί η έννοια του συνεχούς κύματος, δηλ. της δέσμης φωτός με τα χαρακτηριστικά του μετώπου κύματος της κλασσικής Η/Μ θεωρίας.

Μια κατ' αρχή φωτονική περιγραφή των διαφόρων καταστάσεων πόλωσης του φωτός

α) Κυκλικά πολωμένο φως

Ένα στατιστικό σύνολο φωτονίων στην κατάσταση (k_x, k_y, k_z, σ) με $\sigma = +\hbar$ και $\eta_{ph} \gg 1$, θα μπορούσε να ειπωθεί ότι αντιστοιχεί σ' ένα επίπεδο αριστερόστροφα κυκλικά πολωμένο μέτωπο κύματος. Η πλέον ακριβής όμως περιγραφή ενός πολωμένου κύματος είναι αυτή που αναφέρεται στη διαδικασία 'μέτρησης' του είδους της στροφορμής των φωτονίων. Έστω λοιπόν κατά κάποιο τρόπο, στη διεύθυνση που διαδίδεται το επίπεδο μέτωπο κύματος, έχουμε τη δυνατότητα να 'μετράμε' το είδος της στροφορμής του κάθε φωτονίου που δέχεται ο 'ανιχνευτής' μας. Έστω επίσης ότι μετά από ένα πολύ μεγάλο αριθμό 'μετρήσεων' η πιθανότητα P του να εντοπίσουμε φωτόνια με στροφορμή $\sigma = +\hbar$ είναι ίση με τη μονάδα. ($P = \Delta\eta/\eta$: δηλ. ο αριθμός των μετρήσεων $\Delta\eta$ (των εντοπισμένων φωτονίων με $\sigma = +\hbar$) προς το συνολικό αριθμό των μετρήσεων η).

Τότε μπορούμε να πούμε ότι αυτό το μέτωπο κύματος είναι αριστερόστροφα κυκλικά πολωμένο. Αν η πιθανότητα του να εντοπίσουμε φωτόνια με στροφορμή $\sigma = -\hbar$ είναι πάλι ίση με τη μονάδα τότε θα έχουμε δεξιόστροφα κυκλικά πολωμένο μέτωπο κύματος.

β) Γραμμικά πολωμένο φως

Με βάση την Η/Μ άποψη για το γραμμικά πολωμένο φως, το τελευταίο μπορεί να προκύψει από την 'σύμφωνη' επαλληλία (σύζευξη) δύο κυκλικά πολωμένων επιπέδων μετώπων κύματος αντίθετης στροφικότητας και ίσων πλατών (βλ. (§ 3.5)). Για τη φωτονική περιγραφή, αυτό θ' αντιστοιχεί σ' ένα μεγάλο στατιστικό πλήθος φωτονίων με ίδια k_x, k_y, k_z αλλά που οι 'μετρήσεις' της στροφορμής τους θα μας έδιναν πιθανότητα $P_+ = 1/2$ γι' αυτά με $\sigma = +\hbar$ και $P_- = 1/2$ γι' αυτά με $\sigma = -\hbar$ (με $P_+ + P_- = 1$).

γ) Ελλειπτικά πολωμένο φως

Με βάση την Η/Μ άποψη για το ελλειπτικά πολωμένο φως, αυτό μπορεί να προκύψει από την 'σύμφωνη' επαλληλία (σύζευξη) δύο κυκλικά πολωμένων επιπέδων μετώπων κύματος αντίθετης στροφικότητας, διαφορετικών όμως πλατών (βλ. παρομοίως (§ 3.5)). Για την αντίστοιχη φωτονική περιγραφή, αυτό θ' αντιστοιχεί σ' ένα μεγάλο στατιστικό πλήθος φωτονίων με ίδια k_x, k_y, k_z αλλά που οι 'μετρήσεις' της στροφορμής τους θα μας έδιναν πιθανότητα P_1 γι' αυτά με $\sigma = +\hbar$ και P_2 γι' αυτά με $\sigma = -\hbar$, όπου όμως: $P_1 \neq P_2$ (με $P_1 + P_2 = 1$).

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ 4

Διάδοση των Η/Μ κυμάτων σε ανισότροπα υλικά.

Οι οπτικές ιδιότητες των ανισοτρόπων (κρυσταλλικών) υλικών – τις οποίες στοιχειωδώς μελετήσαμε στο (Κεφ. 5) – και που αφορούν ταχύτητες διάδοσης (φάσης) και καταστάσεις πόλωσης, εξαρτώνται από τη διεύθυνση διάδοσης (διεύθυνση κυματοκαθέτου) των διαδιδόμενων μετώπων κύματος στο εσωτερικό τους. Βασικό χαρακτηριστικό μιας τέτοιας κατάστασης είναι ότι κατά τη διεύθυνση μιας υποτιθέμενης κυματοκαθέτου δεν διαδίδεται ένα μέτωπο κύματος (όπως συμβαίνει στα ισότροπα υλικά) αλλά συνήθως δύο. Το καθένα τους έχει διαφορετική (εκτός ειδικών περιπτώσεων) ταχύτητα φάσης (δηλ. διαφορετικό δείκτη διάθλασης) και οι διευθύνσεις πόλωσης τους είναι ορθογώνιες. Οι τελευταίες ονομάζονται ***ιδιοκαταστάσεις πόλωσης (eigen-polarization states)***. Χαρακτηριστικό εκάστης των ιδιοκαταστάσεων είναι ότι διαδιδόμενη στο εσωτερικό του, δεν μεταβάλει την κατάσταση πόλωσής της καθ' όλο το μήκος της διάδοσής της.

Π.χ. έστω ότι σ' ένα κρύσταλλο προσπίπτει ένα μονοχρωματικό επίπεδο μέτωπο κύματος ορισμένης κατάστασης πόλωσης κατά τη διεύθυνση που αντιστοιχεί στη διεύθυνση μιας συγκεκριμένης κυματοκαθέτου. Τότε η κατάσταση πόλωσης της διαταραχής μετά τη διάνυση πάχους d στον κρύσταλλο και την έξοδό της από αυτόν, θα εξαρτάται αποκλειστικά και μόνο από τις ιδιοκαταστάσεις πόλωσης που είναι χαρακτηριστικές της διεύθυνσης αυτής. Δηλ. η προσπίπτουσα διαταραχή εκφράζεται σαν ένας γραμμικός συνδυασμός των δύο ιδιοκαταστάσεων, που με τη βοήθεια των στοιχείων διάδοσης (διανυόμενο πάχος, ταχύτητες φάσης των δύο ιδιοκαταστάσεων), μας οδηγεί στον προσδιορισμό της κατάστασης πόλωσης στην έξοδο του κρυστάλλου.

Όπως θ' αποδείξουμε στα επόμενα, οι ιδικαταστάσεις πόλωσης καθώς και οι αντίστοιχες σ' αυτές ταχύτητες φάσης (που προκύπτουν από τις ιδιοτιμές) είναι δυνατόν να προσδιοριστούν με τη βοήθεια των διαφορικών εξισώσεων Maxwell λαμβανομένων υπόψη των διηλεκτρικών χαρακτηριστικών του ανισοτρόπου υλικού.

Α) *Η/Μ εξισώσεις του Maxwell παρουσία διηλεκτρικού ανισοτρόπου υλικού*

Μας είναι γνωστό (βλ. ΠΑΡ/ΜΑ 1 (σχ. Α3.8)) ότι η επαγόμενη ηλεκτρική μετατόπιση σ' ένα ισότροπο διηλεκτρικό υπό την επίδραση ηλ. πεδίου δίνεται από τη σχέση:

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 k_e \mathbf{E} = \varepsilon \mathbf{E} \tag{A-1}$$

όπου $\mathbf{D}$ το διάνυσμα της ηλεκτρικής μετατόπισης, $\mathbf{E}$ το διάνυσμα της έντασης του ηλ. πεδίου στο εσωτερικό του διηλεκτρικού, k_e η διηλεκτρική σταθερή και $\varepsilon_0, \varepsilon$ οι ηλ. διαπερατότητες του κενού και του μέσου αντίστοιχα. Η τελευταία όμως σχέση δεν ισχύει όταν το υλικό είναι ανισότροπο. Τότε κατά τα γνωστά, οποιαδήποτε συνιστώσα του $\mathbf{D}$ θα εξαρτάται από τις τρεις συνιστώσες του $\mathbf{E}$. Δηλ. θα έχουμε:

$$\begin{aligned} D_1 &= \varepsilon_{11}E_1 + \varepsilon_{12}E_2 + \varepsilon_{13}E_3 \\ D_2 &= \varepsilon_{21}E_1 + \varepsilon_{22}E_2 + \varepsilon_{23}E_3 \\ D_3 &= \varepsilon_{31}E_1 + \varepsilon_{32}E_2 + \varepsilon_{33}E_3 \end{aligned} \tag{A-2}$$

Η (σχ. Α-2) αν εκφραστεί σε σύντομη γραφή κατά Einstein, παίρνει τη μορφή:

$$D_i = \varepsilon_{ij} E_j \quad (i, j = 1,2,3) \tag{A-3}$$

όπου τώρα το μέγεθος ε_{ij} είναι ένας ***τανυστής (tensor)*** δεύτερης τάξης που χαρακτηρίζεται στη γενικότερη περίπτωση από εννέα στοιχεία, αυτά του πίνακα:

$$\left[\varepsilon_{ij}\right] = \left[\varepsilon\right] = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{pmatrix} \tag{A-4}$$

Τα στοιχεία του πίνακα της διαπερατότητας του μέσου, όπως αποδεικνύεται (με βάση θερμοδυναμικούς όρους) είναι πραγματικά και συμμετρικά ως προς την κύρια διαγώνιό του. Οι τιμές τους εξαρτώνται από το σύστημα στο οποίο κρυσταλλώνεται το εκάστοτε ανισότροπο υλικό και αναφέρονται σε συγκεκριμένο σ.σ. στο εσωτερικό τους. Είναι το λεγόμενο ***σ.σ. των αξόνων συμμετρίας*** $X_i \left(i = 1,2,3\right)$ το οποίο κατέχει συγκεκριμένη θέση σε σχέση με τα στοιχεία συμμετρίας εκάστης κρυσταλλογραφικής τάξης. Πρόκειται πάντοτε για τρισορθογώνιο σ.σ. και εκτός από λίγες περιπτώσεις δεν ταυτίζεται με το ***κρυσταλλογραφικό σ.σ.*** x, y, z των κρυστάλλων. Η συσχέτιση μεταξύ τους γίνεται μέσω της επιβολής ορισμένων συμβάσεων. Στο σ.σ. των αξόνων συμμετρίας αναφέρονται τανυστές που αφορούν φυσικές ιδιότητες κρυστάλλων (όπως π.χ. ο προαναφερόμενος τανυστής της ηλ. επιδεκτικότητας) και ονομάζονται ***τανυστές ύλης (matter tensors)***.

Για να είναι ένα μέγεθος τανυστής, θα πρέπει κατά κύριο λόγο τα στοιχεία του να υπόκεινται σε μια καθορισμένη σχέση γραμμικού μετασχηματισμού μεταξύ

δύο συστημάτων συντεταγμένων. Αν π.χ. ε'_{ij} είναι τα στοιχεία του τανυστή της ηλ. διαπερατότητας στο νέο σύστημα συντεταγμένων x'_1, x'_2, x'_3 και ε_{ij} αυτά του παλαιού x_1, x_2, x_3, τότε θα ισχύει η σχέση:

$$\varepsilon'_{ij} = a_{ik} a_{jl} \varepsilon_{kl} \quad (i, j, k, l = 1, 2, 3)$$

όπου a_{ik}, a_{jl} τα συνημίτονα κατεύθυνσης μεταξύ των δύο συστημάτων συντεταγμένων. Π.χ. a_{ik} είναι το συνημίτονο της γωνίας μεταξύ του άξονα x'_i του νέου συστήματος και του άξονα x_k του παλαιού. Πλείστα όσα φυσικά μεγέθη έχουν τανυστικό χαρακτήρα και η τάξη τους μπορεί να είναι μεγαλύτερη της δεύτερης. Π.χ. άλλα τανυστικά μεγέθη δεύτερης τάξης είναι της ηλ. επιδεκτικότητας x_{ij}, της ηλ. αγωγιμότητας σ_{ij} κ.λ.π. Τρίτης τάξης τανυστές είναι ο πιεζοηλεκτρικός d_{ijk} (με 27 στοιχεία) που συνδέει την εμφανιζόμενη πόλωση ενός ανισοτρόπου διηλεκτρικού με την εφαρμοζόμενη σ' αυτό μηχανική τάση. Τέταρτης τάξης τανυστής s_{ijkl} (με 81 στοιχεία) είναι αυτός που συσχετίζει την εφαρμοζόμενη μηχανική τάση σ' ένα κρύσταλλο με την επαγόμενη σ' αυτόν σχετική παραμόρφωση. Πρόκειται για το νόμο της ελαστικότητας του Hooke που διέπει τα ανισότροπα υλικά. Τανυστές μηδενικής τάξης είναι τα μονόμετρα μεγέθη και πρώτης τάξης τα διανύσματα.

Θα επιδιώξουμε την επίλυση των διαφορικών εξισώσεων του Maxwell στο εσωτερικό ανιστρόπου υλικού αναφέροντας τον τανυστή της ηλ. διαπερατότητας σ' ένα εντελώς συγκεκριμένο τρισορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων στο εσωτερικό του κρυστάλλου που ονομάζεται ***σύστημα κυρίων αξόνων(principal coordinate system)*** με άξονες x_1, x_2, x_3 $(x_i \; i = 1, 2, 3)$. Στο τελευταίο, τα στοιχεία του τανυστή από εννέα στη γενικότερη περίπτωση γίνονται τρία και ο πίνακας (Α-4) παίρνει τη μορφή:

$$[\varepsilon] = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 \end{pmatrix} \qquad \text{(A-5)}$$

Στην πραγματικότητα εκτελούμε διαδοχικούς μετασχηματισμούς από το αρχικό σ.σ. (σ.σ. συμμετρίας του κρυστάλλου $X_i \; i = 1, 2, 3$), κατορθώνοντας τελικά να διαγωνοποιήσουμε τον πίνακα (Α-4). Κάτω όμως από αυτές τις συνθήκες οι (σχ. Α-2) απλοποιούνται στις εξής:

$$D_1 = \varepsilon_1 E_1 \qquad D_2 = \varepsilon_2 E_2 \qquad D_3 = \varepsilon_3 E_3 \qquad \text{(A-6)}$$

Από φυσική άποψη αυτό σημαίνει ότι: Όταν αναφερόμαστε στο σύστημα των κυρίων αξόνων του κρυστάλλου και στο εσωτερικό του υφίσταται ένα ηλ. πεδίο με συνιστώσες E_1, E_2, E_3 τότε η κάθε μια από τις συνιστώσες D_1, D_2, D_3 της ηλ. μετατόπισης, θα εξαρτάται μόνο από την αντίστοιχη του ηλ. πεδίου και όχι από τις τρεις.

Μας ενδιαφέρει στα επόμενα, η διάδοση στο εσωτερικό των κρυστάλλων, επιπέδων μετώπων κύματος συχνότητας ω κατά τη διεύθυνση της κυματοκαθέτου $\mathbf{k}$. Στην περίπτωση όμως της διάδοσης Η/Μ κυμάτων στην ύλη, εκτός των πεδίων $\mathbf{E}$ και $\mathbf{B}$ αναδεικνύονται και τα βοηθητικά πεδία $\mathbf{D}$ και $\mathbf{H}$ δηλ. της ηλ. μετατόπισης και της έντασης του μαγνητικού πεδίου τα οποία κατά τα γνωστά (βλ. ΠΑΡ/ΜΑ 1) σχετίζονται με τις συνθήκες πόλωσης και μαγνήτισης των υλικών. Η γενική γραφή ενός επιπέδου μετώπου κύματος στη μιγαδική του μορφή δίνεται από τη σχέση:

$$\tilde{\boldsymbol{\psi}} = \boldsymbol{\psi} e^{i(\omega t - \mathbf{k}\cdot\mathbf{r})} \qquad \text{(A-7α)}$$

όπου $\boldsymbol{\psi}$ το πλάτος του κύματος το οποίο γράφεται:

$$\boldsymbol{\psi} = \psi_1 \mathbf{i} + \psi_2 \mathbf{j} + \psi_3 \mathbf{k} \qquad \text{(A-7β)}$$

με ψ_1, ψ_2, ψ_3 τις συνιστώσες του και:

$$\mathbf{k} = k_1 \mathbf{i} + k_2 \mathbf{j} + k_3 \mathbf{k} = k\cos\alpha \mathbf{i} + k\cos\beta \mathbf{j} + k\cos\gamma \mathbf{k} \qquad \text{(A-8)}$$

όπου $k = 2\pi/\lambda$ το μέτρο της $\mathbf{k}$ και $l_1 = \cos a, l_2 = \cos\beta, l_3 = \cos\gamma$ τα συνημίτονα κατεύθυνσής της. Το $\mathbf{r}$ είναι το διάνυσμα θέσης και κατά τα γνωστά γράφεται:

$$\mathbf{r} = x_1 \mathbf{i} + x_2 \mathbf{j} + x_3 \mathbf{k} \qquad \text{(A-9)}$$

Στα επόμενα το $\tilde{\boldsymbol{\psi}}$ θα μπορεί να παριστάνει ένα έκαστο των πεδίων: $\tilde{\mathbf{E}}, \tilde{\mathbf{D}}, \tilde{\mathbf{B}}, \tilde{\mathbf{H}}$. Μια σχέση τέλος που συνδέει την $\mathbf{k}$ με το $\mathbf{l} = l_1 \mathbf{i} + l_2 \mathbf{j} + l_3 \mathbf{k}$ όπου $\mathbf{l}$ το μοναδιαίο διάνυσμα κατά τη διεύθυνση της $\mathbf{k}$ είναι η εξής:

$$\mathbf{k} = |\mathbf{k}|\mathbf{l} = k\mathbf{l} = \frac{2\pi}{\lambda}\mathbf{l} = \frac{2\pi\nu}{\upsilon}\mathbf{l} = \frac{\omega}{\upsilon}\mathbf{l} = \frac{\omega}{c} n\mathbf{l} \qquad \text{(A-10)}$$

όπου n ο δ.δ. του μέσου.

Σχέση μεταξύ της κυματοκαθέτου **k** *και της έντασης* **E** *ηλ. πεδίου κατά τη διάδοση επιπέδου μετ. κύματος στο εσωτερικό ανισοτρόπου υλικού*

Η σχέση την οποία θ' αναδείξουμε στα επόμενα, είναι συνέπεια του συσχετισμού των διαφορικών εξισώσεων του Maxwell σε διηλεκτρικό που είναι ανισότροπο και του οποίου οι ιδιότητες περιγράφονται από τη (σχ. Α-5) που αφορά τις ηλεκτρικές του διαπερατότητες. Με τη βοήθειά της είναι δυνατόν ν' αποδειχθεί ότι στο εσωτερικό του κρυστάλλου και συγκεκριμένα σε διευθύνσεις που ορίζονται από την **k** διαδίδονται (όχι ένα) αλλά εν γένει δύο μετ. κύματος με τις ιδιότητες που αναφέραμε προηγουμένως.

Στα επόμενα θα θεωρήσουμε ότι οι κρύσταλλοι είναι διαφανείς (δηλ. δεν εμφανίζουν απορρόφηση). Επίσης δεν είναι σιδηρομαγνητικοί και ότι η μαγνητική τους διαπερατότητα μ δεν έχει τανυστικό χαρακτήρα δηλ. ο κρύσταλλος είναι μαγνητικά ισότροπος με $\mu \simeq \mu_0$. Τέλος τα διαδιδόμενα κύματα είναι επίπεδα. Κάτω από αυτές τις συνθήκες η διάδοση στο εσωτερικό ενός τέτοιου κρυστάλλου των πεδίων $\tilde{\mathbf{E}}, \tilde{\mathbf{D}}, \tilde{\mathbf{B}}, \tilde{\mathbf{H}}$ θα επαληθεύουν τις δ.ε. του Maxwell:

$$\nabla \times \tilde{\mathbf{E}} = -\frac{\partial \tilde{\mathbf{B}}}{\partial t} \tag{A-11}$$

$$\nabla \times \tilde{\mathbf{H}} = \frac{\partial \tilde{\mathbf{D}}}{\partial t} \tag{A-12}$$

(βλ. (ΠΑΡ/ΜΑ 1) (σχ. Β1.5) και (σχ. Β2.13) για $\mathbf{J} = 0$, $\rho = 0$. Δηλ. οι εξισώσεις επιλύονται σε περιοχές που δεν υφίστανται ρεύματα $(\mathbf{J} = 0)$ ούτε εξωγενή φορτία χώρου $(\rho = 0)$, αλλά μόνο φορτία πόλωσης $(\rho' \neq 0)$. Όπου $\tilde{\mathbf{B}} = \mu \tilde{\mathbf{H}}$ και $\tilde{\mathbf{D}} = \varepsilon \tilde{\mathbf{E}}$ με $\mu =$ σταθ. και ε να δίνεται από τη (σχ. Α-5). Τότε η εξίσωση $\tilde{\mathbf{D}} = \varepsilon \tilde{\mathbf{E}}$ παίρνει τη μορφή των (σχ. Α-6). Υπενθυμίζουμε ότι οι περισπωμένες στα πεδία $\mathbf{E}, \mathbf{D}, \mathbf{B}, \mathbf{H}$, δηλώνουν επίπεδα μέτωπα κύματος της μορφής της (σχ. Α-7α). Από τη (σχ. Α-11) θα έχουμε:

$$\nabla \times \tilde{\mathbf{E}} = -\frac{\partial \tilde{\mathbf{B}}}{\partial t} = -\mu \frac{\partial \tilde{\mathbf{H}}}{\partial t} \tag{A-13}$$

Αν $\tilde{\mathbf{E}} = \mathbf{E} e^{i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})}$ όπου $\mathbf{E} = E_1 \mathbf{i} + E_2 \mathbf{j} + E_3 \mathbf{k}$ και $\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} = k_1 x_1 + k_2 x_2 + k_3 x_3$ τότε:

$$\nabla \times \tilde{\mathbf{E}} = \begin{pmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x_1} & \dfrac{\partial}{\partial x_2} & \dfrac{\partial}{\partial x_3} \\ \tilde{E}_1 & \tilde{E}_2 & \tilde{E}_3 \end{pmatrix} \quad \text{όπου:} \quad \begin{aligned} \tilde{E}_1 &= E_1 e^{i(\omega t - \mathbf{k}\cdot\mathbf{r})} \\ \tilde{E}_2 &= E_2 e^{i(\omega t - \mathbf{k}\cdot\mathbf{r})} \\ \tilde{E}_3 &= E_3 e^{i(\omega t - \mathbf{k}\cdot\mathbf{r})} \end{aligned} \tag{A-14}$$

$$\nabla \times \tilde{\mathbf{E}} = \left(\frac{\partial \tilde{E}_3}{\partial x_2} - \frac{\partial \tilde{E}_2}{\partial x_3} \right) \mathbf{i} + \left(\frac{\partial \tilde{E}_1}{\partial x_3} - \frac{\partial \tilde{E}_3}{\partial x_1} \right) \mathbf{j} + \left(\frac{\partial \tilde{E}_2}{\partial x_1} - \frac{\partial \tilde{E}_1}{\partial x_2} \right) \mathbf{k} \tag{A-15}$$

Και επειδή: $\dfrac{\partial \tilde{E}_3}{\partial x_1} = -ik_1 E_3 e^{i(\omega t - \mathbf{k}\cdot\mathbf{r})}$, $\dfrac{\partial \tilde{E}_2}{\partial x_3} = -ik_3 E_2 e^{i(\omega t - \mathbf{k}\cdot\mathbf{r})}$, κ.λ.π. τελικά:

$$\begin{aligned} \nabla \times \tilde{\mathbf{E}} &= \left[-i\left(k_2 E_3 - k_3 E_2\right)\mathbf{i} - i\left(k_3 E_1 - k_1 E_3\right)\mathbf{j} - i\left(k_1 E_2 - k_2 E_1\right)\mathbf{k} \right] e^{i(\omega t - \mathbf{k}\cdot\mathbf{r})} \\ &= -i\left(\mathbf{k} \times \mathbf{E}\right) e^{i(\omega t - \mathbf{k}\cdot\mathbf{r})} \end{aligned} \tag{A-16}$$

Επίσης επειδή: $\tilde{\mathbf{H}} = \mathbf{H} e^{i(\omega t - \mathbf{k}\cdot\mathbf{r})} \quad \Rightarrow \quad -\mu \dfrac{\partial \tilde{\mathbf{H}}}{\partial t} = -i\omega\mu \mathbf{H} e^{i(\omega t - \mathbf{k}\cdot\mathbf{r})}$ (A-17)

οπότε από τις (σχ. A-16,A-17,A-13) θα έχουμε:

$$-i\left(\mathbf{k} \times \mathbf{E}\right) e^{i(\omega t - \mathbf{k}\cdot\mathbf{r})} = -i\omega\mu \mathbf{H} e^{i(\omega t - \mathbf{k}\cdot\mathbf{r})}$$

οπότε: $$\mathbf{k} \times \mathbf{E} = \omega\mu \mathbf{H} \tag{A-18}$$

Με τον ίδιο ακριβώς τρόπο από τη (σχ. A-12) και την $\tilde{\mathbf{D}} = \varepsilon \tilde{\mathbf{E}}$ προκύπτει η σχέση:

$$\mathbf{k} \times \mathbf{H} = -\omega\varepsilon \mathbf{E} \tag{A-19}$$

Απαλείφοντας το πεδίο $\mathbf{H}$ από τις (σχ. A-18,A-19) θα έχουμε:

$$\mathbf{k} \times \left(\mathbf{k} \times \mathbf{E}\right) + \omega^2 \mu\varepsilon \mathbf{E} = 0 \tag{A-20}$$

ή με βάση τη σχέση : $\mathbf{k} = \left(\omega/\upsilon\right)\mathbf{l}$ και την $\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}$

$$\mathbf{l} \times \left(\mathbf{l} \times \mathbf{E}\right) + \upsilon^2 \mu \mathbf{D} = 0 \tag{A-21}$$

Επίσης με τη βοήθεια της : $\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c})=\mathbf{b}(\mathbf{a}\cdot\mathbf{c})-\mathbf{c}(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})$

$\mathbf{l}\times(\mathbf{l}\times\mathbf{E})=\mathbf{l}(\mathbf{l}\cdot\mathbf{E})-\mathbf{E}(\mathbf{l}\cdot\mathbf{l})=\mathbf{l}(\mathbf{l}\cdot\mathbf{E})-\mathbf{E}$ οπότε η (σχ. Α-21) γίνεται:

$$\mu\upsilon^2\mathbf{D}-\mathbf{E}+\mathbf{l}(\mathbf{l}\cdot\mathbf{E})=0 \qquad \text{(A-22)}$$

Επιβεβαίωση του γεγονότος ότι κατά τη διεύθυνση της κυματοκαθέτου **k** *στο εσωτερικό ανισοτρόπου υλικού διαδίδονται δύο εν γένει μέτωπα κύματος*

Η (σχ. Α-22) προκύπτει σαν αποτέλεσμα του συσχετισμού των δ.ε. του Maxwell που δίνονται από τις (σχ. Α-11,Α-12). Γνωρίζουμε επίσης ότι αν θέλουμε να βρούμε τις σχέσεις μεταξύ των συνιστωσών των πεδίων $\mathbf{E}$ και $\mathbf{D}$, που αναφέρονται όμως στο σύστημα συντεταγμένων των κυρίων αξόνων, τότε θα ισχύουν οι (σχ. Α-6). Κάτω από αυτές τις συνθήκες και δεδομένου ότι εκάστη των συνιστωσών της διανυσματικής εξίσωσης (σχ. Α-22) είναι μηδέν, θα έχουμε το σύστημα των τριών εξισώσεων:

$$\left.\begin{aligned}
&\mu\upsilon^2 D_1-\frac{D_1}{\varepsilon_1}+l_1(\mathbf{l}\cdot\mathbf{E})=0 \quad\Rightarrow\quad D_1=\frac{l_1(\mathbf{l}\cdot\mathbf{E})}{\left(1/\varepsilon_1-\mu\upsilon^2\right)}=\frac{l_1(\mathbf{l}\cdot\mathbf{E})}{\mu\left(\upsilon_1^2-\upsilon^2\right)}\\
&\mu\upsilon^2 D_2-\frac{D_2}{\varepsilon_2}+l_2(\mathbf{l}\cdot\mathbf{E})=0 \quad\Rightarrow\quad D_2=\frac{l_2(\mathbf{l}\cdot\mathbf{E})}{\left(1/\varepsilon_2-\mu\upsilon^2\right)}=\frac{l_2(\mathbf{l}\cdot\mathbf{E})}{\mu\left(\upsilon_2^2-\upsilon^2\right)}\\
&\mu\upsilon^2 D_3-\frac{D_3}{\varepsilon_3}+l_3(\mathbf{l}\cdot\mathbf{E})=0 \quad\Rightarrow\quad D_3=\frac{l_3(\mathbf{l}\cdot\mathbf{E})}{\left(1/\varepsilon_3-\mu\upsilon^2\right)}=\frac{l_3(\mathbf{l}\cdot\mathbf{E})}{\mu\left(\upsilon_3^2-\upsilon^2\right)}
\end{aligned}\right\} \qquad \text{(A-23)}$$

με βάση τις οποίες υπολογίζουμε τις συνιστώσες D_1, D_2, D_3 του πλάτους του διανύσματος της ηλ. μετατόπισης $\mathbf{D}$. Και $\upsilon_i=\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_i\mu}}\rightarrow \upsilon_i^2\mu=\frac{1}{\varepsilon_i}\quad i=1,2,3$.

Το διάνυσμα $\mathbf{D}$ είναι κάθετο ως προς τη διεύθυνση της κυματοκαθέτου $\mathbf{k}$. Πράγματι αν θεωρήσουμε τη μιγαδική μορφή του $\mathbf{D}$ (δηλ. $\tilde{\mathbf{D}}$) τότε θα ισχύει η δ.ε. του Maxwell $\nabla\cdot\tilde{\mathbf{D}}=0$ (ΠΑΡ/ΜΑ 1 , (σχ. Α3.7 ή Γ1.4) για $\rho=0$). Δηλ.

$$\frac{\partial\tilde{D}_1}{\partial x_1}+\frac{\partial\tilde{D}_2}{\partial x_2}+\frac{\partial\tilde{D}_3}{\partial x_3}=0 \qquad \text{(A-24)}$$

και επειδή: $\tilde{\mathbf{D}} = \left(D_1\mathbf{i} + D_2\mathbf{j} + D_3\mathbf{k}\right)e^{i\left(\omega t - k_1x_1 - k_2x_2 - k_3x_3\right)} = \mathbf{D}e^{i\left(\omega t - \mathbf{k}\cdot\mathbf{r}\right)}$

θα έχουμε:
$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{D}_1}{\partial x_1} &= -ik_1D_1e^{i\left(\omega t - \mathbf{k}\cdot\mathbf{r}\right)} \\ \frac{\partial \tilde{D}_2}{\partial x_2} &= -ik_2D_2e^{i\left(\omega t - \mathbf{k}\cdot\mathbf{r}\right)} \\ \frac{\partial \tilde{D}_3}{\partial x_3} &= -ik_3D_3e^{i\left(\omega t - \mathbf{k}\cdot\mathbf{r}\right)} \end{aligned}\right\} \qquad \text{(A-25)}$$

Η αντικατάσταση των (σχ. Α-25) στη (σχ. Α-24) μας δίνει :

$$-i\left[k_1\mathbf{i} + k_2\mathbf{j} + k_3\mathbf{k}\right]\left[D_1\mathbf{i} + D_2\mathbf{j} + D_3\mathbf{k}\right]e^{i\left(\omega t - \mathbf{k}\cdot\mathbf{r}\right)} = 0$$

από την οποία συνεπάγεται ότι $\mathbf{k}\cdot\mathbf{D} = 0$ και επειδή $\mathbf{k} = \left(\omega/\upsilon\right)\mathbf{l}$ τελικά έχουμε:

$$\mathbf{l}\cdot\mathbf{D} = 0 \qquad \text{(A-26)}$$

Επομένως με τη βοήθεια των (σχ. Α-23,Α-26) επειδή $\mathbf{l} = l_1\mathbf{i} + l_2\mathbf{j} + l_3\mathbf{k}$, διαιρώντας με $\mathbf{l}\cdot\mathbf{E}$ – το οποίο γενικά είναι διάφορο του μηδενός – βρίσκουμε:

$$\frac{l_1^2}{1/\varepsilon_1 - \mu\upsilon^2} + \frac{l_2^2}{1/\varepsilon_2 - \mu\upsilon^2} + \frac{l_3^2}{1/\varepsilon_3 - \mu\upsilon^2} = 0 \qquad \text{(A-27)}$$

Η εξίσωση αυτή μας δίνει την ταχύτητα φάσης υ συναρτήσει των συνημιτόνων κατεύθυνσης της κυματοκαθέτου. Όμως πρόκειται για μια τετραγωνική (δευτέρου βαθμού εξίσωση ως προς υ^2). Επομένως θα υπάρχουν εν γένει δύο τιμές της υ^2 για κάθε διεύθυνση διάδοσης που καθορίζεται από τα l_1, l_2, l_3. Εάν τελικά αποδεχθούμε μόνο τις θετικές τιμές για την ταχύτητα φάσης υ τότε η όλη διαδικασία αναδεικνύει το γεγονός ότι κατά τη διεύθυνση $\mathbf{l}$ διαδίδονται γενικά δύο μέτωπα κύματος (γραμμικά πολωμένα) με διαφορετικές ταχύτητες φάσης οι οποίες όπως είδαμε είναι λύσεις της εξίσωσης (Α-27). Για τις χαρακτηριστικές διευθύνσεις διάδοσης κατά μήκος των κυρίων αξόνων x_1, x_2, x_3 μπορούμε να βρούμε τις τρεις ***κύριες ταχύτητες (principal velocities)*** $\upsilon_1, \upsilon_2, \upsilon_3$. Πράγματι για διάδοση κατά μήκος του x_1 θα είναι: $\left[l_1, l_2, l_3\right] = \left[1, 0, 0\right]$ οπότε από τη (σχ. Α-27) βρίσκουμε:

$$\left(1/\varepsilon_2 - \mu\upsilon^2\right)\left(1/\varepsilon_3 - \mu\upsilon^2\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad \upsilon_2 = 1/\sqrt{\mu\varepsilon_2}\ ,\ \upsilon_3 = 1/\sqrt{\mu\varepsilon_3} \qquad \text{(A-28)}$$

Με παρόμοιο τρόπο $\upsilon_1 = 1/\sqrt{\mu\varepsilon_1}$ και επειδή $c = 1/\sqrt{\varepsilon_0\mu} \simeq 1/\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}$:

$$\upsilon_1 = c/\sqrt{k_{e1}}\ \left(\upsilon_1 = c/n_1\right)\ ,\ \upsilon_2 = c/\sqrt{k_{e2}}\ \left(\upsilon_1 = c/n_2\right)\ ,\ \upsilon_3 = c/\sqrt{k_{e3}}\ \left(\upsilon_1 = c/n_3\right) \qquad \text{(A-29)}$$

όπου k_{e1}, k_{e2}, k_{e3} οι κύριες διηλεκτρικές σταθερές και n_1, n_2, n_3 οι ***κύριοι δείκτες διάθλασης (principal refractive indices)***. Με τη βοήθεια των (σχ. Α-28) η (σχ. Α-27) μπορεί να πάρει τη μορφή:

$$f\left(\upsilon^2\right) = \frac{l_1^2}{\left(\upsilon^2 - \upsilon_1^2\right)} + \frac{l_2^2}{\left(\upsilon^2 - \upsilon_2^2\right)} + \frac{l_3^2}{\left(\upsilon^2 - \upsilon_3^2\right)} = 0 \qquad \text{(A-30)}$$

Η τελευταία ονομάζεται ***εξίσωση Fresnel***, και η επίλυσή της κατά τα γνωστά μας δίνει εν γένει τις λύσεις $\upsilon^2 = \upsilon'^2$ και $\upsilon^2 = \upsilon''^2$. Πρόκειται για τις ταχύτητες φάσης στη διεύθυνση l_1, l_2, l_3 της κυματοκαθέτου, δηλ. οι ταχύτητες με τις οποίες διαδίδονται τα πεδία $\mathbf{D}'$ και $\mathbf{D}''$ τα οποία σχηματίζουν τρισορθογώνιο σύστημα με τη διεύθυνση της $\mathbf{k}$.

B) *Το ελλειψοειδές των δεικτών διάθλασης*

Πυκνότητα ενέργειας σ' ένα ισότροπο διηλεκτρικό

Θα θεωρήσουμε κατ' αρχή ότι ένα ισότροπο διηλεκτρικό διηλεκτρικής σταθερής k_e καταλαμβάνει πλήρως το χώρο μεταξύ των δύο οπλισμών ενός πυκνωτή. Στα άκρα των οπλισμών εφαρμόζουμε μια σταθερή διαφορά δυναμικού U. Τότε κατά τα γνωστά το διηλεκτρικό πολώνεται. Θέλουμε να ξέρουμε ποια είναι η πυκνότητα ενέργειας που αποθηκεύεται στον ενδιάμεσο μεταξύ των οπλισμών χώρο και η οποία βέβαια παρέχεται από την πηγή τάσης.

Αν C είναι η χωρητικότητα του πυκνωτή και U η εφαρμοζόμενη διαφορά δυναμικού, τότε το ενεργειακό περιεχόμενο W_p του πυκνωτή θα είναι:

$$W_p = \frac{CU^2}{2} = \frac{\varepsilon_0 k_e S U^2}{2d} = \frac{\varepsilon_0 k_e}{2}\left(\frac{U}{d}\right)^2 Sd = \frac{\varepsilon_0 k_e}{2} E^2 V \qquad \text{(B-1)}$$

όπου $C = (\varepsilon_0 k_e S)/d$ η χωρητικότητα επιπέδου πυκνωτή που πληρούται από διηλεκτρικό διηλεκτρικής σταθερής k_e, S η επιφάνεια έκαστου των οπλισμών του, d η απόστασή τους και $V = Sd$ ο όγκος του. Κατά τα γνωστά $E = U/d$ το πεδίο στο εσωτερικό του διηλεκτρικού. Επειδή όμως $\varepsilon_0 k_e E = \varepsilon E = D$ τότε η (σχ. Β-1) γίνεται: $W_p = (1/2)EDV$. Αν τελικά $w_p = W_p/V$ η πυκνότητα ενέργειας (ενέργεια ανά μονάδα όγκου) τότε:

$$w_p = \frac{ED}{2} = \frac{\mathbf{E}\cdot\mathbf{D}}{2} \qquad \text{(B-2)}$$

όπου $\mathbf{D}$ το διάνυσμα της ηλ. μετατόπισης και $\mathbf{E}$ αυτό του ηλ. πεδίου στο εσωτερικό του διηλεκτρικού. Τα $\mathbf{E}$ και $\mathbf{D}$ εδώ είναι συγγραμμικά επειδή εφαρμόζονται σε ισότροπο υλικό. Μας είναι όμως γνωστή η σχέση: $\mathbf{D} = \varepsilon_0\mathbf{E} + \mathbf{P}$ (ΠΑΡ/ΜΑ 1 (σχ. Α3.6)) όπου $\mathbf{P}$ το διάνυσμα του πεδίου της πόλωσης του διηλεκτρικού. Τότε η (σχ. Β-2) γίνεται:

$$w_p = \frac{\mathbf{E}\cdot\mathbf{D}}{2} = \frac{\mathbf{E}\cdot(\varepsilon_0\mathbf{E}+\mathbf{P})}{2} = \frac{\varepsilon_0\mathbf{E}\cdot\mathbf{E}}{2} + \frac{\mathbf{E}\cdot\mathbf{P}}{2} = \frac{\varepsilon_0 E^2}{2} + \frac{EP}{2} \qquad \text{(B-3)}$$

Ο πρώτος όρος του τελευταίου μέλους της (σχ. Β-3) μας δίνει την πυκνότητα ενέργειας του χώρου μεταξύ των οπλισμών του πυκνωτή απουσία του διηλεκτρικού όταν το ηλ. πεδίο έχει την τιμή E. Ο δεύτερος – όπως μπορεί ν' αποδειχθεί – αφορά

την πρόσθετη ενέργεια η οποία παρέχεται από την πηγή προκειμένου να πολωθεί το διηλεκτρικό. Επομένως η πυκνότητα ενέργειας w_p από τη (σχ. Β-2), θα έχουμε υπόψη μας ότι περιλαμβάνει και τους δύο όρους.

Πυκνότητα ενέργειας σ' ένα ανισότροπο διηλεκτρικό

Υποθέτουμε και εδώ ότι ο κρύσταλλος είναι διαφανής και μαγνητικά ισότροπος. Και στην περίπτωση αυτή η πυκνότητα ενέργειας w_p θα δίνεται από τη (σχ. Β-2). Όμως τα διανύσματα των στο εσωτερικό του κρυστάλλου διαδιδόμενων (δυναμικών) πεδίων **E** και **D** δεν είναι συγγραμμικά, αλλά συνδέονται μεταξύ τους μέσω των (σχ. Α-2). Θ' απλοποιήσουμε την κατάσταση, δεχόμενοι και πάλι ότι τα στοιχεία της ηλ. διαπερατότητας είναι τα κύρια, δηλ. αναφέρονται στο σ.σ. των κυρίων αξόνων x_1, x_2, x_3 του εκάστοτε κρυστάλλου. Τότε θα ισχύουν οι (σχ. Α-6) οπότε η (σχ. Β-2) γράφεται: $w_p = \frac{\mathbf{E}\cdot\mathbf{D}}{2} = \frac{E_1 D_1}{2} + \frac{E_2 D_2}{2} + \frac{E_3 D_3}{2} = \frac{D_1^{\,2}}{2\varepsilon_1} + \frac{D_2^{\,2}}{2\varepsilon_2} + \frac{D_3^{\,2}}{2\varepsilon_3}$ και επειδή: $\varepsilon_1/\varepsilon_0 = n_1^2$, $\varepsilon_2/\varepsilon_0 = n_2^2$, $\varepsilon_3/\varepsilon_0 = n_3^2$ τότε:

$$2w_p = \frac{D_1^{\,2}}{\varepsilon_0 n_1^2} + \frac{D_2^{\,2}}{\varepsilon_0 n_2^2} + \frac{D_3^{\,2}}{\varepsilon_0 n_3^2}$$

και τελικά:

$$\frac{\left(D_1\big/\sqrt{2\varepsilon_0 w_p}\right)^2}{n_1^2} + \frac{\left(D_2\big/\sqrt{2\varepsilon_0 w_p}\right)^2}{n_2^2} + \frac{\left(D_3\big/\sqrt{2\varepsilon_0 w_p}\right)^2}{n_3^2} = 1 \qquad \text{(B-4)}$$

Η (σχ. Β-4) στο χώρο των $D_i\big/\sqrt{2\varepsilon_0 w_p}$ $i = 1,2,3$ βλέπουμε ότι παριστάνει μια επιφάνεια τριαξονικού εν γένει ελλειψοειδούς με n_i $i = 1,2,3$ τους κύριους δ.δ. Πρόκειται για την επιφάνεια που αναδεικνύεται με την προϋπόθεση της σταθερής πυκνότητας ενέργειας w_p του κρυστάλλου. Η επιφάνεια όμως αυτή αναφέρεται στο σύστημα των κυρίων αξόνων του κρυστάλλου x_i $i = 1,2,3$ δεδομένου ότι οι συνιστώσες D_i $i = 1,2,3$ είναι παράλληλες προς αυτό. Και με δεδομένο ότι τα γεωμετρικά χαρακτηριστικά του ελλειψοειδούς καθορίζονται από τους κύριους δ.δ. n_i $i = 1,2,3$ (σχ. Β-4), μπορούμε ν' αντικαταστήσουμε τις ανεξάρτητες μεταβλητές $D_i\big/\sqrt{2\varepsilon_0 w_p}$ με τις x_i του σ.σ. των κυρίων αξόνων.

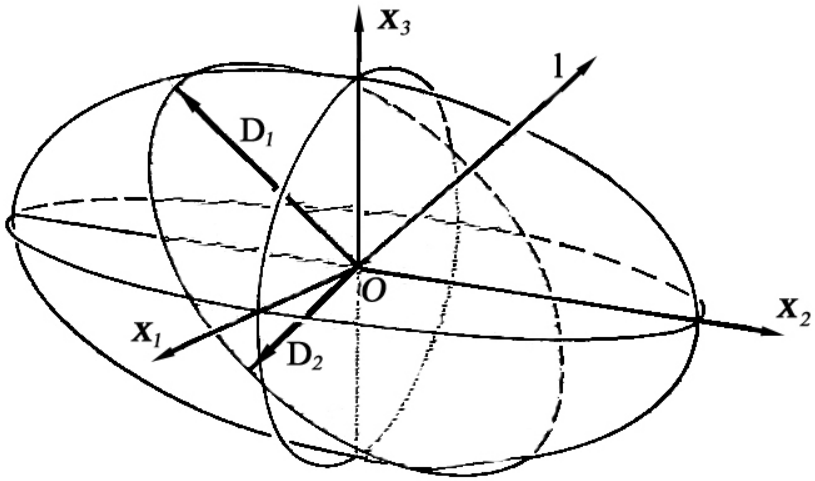
Επομένως η (σχ. Β-4) μπορεί να γραφεί με τη μορφή:

$$\frac{x_1^2}{n_1^2}+\frac{x_2^2}{n_2^2}+\frac{x_3^2}{n_3^2}=1 \qquad \text{(B-5)}$$

παριστάνοντας ένα πανομοιότυπο εν γένει τριαξονικό ελλειψοειδές ως προς το σ.σ. x_1, x_2, x_3 με κέντρο την αρχή του συστήματος. Το τελευταίο είναι γνωστό σαν ***ελλειψοειδές των δ.δ. (index ellipsoid or optical inticatrix)***. Όσον αφορά τα μήκη των αξόνων του είναι: $2n_1, 2n_2, 2n_3$.

Αποδείξαμε προηγουμένως ότι κατά τη διεύθυνση μιας κυματοκαθέτου **l** στο εσωτερικό ενός κρυστάλλου διαδίδονται γενικά δύο μέτωπα κύματος με διαφορετικές ταχύτητες φάσης (και άρα δ.δ.). Όπως θ' αποδείξουμε στα επόμενα, το ελλειψοειδές των δ.δ. μπορεί να χρησιμοποιηθεί για τον υπολογισμό αυτών των δ.δ. καθώς και των αντιστοίχων διευθύνσεων των **D** (δηλ. των $\mathbf{D}' \equiv \mathbf{D}_1$, $\mathbf{D}'' \equiv \mathbf{D}_2$) τα οποία αφορούν τα δύο επίπεδα και γραμμικά πολωμένα μέτωπα κύματος που διαδίδονται κατά τη διεύθυνση της **l** (ιδιοκαραστάσεις). Η διαδικασία είναι η εξής:

Εφόσον γνωρίζουμε τη διεύθυνση της κυματοκαθέτου **l** (σε σχέση με τους άξονες x_1, x_2, x_3), από το κέντρο του ελλειψοειδούς φέρουμε ένα επίπεδο κάθετο προς αυτήν. Όπως θ' αποδείξουμε στα αμέσως επόμενα η τομή αυτού του επιπέδου με το ελλειψοειδές θα είναι μία έλλειψη. Τότε τα μήκη των δύο αξόνων της έλλειψης θα έχουν τιμή ίση με το διπλάσιο των δύο δ.δ. αντίστοιχα και οι διευθύνσεις των αξόνων θα είναι οι διευθύνσεις των αντίστοιχων πεδίων **D** (Σχ. Β-1).



(Σχ. Β-1)

Θα πρέπει ν' αναφέρουμε εδώ, ότι οι διηλεκτρικές ιδιότητες ενός ανισοτρόπου υλικού μπορούν να περιγραφούν είτε μέσω των στοιχείων του πίνακα της ηλ. διαπερατότητας είτε όμως και μέσω των στοιχείων του λεγόμενου πίνακα της ηλ.

αδιαπερατότητας (impermeability), αναφερόμενοι στο σύστημα των κυρίων αξόνων x_1, x_2, x_3. Κάτω από αυτές τις συνθήκες μεταξύ των **E** και **D** ισχύουν οι (σχ. Α-6) οι οποίες με τη μορφή πινάκων μπορούν να γραφούν ως εξής:

$$\begin{pmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{E}_1 \\ \mathrm{E}_2 \\ \mathrm{E}_3 \end{pmatrix} \quad \text{ή} \quad \mathbf{D} = [\varepsilon]\mathbf{E} \tag{B-6}$$

όπου D_1, D_2, D_3 και E_1, E_2, E_3 οι συνιστώσες των διανυσμάτων **D** και **E**. Από τη (σχ.Β-6) θα έχουμε: $\mathbf{D} = [\varepsilon]\mathbf{E} \Rightarrow [\varepsilon]^{-1}\mathbf{D} = [\varepsilon]^{-1}[\varepsilon]\mathbf{E} = \mathrm{I}\,\mathbf{E} = \mathbf{E}$ οπότε:

$$\mathbf{E} = [\varepsilon]^{-1}\mathbf{D} \tag{B-7}$$

όπου $[\varepsilon]^{-1}$ ο αντίστροφος του πίνακα της διαπερατότητας και I ο μοναδιαίος. Αλλά $[\varepsilon] = \varepsilon_0[k_e]$ όπου $[k_e]$ ο πίνακας των στοιχείων των διηλεκτρικών σταθερών. Επομένως :

$$[\varepsilon]^{-1} = [\varepsilon_0 k_e]^{-1} = \varepsilon_0^{-1}[k_e]^{-1} = \frac{1}{\varepsilon_0}[k_e]^{-1} = \frac{1}{\varepsilon_0}[B] \tag{B-8}$$

όπου $[B]$ είναι ο πίνακας των στοιχείων της αδιαπερατότητας. Άρα τελικά:

$$\mathbf{E} = \frac{1}{\varepsilon_0}[B]\mathbf{D} \tag{B-9}$$

Μπορούμε να υπολογίσουμε τα στοιχεία του $[B]$ όταν γνωρίζουμε αυτά του $[\varepsilon]$. Πράγματι από τη (σχ.Α-5):

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{\det[\varepsilon]} \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \\ C_1 & C_2 & C_3 \end{pmatrix}$$

όπου $\det[\varepsilon]$ η ορίζουσα του $[\varepsilon]$ και $A_1, A_2, A_3, B_1.....$ οι συμπαράγοντες των στοιχείων του $[\varepsilon]$. Επειδή $\det[\varepsilon] = \varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3$ και :

$$\begin{pmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \\ C_1 & C_2 & C_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon_2\varepsilon_3 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_1\varepsilon_3 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_1\varepsilon_2 \end{pmatrix} \Rightarrow [\varepsilon]^{-1} = \begin{pmatrix} 1/\varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\varepsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/\varepsilon_3 \end{pmatrix} \text{ οπότε:}$$

$$[B] = \varepsilon_0 [\varepsilon]^{-1} = \begin{pmatrix} \varepsilon_0/\varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_0/\varepsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_0/\varepsilon_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/n_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/n_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/n_3^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_1 & 0 & 0 \\ 0 & B_2 & 0 \\ 0 & 0 & B_3 \end{pmatrix} \qquad \text{(B.10)}$$

Επομένως η (σχ. Β-5) που περιγράφει το ελλειψοειδές των δ.δ. μπορεί να γραφεί με τη μορφή:

$$B_1 x_1^2 + B_2 x_2^2 + B_3 x_3^2 = 1 \qquad \text{(B.11)}$$

Επαλήθευση των κανόνων που σχετίζονται με τον τρόπο που χρησιμοποιούμε το ελλειψοειδές των δ.δ.*

α) Θ' αποδείξουμε κατ' αρχή ότι οι άξονες τις ελλειπτικής τομής του ελλ. των δ.δ. με το επίπεδο το κάθετο στη διεύθυνση $\mathbf{l}$ της κυματοκαθέτου, συμπίπτουν με τις διευθύνσεις των πεδίων $\mathbf{D}_1, \mathbf{D}_2$. Όπου $\mathbf{D}_1 \equiv \mathbf{D}', \mathbf{D}_2 \equiv \mathbf{D}''$ είναι τα δύο πεδία τα οποία προκύπτουν σαν λύσεις των δ.ε. του Maxwell στο ανισότροπο υλικό για διεύθυνση διάδοσης $\mathbf{l}$. Για το λόγο αυτό θα πρέπει να προσδιορίσουμε τα συνημίτονα κατεύθυνσης των $\mathbf{D}_1, \mathbf{D}_2$ καθώς και τις ταχύτητες φάσης υ', υ''.

Αν $\upsilon^2 = \upsilon'^2$ και $\upsilon^2 = \upsilon''^2$ είναι οι λύσεις της εξίσωσης του Fresnel (σχ. Α-30), τότε θα ισχύει $f(\upsilon^2) = 0$. Επομένως:

$$f(\upsilon'^2) = 0 \quad , \quad f(\upsilon''^2) = 0 \qquad \text{(B.12)}$$

Επίσης από τις (σχ. Α-23) τα συνημίτονα κατεύθυνσης για τα $\mathbf{D}_1, \mathbf{D}_2$ θα είναι ανάλογα των:

$$\frac{l_1}{\upsilon_1^2 - \upsilon^2} \ , \ \frac{l_2}{\upsilon_2^2 - \upsilon^2} \ , \ \frac{l_3}{\upsilon_3^2 - \upsilon^2} \qquad \text{(B.13)}$$

όπου $\upsilon^2 = \upsilon'^2$ και $\upsilon^2 = \upsilon''^2$ οι ταχύτητες φάσης τους για την κοινή διεύθυνση διά-

---

* J.F. Nye: 'Physical properties of crystal'. Appendix H. Clarendon Press – Oxford (1967).

δοσης $\mathbf{l}(l_1,l_2,l_3)$. Ονομάζουμε (a',b',c') τα συνημίτονα κατεύθυνσης για το $\mathbf{D}_1$ και (a'',b'',c'') για το $\mathbf{D}_2$ και ζητούμε να βρούμε την τιμή του εσωτερικού τους γινομένου. Θα έχουμε:

$$a'a''+b'b''+c'c''=\frac{l_1^2}{\left(\upsilon_1^2-\upsilon'^2\right)\left(\upsilon_1^2-\upsilon''^2\right)}+\frac{l_2^2}{\left(\upsilon_2^2-\upsilon'^2\right)\left(\upsilon_2^2-\upsilon''^2\right)}+\frac{l_3^2}{\left(\upsilon_3^2-\upsilon'^2\right)\left(\upsilon_3^2-\upsilon''^2\right)}$$

Η εκτέλεση των πράξεων και η απλοποίηση μας οδηγεί στο αποτέλεσμα: $a'a''+b'b''+c'c''=0$. Από την τελευταία συμπεραίνουμε ότι :

$$\mathbf{D}_1\cdot\mathbf{D}_2=0 \qquad \text{(B.14)}$$

δηλ. τα $\mathbf{D}_1,\mathbf{D}_2$ είναι ορθογώνια μεταξύ τους. Επειδή επίσης για το καθένα από αυτά ισχύει η σχέση: $\nabla\cdot\mathbf{D}=0$, τότε όπως αποδείξαμε προηγουμένως (σχ.Α-26): $\mathbf{l}\cdot\mathbf{D}=0$. Επομένως : $\mathbf{l}\cdot\mathbf{D}_1=0$ και $\mathbf{l}\cdot\mathbf{D}_2=0$. Άρα τα διανύσματα $\mathbf{D}_1(a',b',c')$,$\mathbf{D}_2(a'',b'',c'')$ και $\mathbf{l}(l_1,l_2,l_3)$ συνιστούν μια τρισορθογώνια βάση συντεταγμένων.

Η (σχ. Β-11) αναφέρεται κατά τα γνωστά στο σ.σ. των κυρίων αξόνων x_1,x_2,x_3. Θ' αναζητήσουμε ποια θα είναι η μορφή της όταν γραφεί στο ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων που ορίζουν τα $\mathbf{D}_1,\mathbf{D}_2,\mathbf{l}$. Ας υποθέσουμε ότι οι άξονες του τελευταίου συστήματος ταυτίζονται με αυτούς του x_1',x_2',x_3' και ο άξονας x_3' αντιστοιχεί στη διεύθυνση του $\mathbf{l}$. Η διαδικασία αυτή συνεπάγεται ένα μετασχηματισμό του σ.σ. από το x_1,x_2,x_3 στο x_1',x_2',x_3'. Στην πραγματικότητα το επίπεδο x_1',x_2' (δηλ. αυτό των $\mathbf{D}_1,\mathbf{D}_2$), είναι η τομή του ελλειψοειδούς της (σχ.Β-11) που είναι κάθετη στη διεύθυνση του $\mathbf{l}$ δηλ. του x_3'. Θ' αποδείξουμε ότι η τομή αυτή είναι έλλειψη και μάλιστα οι άξονές της είναι παράλληλοι με τις διευθύνσεις των αξόνων x_1',x_2' δηλ. των $\mathbf{D}_1,\mathbf{D}_2$.

Η σχέση μετασχηματισμού των συντεταγμένων ενός σ.σ. x_1,x_2,x_3 στο σύστημα x_1',x_2',x_3' με συνημίτονα κατεύθυνσης $x_1'(a',b',c'),x_2'(a'',b'',c''),x_3'(l_1,l_2,l_3)$ δίνεται διαγραμματικά από τον πίνακα:

		Παλαιό σύστημα		
		x_1	x_2	x_3
Νέο σύστημα	x_1'	a'	b'	c'
	x_2'	a''	b''	c''
	x_3'	l_1	l_2	l_3

Επομένως οι συντεταγμένες x_1, x_2, x_3 συναρτήσει των x_1', x_2', x_3' θα δίνονται από τις σχέσεις:

$$\begin{aligned} x_1 &= a'x_1' + a''x_2' + l_1x_3' \\ x_2 &= b'x_1' + b''x_2' + l_2x_3' \\ x_3 &= c'x_1' + c''x_2' + l_3x' \end{aligned} \tag{B.15}$$

Αν τώρα αντικαταστήσουμε τα x_1, x_2, x_3 από τη (σχ. Β-15) στη (σχ. Β-11) ουσιαστικά εκφράζουμε το ελλ. των δ.δ. στο σ.σ. x_1', x_2', x_3'. Επειδή το τελευταίο δεν είναι το σύστημα των κυρίων αξόνων (όπως άλλωστε βλέπουμε μετά το πέρας των πράξεων) αποτελείται από εννέα όρους. Δηλ. θα έχει τη μορφή:

$$B_{ij}'x_i'x_j' = 1 \qquad i, j = 1, 2, 3 \tag{B.16}$$

όπου:

$$B_{ij}' = a_{ik}a_{jl}B_{kl} \qquad i, j, k, l = 1, 2, 3 \tag{B.17}$$

και οι συντελεστές a_{ij} αντιπροσωπεύουν τα συνημίτονα κατεύθυνσης του πίνακα της (σχ. Β.15) δηλ.

$$\underset{i,j=1,2,3}{a_{ij}} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \\ l_1 & l_2 & l_3 \end{pmatrix} \tag{B.18}$$

Αυτό που μας ενδιαφέρει βέβαια εδώ, είναι η τομή του ελλειψοειδούς εκφρασμένου στο σύστημα x_1', x_2', x_3' από επίπεδο κάθετο στον x_3' στην αρχή του συστήματος συντεταγμένων. Και επιτυγχάνεται αν στη (σχ. Β-16) θέσουμε $x_3' = 0$. Τότε θα πάρουμε τη σχέση:

$$B_{11}'x_1'^2 + 2B_{12}'x_1'x_2' + B_{22}'x_2'^2 = 1 \tag{B.19}$$

Αλλά από τη (σχ. Β-17) θα έχουμε:

$$B_{12}' = a_{1k}a_{2l}B_{kl} = a_{11}a_{21}B_{11} + a_{12}a_{22}B_{22} + a_{13}a_{23}B_{33}$$

και με τη βοήθεια των (σχ. Β-18) τελικά:

$$B_{12}' = a'a''B_1 + b'b''B_2 + c'c''B_3 \tag{B.20}$$

όπου βέβαια : $B_{11} = B_1, B_{22} = B_2, B_{33} = B_3$.

Γνωρίζουμε όμως ότι τα συνημίτονα κατεύθυνσης $a', a'', b', b'', c', c''$ είναι ανάλογα των παραγόντων της (σχ. Β-13) για $\upsilon^2 = \upsilon'^2$ και $\upsilon^2 = \upsilon''^2$. Επίσης $B_1 = 1/n_1^2 \sim \upsilon_1^2$ κ.λ.π. Άρα από τη (σχ. Β-20) ο όρος B'_{12} θα είναι:

$$\left.\begin{aligned} B'_{12} &\sim \frac{l_1^2\upsilon_1^2}{\left(\upsilon_1^2-\upsilon'^2\right)\left(\upsilon_1^2-\upsilon''^2\right)} + \frac{l_2^2\upsilon_2^2}{\left(\upsilon_2^2-\upsilon'^2\right)\left(\upsilon_2^2-\upsilon''^2\right)} + \frac{l_3^2\upsilon_3^2}{\left(\upsilon_3^2-\upsilon'^2\right)\left(\upsilon_3^2-\upsilon''^2\right)} = \\ &= \frac{\upsilon'^2 f\left(\upsilon'^2\right) - \upsilon''^2 f\left(\upsilon''^2\right)}{\upsilon'^2-\upsilon''^2} = 0 \end{aligned}\right\} \quad \text{(B.21)}$$

με βάση τις (σχ. Β-12). Επομένως $B'_{12} = 0$ και οι κύριοι άξονες τις έλλειψης (της τομής του ελλειψοειδούς των δ.δ. με το επίπεδο το κάθετο στον άξονα x'_3) θα είναι αυτοί των αξόνων x'_1 και x'_2 δηλ. των $\mathbf{D}_1$ και $\mathbf{D}_2$.

β) Θα πρέπει ν' αποδείξουμε στα επόμενα ότι τα μήκη των ημιαξόνων τις έλλειψης :

$$B'_{11}x_1'^2 + B'_{22}x_2'^2 = 1 \qquad \text{(B.22)}$$

είναι ίσα με τους δ.δ. των δύο διαδιδόμενων μετ. κύματος κατά τη διεύθυνση της $\mathbf{l}$. Δηλ. $n' = 1/\sqrt{B'_{11}} = c/\upsilon'$ και $n'' = 1/\sqrt{B'_{22}} = c/\upsilon''$. Επομένως θα πρέπει ν' αποδείξουμε ότι: $c^2 B'_{11} = \upsilon'^2$ και $c^2 B'_{22} = \upsilon''^2$. Αλλά:

$$B'_{11} = a_{1k}a_{1l}B_{kl} = a_{11}^2 B_{11} + a_{12}^2 B_{22} + a_{13}^2 B_{33} = a'^2 B_1 + b'^2 B_2 + c'^2 B_3$$

Επειδή όμως: $$a' = \frac{l_1}{\left(\upsilon_1^2-\upsilon'^2\right)} \Bigg/ \sqrt{\frac{l_1^2}{\left(\upsilon_1^2-\upsilon'^2\right)^2} + \frac{l_2^2}{\left(\upsilon_2^2-\upsilon'^2\right)^2} + \frac{l_3^2}{\left(\upsilon_3^2-\upsilon'^2\right)^2}}$$

(όπως και δύο παρόμοιες σχέσεις για τα b' και c') και το γεγονός ότι : $B_1 = \upsilon_1^2/c^2, B_2 = \upsilon_2^2/c^2, B_3 = \upsilon_3^2/c^2$, θα είναι αν υποθέσουμε ότι $c^2 B'_{11} = \upsilon'^2$:

$$c^2 B'_{11} = \upsilon'^2 = \frac{\dfrac{l_1^2\upsilon_1^2}{\left(\upsilon_1^2-\upsilon'^2\right)^2} + \dfrac{l_2^2\upsilon_2^2}{\left(\upsilon_2^2-\upsilon'^2\right)^2} + \dfrac{l_3^2\upsilon_3^2}{\left(\upsilon_3^2-\upsilon'^2\right)^2}}{\dfrac{l_1^2}{\left(\upsilon_1^2-\upsilon'^2\right)^2} + \dfrac{l_2^2}{\left(\upsilon_2^2-\upsilon'^2\right)^2} + \dfrac{l_3^2}{\left(\upsilon_3^2-\upsilon'^2\right)^2}}$$

Μετά την απλοποίηση των όρων βρίσκουμε:

$$\frac{l_1^2}{\left(\upsilon_1^2-\upsilon'^2\right)^2}\left(\upsilon_1^2-\upsilon'^2\right)+\frac{l_2^2}{\left(\upsilon_2^2-\upsilon'^2\right)^2}\left(\upsilon_2^2-\upsilon'^2\right)+\frac{l_3^2}{\left(\upsilon_3^2-\upsilon'^2\right)^2}\left(\upsilon_3^2-\upsilon'^2\right)=0$$

ή:

$$\frac{l_1^2}{\left(\upsilon_1^2-\upsilon'^2\right)}+\frac{l_2^2}{\left(\upsilon_2^2-\upsilon'^2\right)}+\frac{l_3^2}{\left(\upsilon_3^2-\upsilon'^2\right)}=0$$

η οποία ισχύει, γιατί το πρώτο μέλος της είναι πράγματι μηδέν για $\upsilon=\upsilon'$ με βάση τη (σχ. Α-30). Με την ίδια ακριβώς διαδικασία αποδεικνύεται και η σχέση : $c^2B'_{22}=\upsilon''^2$. Επομένως οι ημιάξονες της έλλειψης που περιγράφεται από τη (σχ. Β-22) είναι οι δ.δ. n' και n''.

Γ) *Επιφάνειες κυματοκαθέτου*

Στο (Κεφ. Α) συσχετίσαμε τις δύο διαφορικές εξισώσεις του Maxwell (σχ. Α-11,12) για διάδοση σε ανισότροπα υλικά με τις εξής προϋποθέσεις: 1) Τα διαδιδόμενα κύματα είναι επίπεδα, 2) Τα υλικά (κρύσταλλοι) είναι διαφανή (μηδενική σχεδόν απορρόφηση) και 3) Τα υλικά είναι μαγνητικά ισότροπα (δηλ. οι μαγνητικές τους ιδιότητες είναι ίδιες προς οποιαδήποτε διεύθυνση διάδοσης). Επίσης η μελέτη μας έγινε ως προς το σ.σ. των κυρίων αξόνων x_1, x_2, x_3 (για το οποίο ισχύουν μεταξύ των συνιστωσών των $\mathbf{D}$ και $\mathbf{E}$ οι (σχ. Α-6)). Κάτω από αυτές τις συνθήκες οδηγηθήκαμε στη (σχ. Α-20), με τη βοήθεια της οποίας αναδεικνύεται η ύπαρξη των δύο εν γένει διαδιδόμενων πεδίων στο εσωτερικό του κρυστάλλου. Η σχέση αυτή είναι η εξής:

$$\mathbf{k}\times\left(\mathbf{k}\times\mathbf{E}\right)+\omega^2\mu\varepsilon\mathbf{E}=0 \qquad (\Gamma\text{-}1)$$

όπου ε οι κύριες ηλ. διαπερατότητες (βλ. (σχ. Α-6) ή (σχ. Β-6)). Με τη βοήθεια τώρα της ιδιότητας: $\mathbf{a}\times\left(\mathbf{b}\times\mathbf{c}\right)=\mathbf{b}\left(\mathbf{a}\cdot\mathbf{c}\right)-\mathbf{c}\left(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}\right)$, η (σχ. Γ-1) γίνεται:

$$\mathbf{k}\left(\mathbf{k}\cdot\mathbf{E}\right)+\left(\omega^2\mu\varepsilon-k^2\right)\mathbf{E}=0 \qquad (\Gamma\text{-}2)$$

όπου: $\mathbf{E}=E_1\mathbf{i}+E_2\mathbf{j}+E_3\mathbf{k}$ $\qquad$ $\mathbf{k}=k_1\mathbf{i}+k_2\mathbf{j}+k_3\mathbf{k}$

$$k^2=k_1^2+k_2^2+k_3^2 \qquad \mathbf{k}\cdot\mathbf{E}=k_1E_1+k_2E_2+k_3E_3$$

Επομένως από τη (σχ. Γ-2) βρίσκουμε για τις τρεις συνιστώσες E_1, E_2, E_3 του πεδίου $\mathbf{E}$ (λόγω των (σχ. Α-6)):

$$\left.\begin{aligned} k_1\left(\mathbf{k}\cdot\mathbf{E}\right)+\left(\omega^2\mu\varepsilon_1-k^2\right)E_1&=0\\ k_2\left(\mathbf{k}\cdot\mathbf{E}\right)+\left(\omega^2\mu\varepsilon_2-k^2\right)E_2&=0\\ k_3\left(\mathbf{k}\cdot\mathbf{E}\right)+\left(\omega^2\mu\varepsilon_3-k^2\right)E_3&=0 \end{aligned}\right\} \qquad (\Gamma\text{-}3)$$

Μετά την αντικατάσταση του εσωτερικού γινομένου $\mathbf{k}\cdot\mathbf{E}$ και του μέτρου του $\mathbf{k}$, ($|\mathbf{k}|=k$) το παραπάνω ομογενές σύστημα τριών εξισώσεων ως προς τις συνιστώσες του πεδίου $\mathbf{E}$ παίρνει τη μορφή:

$$\begin{pmatrix} \omega^2\mu\varepsilon_1 - k_2^2 - k_3^2 & k_1k_2 & k_1k_3 \\ k_2k_1 & \omega^2\mu\varepsilon_2 - k_1^2 - k_3^2 & k_2k_3 \\ k_3k_1 & k_3k_2 & \omega^2\mu\varepsilon_3 - k_1^2 - k_2^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{pmatrix} = 0$$

Προκειμένου το σύστημα να μην έχει τετριμμένες λύσεις, θα πρέπει η ορίζουσά του να είναι ίση με μηδέν. Δηλ.

$$\begin{vmatrix} \left(n_1\dfrac{\omega}{c}\right)^2 - k_2^2 - k_3^2 & k_1k_2 & k_1k_3 \\ k_2k_1 & \left(n_2\dfrac{\omega}{c}\right)^2 - k_1^2 - k_3^2 & k_2k_3 \\ k_3k_1 & k_3k_2 & \left(n_3\dfrac{\omega}{c}\right)^2 - k_1^2 - k_2^2 \end{vmatrix} = 0 \qquad (\Gamma\text{-}4)$$

όπου: $\omega^2\mu\varepsilon_i = \omega^2\mu\varepsilon_0 n_i^2 = \left(\dfrac{\omega}{c}n_i\right)^2 \quad i = 1,2,3$. Μετά τις πράξεις η (σχ. Γ-4) παίρνει τη μορφή:

$$\left.\begin{aligned} & n_1^2k_1^4 + n_2^2k_2^4 + n_3^2k_3^4 + \left(n_1^2+n_2^2\right)k_1^2k_2^2 + \left(n_2^2+n_3^2\right)k_2^2k_3^2 + \left(n_1^2+n_3^2\right)k_1^2k_3^2 - \\ & -\left(\frac{n_1\omega}{c}\right)^2\left(n_2^2+n_3^2\right)k_1^2 - \left(\frac{n_2\omega}{c}\right)^2\left(n_1^2+n_3^2\right)k_2^2 - \left(\frac{n_3\omega}{c}\right)^2\left(n_1^2+n_2^2\right)k_3^2 + \left(\frac{\omega}{c}\right)^4 n_1^2n_2^2n_3^2 = 0 \end{aligned}\right\} \qquad (\Gamma4\text{-}1)$$

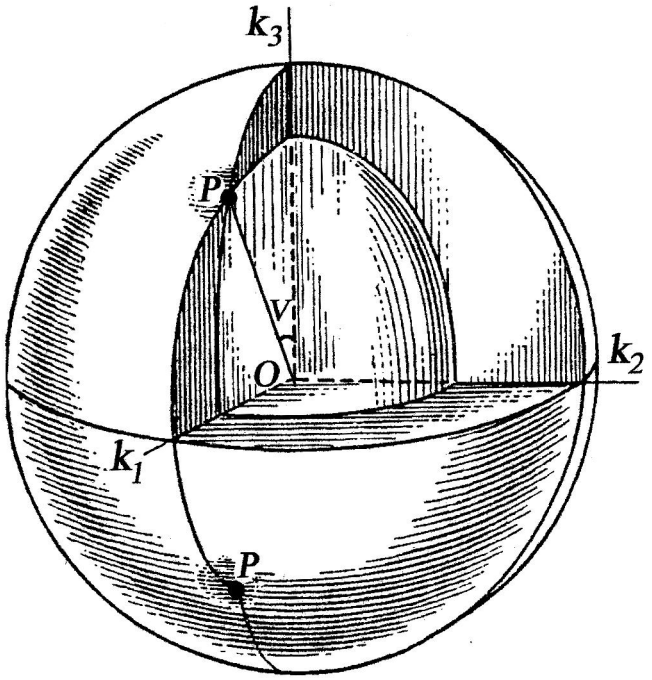
Επίσης με τη βοήθεια της (σχ. Α-10): $\mathbf{k} = |\mathbf{k}|\mathbf{l} = k\mathbf{l} = \dfrac{2\pi}{\lambda}\mathbf{l} = \dfrac{2\pi\nu}{\upsilon}\mathbf{l} = \dfrac{\omega}{\upsilon}\mathbf{l} = \dfrac{\omega}{c}n\mathbf{l}$

η (σχ. Γ4-1) παίρνει τη μορφή:

$$\left.\begin{aligned} & n^4n_1^2l_1^4 + n^4n_2^2l_2^4 + n^4n_3^2l_3^4 + n^4\left(n_1^2+n_2^2\right)l_1^2l_2^2 + n^4\left(n_2^2+n_3^2\right)l_2^2l_3^2 + n^4\left(n_1^2+n_3^2\right)l_1^2l_3^2 - \\ & -n^2n_1^2\left(n_2^2+n_3^2\right)l_1^2 - n^2n_2^2\left(n_1^2+n_3^2\right)l_2^2 - n^2n_3^2\left(n_1^2+n_2^2\right)l_3^2 + n_1^2n_2^2n_3^2 = 0 \end{aligned}\right\} \quad (\Gamma4\text{-}2)$$

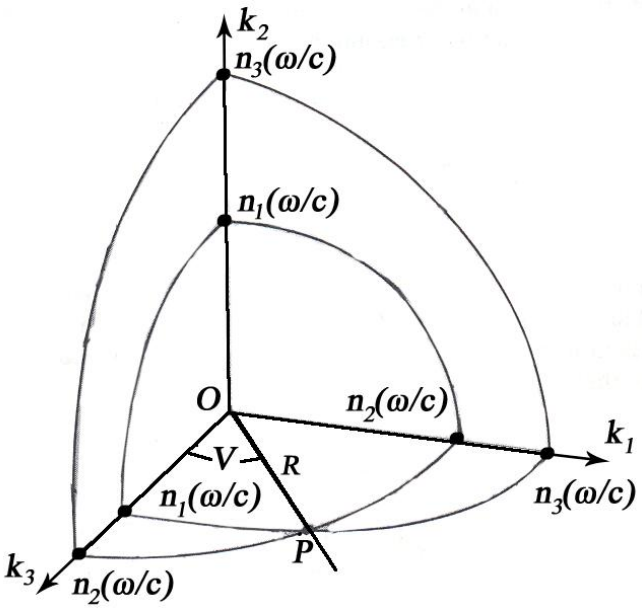
Οι (σχ. Γ4-1,Γ4-2) παριστάνουν μια επιφάνεια τριών διαστάσεων στο χώρο των $\mathbf{k}\left(k_1,k_2,k_3\right)$. Ονομάζεται ***επιφάνεια κυματοκαθέτου (normal surface)*** και όπως θα δούμε στα επόμενα αποτελείται από 'σύνθεση' δύο κελυφών τα οποία στη γενικότερη περίπτωση έχουν τέσσερα κοινά σημεία. Οι δύο ευθείες που ενώνουν δύο τέτοια αντιδιαμετρικά σημεία και περνούν από την αρχή του συστήματος συντεταγμένων

ονομάζονται ***οπτικοί άξονες (optical axes)***. Στο (Σχ. Γ-1α) φαίνεται η σύνθεση των δύο αυτών κελυφών στο χώρο (σύστημα συντεταγμένων k_1, k_2, k_3).



(Σχ. Γ-1α)

Στο (Σχ. Γ-1β) παρουσιάζεται ένα ογδοϊμόριο της σύνθετης αυτής επιφάνειας. Και προκειμένου να δούμε με πιο τρόπο αναπτύσσεται, θα θεωρήσουμε



(Σχ. Γ-1β)

τις τομές των κελυφών με ένα από τα επίπεδα (έστω το k_1, k_2) που διέρχεται από την αρχή του συστήματος συντεταγμένων O. Για το επίπεδο αυτό $k_3 = 0$ και ο υπολογισμός της ορίζουσας της (σχ. Γ-4) μας δίνει:

$$\left[\left(\frac{n_3\omega}{c}\right)^2 - k_1^2 - k_2^2\right]\left\{\left[\left(\frac{n_1\omega}{c}\right)^2 - k_2^2\right]\left[\left(\frac{n_2\omega}{c}\right)^2 - k_1^2\right] - k_1^2 k_2^2\right\} = 0 \qquad (\Gamma\text{-}5)$$

Για να ισχύει η (σχ. Γ-5) θα πρέπει να είναι μηδέν είτε ο πρώτος είτε ο δεύτερος από τους παράγοντες του γινομένου. Μετά τις απλοποιήσεις ο πρώτος παράγοντας μας δίνει την εξίσωση κύκλου:

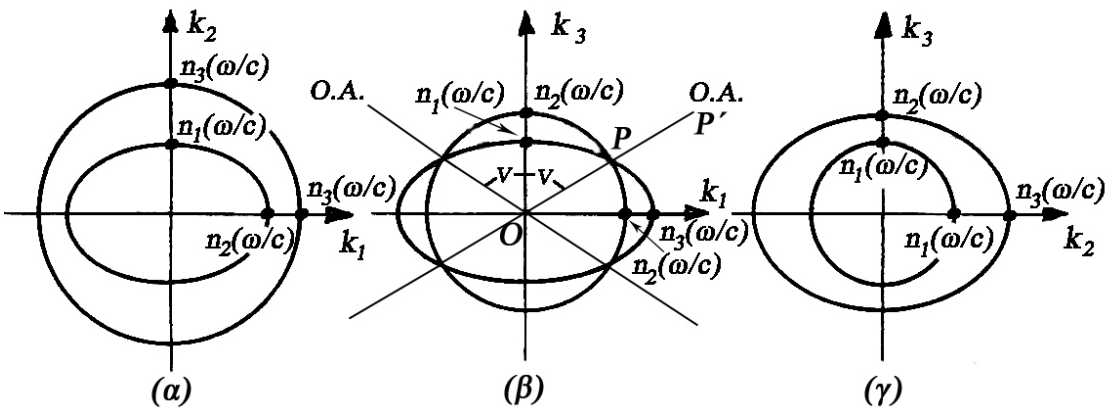
$$k_1^2 + k_2^2 = \left(\frac{n_3\omega}{c}\right)^2 \qquad (\Gamma\text{-}6)$$

Και ο δεύτερος παράγοντας την εξίσωση έλλειψης:

$$\frac{k_1^2}{\left(\frac{n_2\omega}{c}\right)^2} + \frac{k_2^2}{\left(\frac{n_1\omega}{c}\right)^2} = 1 \qquad (\Gamma\text{-}7)$$

Δύο ζεύγη παρομοίων εξισώσεων μπορούμε να βρούμε και για τα επίπεδα k_1, k_3 και k_2, k_3. Επομένως διαπιστώνουμε ότι η τομή της σύνθετης επιφάνειας με κάθε ένα από τα προαναφερόμενα επίπεδα που διέρχεται από την αρχή O είναι ένας κύκλος και μια έλλειψη. Από το γεγονός αυτό αναδεικνύεται και η ύπαρξη των δύο κελυφών, η σύνθεση των οποίων συγκροτεί την επιφάνεια κυματοκαθέτου. Επομένως και για κάθε διεύθυνση της κυματοκαθέτου $\mathbf{k}$ υπάρχουν γενικά δύο τιμές για τον κυματάριθμο $|\mathbf{k}| = k$ άρα και δύο τιμές της ταχύτητας φάσης $\upsilon = \omega/k$ (δηλ. $\upsilon' = c/n'$ και $\upsilon'' = c/n''$). Στην περίπτωση όμως που τα δύο κελύφη τέμνονται (όπως π.χ. στο επίπεδο k_1, k_3 του (Σχ. Γ-1β)), τότε στη διεύθυνση αυτή οι δύο τιμές του k είναι ίσες. Αντίστοιχο σημείο τομής βρίσκεται και αντιδιαμετρικά του πρώτου σε σχέση με την αρχή O του συστήματος συντεταγμένων k_1, k_2, k_3. Τα σημεία αυτά ορίζουν τον ένα από τους δύο εν γένει οπτικούς άξονες του κρυστάλλου.

Στα (Σχ. Γ-2) δίνονται οι τομές των δύο κελυφών με τα επίπεδα k_1, k_2 k_1, k_3 και k_2, k_3 με την προϋπόθεση ότι ισχύει η σχέση: $n_1 < n_2 < n_3$. Στο (Σχ. Γ-2β) σχεδιάζονται οι διευθύνσεις των δύο οπτικών αξόνων.



(Σχ. Γ-2)

Παράδειγμα

Για την περίπτωση στην οποία $n_1 < n_2 < n_3$, να υπολογιστούν οι θέσεις και οι διευθύνσεις των δύο οπτικών αξόνων ενός διάξονα κρυστάλλου.

- Από τη (σχ. Γ-4) που παριστάνει την επιφάνεια κυματοκαθέτου του κρυστάλλου για $k_2 = 0$ βρίσκουμε ότι οι τομές των δύο κελυφών στο επίπεδο k_1, k_3 (Σχ. Γ-1β) και (Σχ. Γ-2β) είναι ένας κύκλος και μία έλλειψη με εξισώσεις:

$$k_1^2 + k_3^2 = \left(\frac{n_2\omega}{c}\right)^2 \quad \text{και} \quad \frac{k_1^2}{\left(\frac{n_3\omega}{c}\right)^2} + \frac{k_3^2}{\left(\frac{n_1\omega}{c}\right)^2} = 1$$

Για ένα κοινό σημείο P των δύο καμπυλών με $P(k_1', k_3')$ θα έχουμε: $k_1' = R\sin V$ και $k_3' = R\cos V$, όπου $OP = R$ και V η γωνία μεταξύ του οπτικού άξονα OP' με τον άξονα k_3. Τότε η αντικατάσταση των k_1', k_3' στην πρώτη των εξισώσεων θα μας δώσει:

$$(R\sin V)^2 + (R\cos V)^2 = \left(\frac{n_2\omega}{c}\right)^2 \Rightarrow R^2 = \left(\frac{n_2\omega}{c}\right)^2$$

Επίσης η αντικατάσταση των k_1', k_3' στην εξίσωση της έλλειψης θα μας δώσει:

$$\frac{R^2\sin^2 V}{\left(\frac{n_3\omega}{c}\right)^2} + \frac{R^2\cos^2 V}{\left(\frac{n_1\omega}{c}\right)^2} = 1 \Rightarrow \frac{\sin^2 V}{\left(\frac{n_3\omega}{c}\right)^2} + \frac{\cos^2 V}{\left(\frac{n_1\omega}{c}\right)^2} = \frac{1}{R^2} = \frac{1}{\left(\frac{n_2\omega}{c}\right)^2}$$

και τελικά: $\dfrac{\sin^2 V}{n_3^2}+\dfrac{\cos^2 V}{n_1^2}=\dfrac{1}{n_2^2}$. Επειδή όμως: $\sin^2 V=1-\cos^2 V$ τότε:

$$\cos^2 V=\left(\frac{1}{n_2^2}-\frac{1}{n_3^2}\right)\Bigg/\left(\frac{1}{n_1^2}-\frac{1}{n_3^2}\right)$$

και μετά τις απλοποιήσεις:

$$\cos V=\frac{n_1}{n_2}\sqrt{\frac{n_3^2-n_2^2}{n_3^2-n_1^2}}\qquad \left(n_1<n_2<n_3\right)$$

Όσον αφορά τώρα τον προσδιορισμό των μέτρων καθώς και των συνημιτόνων κατεύθυνσης των δύο ηλ. πεδίων $\mathbf{E}$ (δηλ. των $\mathbf{E}_1',\mathbf{E}_2'$) τα οποία σχετίζονται με τα δύο διαδιδόμενα επίπεδα μέτωπα κύματος (ιδιοκαταστάσεις) κατά τη διεύθυνση μιας κυματοκαθέτου $\mathbf{k}$ (δηλ. της $\mathbf{l}$), θ' αναφερθούμε στη (σχ. Α-22). Με την προϋπόθεση ότι ισχύουν οι (σχ. Α-6) έχουμε:

$$\left.\begin{aligned}&\mu\upsilon^2\varepsilon_1E_1-E_1+l_1\left(\mathbf{l}\cdot\mathbf{E}\right)=0\\&\mu\upsilon^2\varepsilon_2E_2-E_2+l_2\left(\mathbf{l}\cdot\mathbf{E}\right)=0\\&\mu\upsilon^2\varepsilon_3E_3-E_3+l_3\left(\mathbf{l}\cdot\mathbf{E}\right)=0\end{aligned}\right\}\qquad(\Gamma\text{-}8)$$

όπου l_1,l_2,l_3 τα συνημίτονα κατεύθυνσης της κυματοκαθέτου. Επομένως:

$$\left.\begin{aligned}E_1&=\frac{l_1\left(\mathbf{l}\cdot\mathbf{E}\right)}{1-\mu\upsilon^2\varepsilon_1}=\frac{l_1\upsilon_1^2\left(\mathbf{l}\cdot\mathbf{E}\right)}{\upsilon_1^2-\upsilon^2}\qquad\left(\upsilon_1^2=\frac{1}{\mu\varepsilon_1}\right)\\E_2&=\frac{l_2\left(\mathbf{l}\cdot\mathbf{E}\right)}{1-\mu\upsilon^2\varepsilon_2}=\frac{l_2\upsilon_2^2\left(\mathbf{l}\cdot\mathbf{E}\right)}{\upsilon_2^2-\upsilon^2}\qquad\left(\upsilon_2^2=\frac{1}{\mu\varepsilon_2}\right)\\E_3&=\frac{l_3\left(\mathbf{l}\cdot\mathbf{E}\right)}{1-\mu\upsilon^2\varepsilon_3}=\frac{l_3\upsilon_3^2\left(\mathbf{l}\cdot\mathbf{E}\right)}{\upsilon_3^2-\upsilon^2}\qquad\left(\upsilon_3^2=\frac{1}{\mu\varepsilon_3}\right)\end{aligned}\right\}\qquad(\Gamma\text{-}9)$$

Δηλ. $\mathbf{E}_1'(E_{11},E_{12},E_{13})$ για $\upsilon=\upsilon'$ και $\mathbf{E}_2'(E_{21},E_{22},E_{23})$ για $\upsilon=\upsilon''$. Επομένως τα συνημίτονα κατεύθυνσης των δύο πεδίων $\mathbf{E}$ θα είναι ανάλογα των:

$$\frac{l_1\upsilon_1^2}{\upsilon_1^2-\upsilon^2}\ ,\ \frac{l_2\upsilon_2^2}{\upsilon_2^2-\upsilon^2}\ ,\ \frac{l_3\upsilon_3^2}{\upsilon_3^2-\upsilon^2}\qquad(\Gamma\text{-}10)$$

Με τον ίδιο τρόπο από τις (σχ. Γ-3) βρίσκουμε ότι τα συνημίτονα κατεύθυνσης των δύο $\mathbf{E}$ είναι ανάλογα των:

$$\frac{k_1}{k^2-\omega^2\mu\varepsilon_1}\,,\ \frac{k_2}{k^2-\omega^2\mu\varepsilon_2}\ ,\ \frac{k_3}{k^2-\omega^2\mu\varepsilon_3} \qquad (\Gamma\text{-}11)$$

με $(\omega = k\upsilon:\ \upsilon=\upsilon'\ ,\ \upsilon=\upsilon'')$. Τα $\mathbf{E}_1',\mathbf{E}_2'$ στη γενικότερη περίπτωση δεν είναι ορθογώνια μεταξύ τους ούτε κάθετα στην $\mathbf{k}$ και αυτό επιβεβαιώνεται από το γεγονός ότι το εσωτερικό γινόμενο των $\mathbf{E}_1',\mathbf{E}_2'$, των οποίων τα συνημίτονα κατεύθυνσης δίνονται από τις (σχ. Γ-10 ή Γ-11) για $\upsilon=\upsilon'$ και $\upsilon=\upsilon''$ είναι διάφορο του μηδενός.

Οι (σχ. Γ-4, Γ-11) είναι δυνατόν να εκφραστούν συναρτήσει των συνημίτονων κατεύθυνσης $\mathbf{l}(l_1,l_2,l_3)$, επειδή κατά τα γνωστά:
$\mathbf{k}=(\omega/c)n\mathbf{l}$ και $\varepsilon_i=\varepsilon_0 n_i^2$, $i=1,2,3$. Τότε θα είναι:

$$\frac{l_1^2}{n^2-n_1^2}+\frac{l_2^2}{n^2-n_2^2}+\frac{l_3^2}{n^2-n_3^2}=\frac{1}{n^2} \qquad (\Gamma\text{-}12)$$

της οποίας η αναλυτική έκφραση είναι αυτή της (σχ. Γ4-2) και τα συνημίτονα κατεύθυνσης των $\mathbf{E}$ θα είναι ανάλογα των:

$$\frac{l_1}{n^2-n_1^2}\ ,\ \frac{l_2}{n^2-n_2^2}\ ,\ \frac{l_3}{n^2-n_3^2} \qquad (\Gamma\text{-}13)$$

Η (σχ. Γ-12) αποτελεί μια άλλη έκφραση της εξίσωσης Fresnel (σχ. Α-30). Πρόκειται για μια διτετράγωνη εξίσωση της οποίας η επίλυση μας δίνει τις τιμές των δ.δ. $n^2=n'^2$, $n^2=n''^2$ και κατά προέκταση τις δύο ταχύτητες φάσης $\upsilon^2=\upsilon'^2$, $\upsilon^2=\upsilon''^2$ των δύο διαδιδόμενων κατά μήκος της $\mathbf{l}(l_1,l_2,l_3)$ επιπέδων μετώπων κύματος στο εσωτερικό του κρυστάλλου. Επίσης η (σχ. Γ-13) μας δίνει τα συνημίτονα κατεύθυνσης των $\mathbf{E}_1',\mathbf{E}_2'$ (για $n^2=n'^2$, $n^2=n''^2$).

Κατάταξη των ανισοτρόπων υλικών. Κρυσταλλικά συστήματα και οπτική συμμετρία

Όπως διαπιστώνουμε από τη (σχ. Γ-4), που περιγράφει την επιφάνεια κυματοκαθέτου ενός ανισοτρόπου υλικού, ο καθορισμός της γίνεται από τις τιμές των κυρίων ηλ. διαπερατοτήτων $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$ ή κατά προέκταση από του τρεις κύριους δ.δ.

n_1, n_2, n_3. Είδαμε προηγουμένως ότι αν $n_1 \neq n_2 \neq n_3$, τότε ο κρύσταλλος διαθέτει δύο οπτικούς άξονες που βρίσκονται στο ίδιο επίπεδο. Τότε ο κρύσταλλος ονομάζεται ***διάξονας (biaxial)***. Σε πολλά όμως ανισότροπα υλικά δύο από του κύριους δ.δ. είναι ίσοι. Τότε η (σχ. Γ-4) παίρνει τη μορφή:

$$\left(\frac{k_1^2+k_2^2}{n_e^2}+\frac{k_3^2}{n_o^2}-\frac{\omega^2}{c^2}\right)\left(\frac{k_1^2+k_2^2+k_3^2}{n_o^2}-\frac{\omega^2}{c^2}\right)=0 \qquad (\Gamma\text{-}14)$$

όπου $n_1 = n_2 = n_o$ και $n_3 = n_e$. Ο πρώτος από αυτούς τους δύο όρους του γινομένου παριστάνει ένα ελλειψοειδές εκ περιστροφής περί τον άξονα k_3. Ο δεύτερος παριστάνει μια σφαίρα. Οι δύο αυτές επιφάνειες εφάπτονται σε δύο σημεία κατά μήκος του άξονα k_3. Επομένως οι δύο οπτικοί άξονες εκφυλίζονται σε έναν. Κρύσταλλοι τέτοιου είδους ονομάζονται ***μονοάξονες (uniaxial)***. Πράγματι οι δύο εξισώσεις του ελλειψοειδούς και της σφαίρας είναι:

$$\frac{k_1^2+k_2^2}{\left(\frac{n_e\omega}{c}\right)^2}+\frac{k_3^2}{\left(\frac{n_o\omega}{c}\right)^2}=1 \qquad (\Gamma\text{-}15)$$

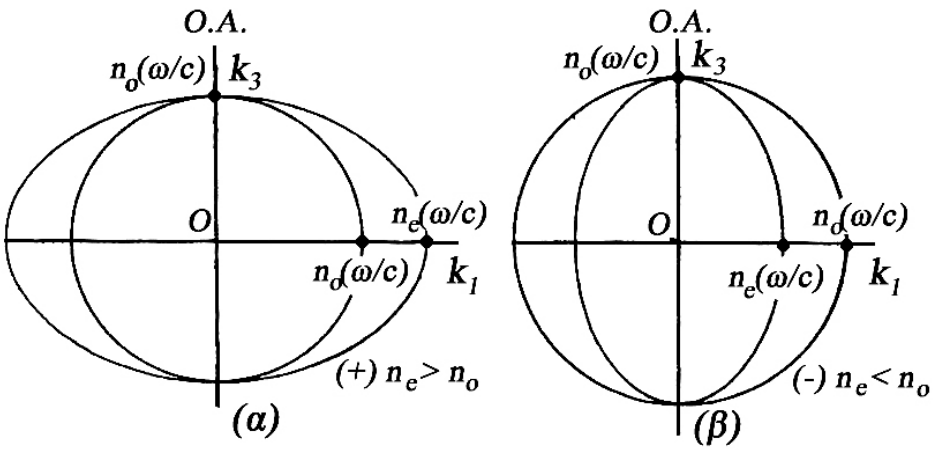
και:

$$\frac{k_1^2+k_2^2+k_3^2}{\left(\frac{n_o\omega}{c}\right)^2}=1 \qquad (\Gamma\text{-}16)$$

Για $k_2 = 0$ παίρνουμε τις τομές των δύο επιφανειών στο επίπεδο k_1, k_3 οι οποίες δίνονται από τις σχέσεις:

$$\frac{k_1^2}{\left(\frac{n_e\omega}{c}\right)^2}+\frac{k_3^2}{\left(\frac{n_o\omega}{c}\right)^2}=1 \quad , \quad \frac{k_1^2+k_3^2}{\left(\frac{n_o\omega}{c}\right)^2}=1 \qquad (\Gamma\text{-}17)$$

των οποίων η γραφική παράσταση φαίνεται στο (Σχ. Γ-3). Οι τελευταίες έχουν ένα κοινό σημείο κατά μήκος του άξονα k_3. Μαζί με το αντιδιαμετρικό του ως προς το κέντρο O καθορίζουν τη διεύθυνση του μοναδικού οπτικού άξονα. Αν $n_e > n_o$ (Σχ. Γ-3α) τότε οι κρύσταλλοι ονομάζονται θετικοί. Αν $n_e < n_o$ (Σχ. Γ-3β), τότε ονομάζονται αρνητικοί.



(Σχ. Γ-3)

Στην περίπτωση που οι κύριοι δ.δ. είναι όλοι ίσοι, δηλ. $n_1 = n_2 = n_3 = n$ τότε από τη (σχ. Γ-4) βρίσκουμε:

$$\frac{k_1^2 + k_2^2 + k_3^2}{\left(\frac{n\omega}{c}\right)^2} = 1 \qquad (\Gamma\text{-}18)$$

Δηλ. τα δύο κελύφη της σύνθετης επιφάνειας εκφυλίζονται σε μια επιφάνεια σφαίρας. Ο κρύσταλλος τότε συμπεριφέρεται σαν οπτικά ισότροπο υλικό και για κάθε διεύθυνση: $k = (\omega/c)n$.

Από τα προαναφερόμενα γίνεται κατανοητό ότι από άποψη ***οπτικής συμμετρίας (optical symmetry)*** τα ομογενή υλικά μπορούν να καταταγούν σε τρείς ομάδες: Τα ***ισότροπα (isotropic)***, τους ***μονοάξονες κρυστάλλους*** και τους ***διάξονες***. Η Κρυσταλλογραφία αποδεικνύει ότι κάθε μια από αυτές τις ομάδες, περιλαμβάνει ένα ορισμένο αριθμό ***κρυσταλλικών συστημάτων (crystal systems)***, τα οποία συνολικά είναι επτά τον αριθμό: Το ***κυβικό(cubic)***, το ***τριγωνικό (trigonal)***, το ***τετραγωνικό (tetragonal)***, το ***εξαγωνικό (hexagonal)*** το ***ορθορομβικό (orthorhombic)***, το ***μονοκλινές (monoclinic)*** και το ***τρικλινές (triclinic)***. Κάθε ένα κρυσταλλικό σύστημα περιλαμβάνει και από ένα ορισμένο αριθμό κρυσταλλικών τάξεων ή ***ομάδων σημείου (point groups)*** που ο συνολικός τους αριθμός είναι 32. Τα τελευταία αναδεικνύουν την φαινομενολογική (εξωτερική) μορφή των κρυστάλλων, που είναι απόρροια της μικροσκοπικής ατομικής τους δομής. Όπως φαίνεται και στον (Πιν. Γ-4), υλικά που κρυσταλλώνονται στο τετραγωνικό, τριγωνικό και εξαγωνικό σύστημα, ανήκουν στην ομάδα των μονοαξόνων κρυστάλλων. Υλικά που κρυσταλλώνονται στο ορθορομβικό, μονοκλινές και τρικλινές σύστημα, ανήκουν στην ομάδα των διαξόνων κρυστάλλων. Τέλος υλικά που κρυσταλλώνονται στο κυβικό σύ-

στημα, ανήκουν από απόψεως οπτικής συμμετρίας στα ισότροπα. Οι διηλεκτρικές ιδιότητες κάθε κρυσταλλικού συστήματος (αναφερόμενες εδώ στο σύστημα συντεταγμένων των κυρίων αξόνων x_1, x_2, x_3), έχουν άμεση σχέση με τις κύριες ηλ. διαπερατότητες και κατά προέκταση με τις κύριες διηλεκτρικές σταθερές. Οι τελευταίες καθορίζουν κατά τα γνωστά τους κύριους δ.δ. n_1, n_2, n_3 και οδηγούν στην επίλυση προβλημάτων διάδοσης στο εσωτερικό των κρυστάλλων.

Στον (Πίν. Γ-4), γίνεται συστηματική κατάταξη των προαναφερόμενων. Στην τελευταία στήλη, οι κύριες ηλ. διαπερατότητες (στοιχεία $\varepsilon = \varepsilon_0 n^2$) εμφανίζονται σαν διαγώνια στοιχεία του πίνακα (3×3) της ηλ. διαπερατότητας. Επίσης εμφανίζονται και τα στοιχεία του πίνακα (3×3) της ηλ. αδιαπερατότητας. Στους διάξονες κρυστάλλους οι κύριοι άξονες περιγράφονται με τέτοιο τρόπο έτσι ώστε οι κύριοι δ.δ. να έχουν την εξής τάξη: $n_1 < n_2 < n_3$. Για τις περιπτώσεις αυτές οι οπτικοί άξονες (όπως φαίνεται στο (Σχ. Γ-2)) βρίσκονται στο επίπεδο k_1, k_3. Επίσης στους μονοάξονες κρυστάλλους, ο δ.δ. n_o που αντιστοιχεί στα δύο ίσα στοιχεία ονομάζεται ***τακτικός δ.δ. (ordinary index)***. Ο n_e ονομάζεται ***έκτακτος δ.δ. (extraordinary index)***. Στον (Πιν. Γ-5) δίνονται οι τιμές των κυρίων δ.δ. που αντιστοιχούν σε μια σειρά γνωστών κρυσταλλικών υλικών.

Παράδειγμα

Να υπολογιστούν οι δ.δ. $n_o(\theta), n_e(\theta)$ της τακτικής και έκτακτης διαταραχής (των επιπέδων μετ. κύματος) των διαδιδόμενων κατά μήκος μιας κυματοκαθέτου. Όπου θ είναι η γωνία η οποία σχηματίζει η διεύθυνση του k_3 (δηλ. ο οπτικός άξονας) με την κυματοκάθετο. Ο κρύσταλλος είναι θετικός μονοάξονας.

- Για θετικό μονοάξονα κρύσταλλο τα κελύφη της επιφάνειας κυματοκαθέτου είναι δύο. Ένα ελλειψοειδές εκ περιστροφής, που περιβάλει μια σφαίρα. Οι δύο αυτές επιφάνειες εφάπτονται σε δύο σημεία κατά τη διεύθυνση του άξονα περιστροφής του ελλειψοειδούς που έστω είναι η k_3. Επειδή το πρόβλημα είναι συμμετρικό ως προς τον άξονα αυτό, μπορούμε να το επιλύσουμε σε ένα επίπεδο που τον περιλαμβάνει. Επιλέγουμε το k_1, k_3. Επομένως η επιφάνεια κυματοκαθέτου (σχ. Γ-14) για $k_2 = 0$ (επίπεδο k_1, k_3) παίρνει τη μορφή:

$$\left(\frac{k_1^2}{n_e^2} + \frac{k_3^2}{n_o^2} - \frac{\omega^2}{c^2}\right)\left(\frac{k_1^2 + k_3^2}{n_o^2} - \frac{\omega^2}{c^2}\right) = 0 \qquad (\Gamma\text{-}19)$$

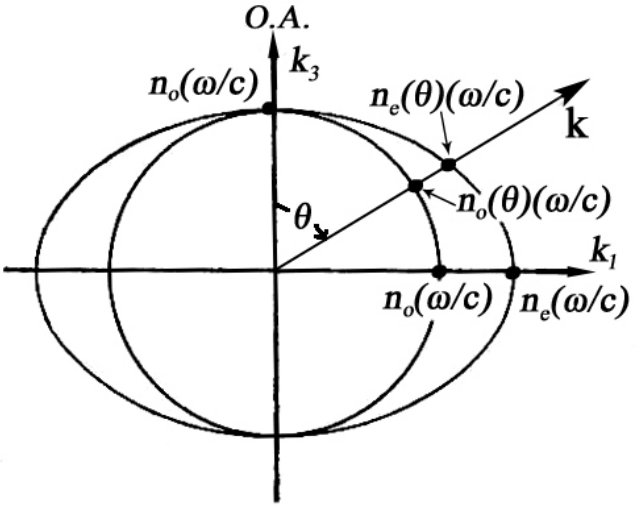
Οπτική συμμετρία	***Κρυσταλλικό σύστημα***	***Κρυσταλλική Τάξη (Ομάδα σημείου)***	***Πίνακες διαπερατοτήτων και αδιαπερατοτήτων***
Ισότροπος	Κυβικό	$\bar{4}3m$ 432 m3 23 m3m	$\varepsilon = \varepsilon_0 \begin{pmatrix} n^2 & 0 & 0 \\ 0 & n^2 & 0 \\ 0 & 0 & n^2 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 1/n^2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/n^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/n^2 \end{pmatrix}$
Μονοάξονας	Τετραγωνικό	4 $\bar{4}$ 4/m 422 4mm $\bar{4}2m$ 4/mmm	$\varepsilon = \varepsilon_0 \begin{pmatrix} n_o^2 & 0 & 0 \\ 0 & n_o^2 & 0 \\ 0 & 0 & n_e^2 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 1/n_o^2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/n_o^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/n_e^2 \end{pmatrix}$
	Εξαγωνικό	6 $\bar{6}$ 4/m 622 6mm $\bar{6}$m2 6/mmm	
	Τριγωνικό	3 $\bar{3}$ 32 3m $\bar{3}$m	
Διάξονας	Τρικλινές	1 $\bar{1}$	$\varepsilon = \varepsilon_0 \begin{pmatrix} n_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & n_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & n_3^2 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 1/n_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/n_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/n_3^2 \end{pmatrix}$
	Μονοκλινές	2 m 2/m	
	Ορθορομβικό	222 2mm mmm	

(Πίν. Γ-4)

Δείκτες διάθλασης κρυστάλλων (για λ_D=589.2nm)				
Ισότροπος	CdTe	2.69		
	NaCl	1.544		
	Diamond	2.417		
	Fluorite	1.392		
	GaAs	3.40		
Μονοάξονας θετικός		n_o	n_e	
	Ice	1.309	1.310	
	Quartz	1.544	1.553	
	BeO	1.717	1.732	
	Zircon	1.923	1.968	
	Rutile	2.616	2.903	
	ZnS	2.354	2.358	
Μονοάξονας αρνητικός		n_o	n_e	
	Beryl	1.598	1.590	
	(KDP)	1.507	1.467	
	$NaNO_3$	1.587	1.336	
	Calcite	1.658	1.486	
	Tourmaline	1.638	1.618	
	$LiNbO_3$	2.300	2.208	
	$BaTi\ O_3$	2.426	2.364	
	Proustite	3.019	2.739	
	(ADP)	1.522	1.478	
	$CaCO_3$	1.658	1.486	
Διάξονας		n_1	n_2	n_3
	Gypsum	1.520	1.523	1.530
	Feldspar	1.522	1.526	1.530
	Mica	1.552	1.582	1.588
	Topaz	1.619	1.620	1.627
	$NaNO_2$	1.344	1.411	1.651
	SbSI	2.700	3.200	3.800
	$YAlO_3$	1.923	1.938	1.947

(Πίν. Γ-5)

Ο πρώτος παράγοντας του γινομένου της (σχ. Γ-19) παριστάνει έλλειψη η οποία περιβάλλει τον κύκλο που περιγράφει ο δεύτερος παράγοντας της ίδιας σχέσης. Η κυματοκάθετος **k** που σχηματίζει γωνία θ σε σχέση με τον k_3, τέμνει τις



(Σχ. Γ-6)

δύο επιφάνειες στα σημεία $n_o(\theta)(\omega/c)$ και $n_e(\theta)(\omega/c)$ όπου $n_o(\theta)$ και $n_e(\theta)$ οι δ.δ. των δύο διαδιδόμενων επιπέδων μετ. κύματος κατά μήκος της **k**. Για $n = n_o(\theta)$, ο δεύτερος παράγοντας της (σχ. Γ-19) για $k_3 = n_o(\theta)(\omega/c)\cos\theta$, $k_2 = 0$, $k_1 = n_o(\theta)\left(\frac{\omega}{c}\right)\sin\theta$ θα μας δώσει:

$$n_o(\theta) = n_o \tag{Γ-20}$$

Δηλ. για οποιαδήποτε γωνία θ ο δ.δ. της τακτικής διαταραχής θα είναι σταθερός και ίσος με n_o.

Για $n = n_e(\theta)$, ο πρώτος παράγοντας του γινομένου της (σχ. Γ-19) για $k_3 = n_e(\theta)(\omega/c)\cos\theta$, $k_2 = 0$, $k_1 = n_e(\theta)(\omega/c)\sin\theta$ όπου k_1, k_2, k_3 οι συνιστώσες της **k**, θα μας δώσει:

$$\frac{1}{n_e(\theta)^2} = \frac{\sin^2\theta}{n_e^2} + \frac{\cos^2\theta}{n_o^2} \tag{Γ-21}$$

Από την τελευταία σχέση διαπιστώνουμε ότι ο δ.δ. της έκτακτης διαταραχής μετα-

βάλλεται μεταξύ των τιμών $n_e(\theta) = n_o$ για $\theta = 0^0$ και $n_e(\theta) = n_e$ για $\theta = 90^0$.

Ένα επόμενο βήμα είναι να προσδιορίσουμε τα συνημίτονα κατεύθυνσης των ηλεκτρικών πεδίων της τακτικής $\mathbf{E}_o$ και της έκτακτης $\mathbf{E}_e$ διαταραχής. Όμως γνωρίζουμε από τη (σχ. Γ-11) ότι τα τελευταία είναι ανάλογα των:

$$\frac{k_1}{k^2 - \omega^2 \mu \varepsilon_1}, \frac{k_2}{k^2 - \omega^2 \mu \varepsilon_2}, \frac{k_3}{k^2 - \omega^2 \mu \varepsilon_3} \qquad (\Gamma\text{-}22)$$

Επειδή όμως $\mathbf{k} = \frac{\omega}{c} n\mathbf{l}$ τότε: $k_1 = \frac{\omega}{c} n l_1$, $k_2 = \frac{\omega}{c} n l_2$, $k_3 = \frac{\omega}{c} n l_3$. Επομένως οι παράγοντες της (σχ. Γ-22) γίνονται ανάλογοι των:

$$\frac{l_1}{n^2 - n_1^2}, \frac{l_2}{n^2 - n_2^2}, \frac{l_3}{n^2 - n_3^2} \qquad (\Gamma\text{-}23)$$

Αλλά από το (Σχ. Γ-6) βλέπουμε ότι: $\mathbf{l} = l_1\mathbf{i} + l_2\mathbf{j} + l_3\mathbf{k} = \sin\theta\mathbf{i} + \cos\theta\mathbf{k}$ επειδή $l_2 = 0$. Άρα η (σχ. Γ-23) γίνεται:

$$\frac{\sin\theta}{n^2 - n_1^2}, 0, \frac{\cos\theta}{n^2 - n_3^2} \qquad (\Gamma\text{-}24)$$

Τότε για $n^2 = n_e(\theta)^2$ θα έχουμε τα συνημίτονα κατεύθυνσης του $\mathbf{E}_e$ και για $n^2 = n_o(\theta)^2$ αυτά του $\mathbf{E}_o$ όπου $n_1 = n_2 = n_o$ και $n_3 = n_e$.

Επιπλέον αναλυτικά παραδείγματα, όσον αφορά τη διάδοση του φωτός σε μονοάξονες και διάξονες κρυστάλλους, σε διευθύνσεις κατά τους κύριους άξονες x_1, x_2, x_3 καθώς και σε ενδιάμεσες διευθύνσεις πάνω στα επίπεδα x_1, x_2 x_1, x_3 x_2, x_3 δίνονται στις (Άσκ. 13,14,15 - Λυμένες).

Δ) *Επιφάνειες ταχύτητας φάσης*

Γνωρίζουμε ότι $\mathbf{k} = \frac{\omega}{c} n\mathbf{l} = \frac{\omega}{\upsilon}\mathbf{l} = \frac{\omega}{\upsilon}\frac{\upsilon\mathbf{l}}{\upsilon} = \frac{\omega}{\upsilon}\frac{\boldsymbol{\upsilon}}{\upsilon} = \frac{\omega}{\upsilon^2}\boldsymbol{\upsilon}$. Επομένως η σχέση μεταξύ των $\mathbf{k}$ και $\boldsymbol{\upsilon}$ όπου $\mathbf{k}$ το διάνυσμα της κυματοκαθέτου και $\boldsymbol{\upsilon}$ το διάνυσμα της ταχύτητας φάσης γράφεται:

$$\mathbf{k} = \frac{\omega}{\upsilon^2}\boldsymbol{\upsilon} \qquad (\Delta\text{-}1)$$

Επομένως η σχέση μεταξύ των συνιστωσών τους θα είναι:

$$k_1 = \upsilon_1 \frac{\omega}{\upsilon^2}\ ,\ k_2 = \upsilon_2 \frac{\omega}{\upsilon^2}\ ,\ k_3 = \upsilon_3 \frac{\omega}{\upsilon^2} \qquad (\Delta\text{-}2)$$

Άρα η (σχ. Γ-4) στο χώρο των $\upsilon_1, \upsilon_2, \upsilon_3$ γράφεται:

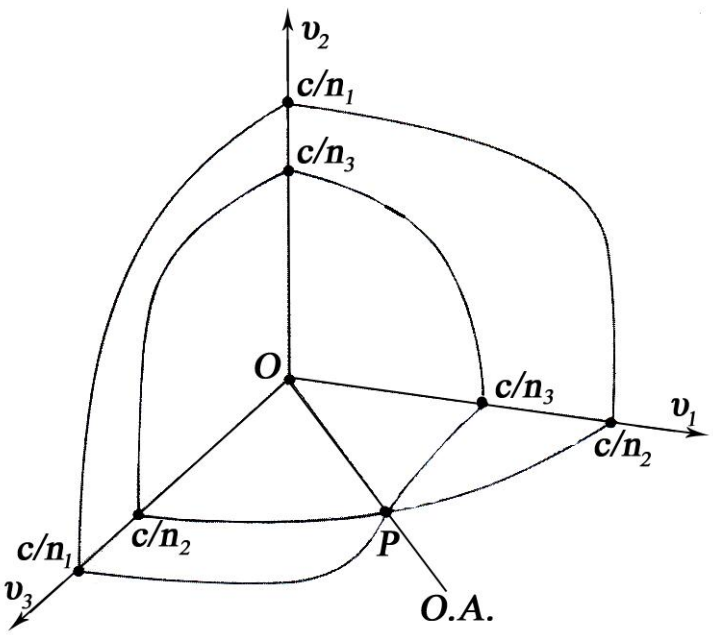
$$\begin{vmatrix} n_1^2 \frac{\upsilon^4}{c^2} - \upsilon_2^2 - \upsilon_3^2 & \upsilon_1\upsilon_2 & \upsilon_1\upsilon_3 \\ \upsilon_2\upsilon_1 & n_2^2 \frac{\upsilon^4}{c^2} - \upsilon_1^2 - \upsilon_3^2 & \upsilon_2\upsilon_3 \\ \upsilon_3\upsilon_1 & \upsilon_3\upsilon_2 & n_3^2 \frac{\upsilon^4}{c^2} - \upsilon_1^2 - \upsilon_2^2 \end{vmatrix} = 0 \qquad (\Delta\text{-}3)$$

όπου απαλείψαμε τον παράγοντα ω^2/υ^4 από όλους τους όρους επειδή είναι διάφορος του μηδενός. Η (σχ. Δ-3) παριστάνει μια επιφάνεια τριών διαστάσεων στο χώρο των ταχυτήτων φάσης $\boldsymbol{\upsilon}(\upsilon_1, \upsilon_2, \upsilon_3)$. Ονομάζεται ***επιφάνεια ταχύτητας φάσης (phase-velocity surface)*** και όπως θα δούμε στα επόμενα αποτελείται από τη σύνθεση δύο κελυφών τα οποία στη γενικότερη περίπτωση έχουν τέσσερα κοινά σημεία. Οι ευθείες που ενώνουν ανά δύο τα αντιδιαμετρικά σημεία και που διέρχονται από την αρχή του συστήματος συντεταγμένων, είναι οι γνωστοί οπτικοί άξονες του κρυστάλλου. Στο (Σχ. Δ-1) παρουσιάζεται ένα ογδοϊμόριο της σύνθετης αυτής επιφάνειας. Προκειμένου τώρα να εξετάσουμε πως αναπτύσσεται, θα δούμε τις τομές αυτών των κελυφών με ένα π.χ. από τα επίπεδα έστω το υ_1, υ_2. Για το επίπεδο όμως αυτό $\upsilon_3 = 0$ και ο υπολογισμός της ορίζουσας από τη (σχ. Δ-3) μας δίνει:

$$\left(n_3^2\frac{\upsilon^4}{c^2}-\upsilon_1^2-\upsilon_2^2\right)\left[\left(n_1^2\frac{\upsilon^4}{c^2}-\upsilon_2^2\right)\left(n_2^2\frac{\upsilon^4}{c^2}-\upsilon_1^2\right)-\upsilon_1^2\upsilon_2^2\right]=0 \qquad (\Delta\text{-}4)$$

Για να ισχύει η (σχ. Δ-4) θα πρέπει να είναι μηδέν είτε ο πρώτος είτε ο δεύτερος από τους παράγοντες του γινομένου. Ο μηδενισμός του πρώτου παράγοντα μας δίνει την εξίσωση:

$$\upsilon_1^2+\upsilon_2^2=\left(c/n_3\right)^2\ ,\quad (\upsilon^2=\upsilon_1^2+\upsilon_2^2 \quad \text{για } \upsilon_3=0) \qquad (\Delta\text{-}5)$$



(Σχ. Δ-1)

Από το μηδενισμό του δευτέρου παράγοντα θα έχουμε:

$$\frac{\upsilon_1^2}{n_2^2}+\frac{\upsilon_2^2}{n_1^2}=\frac{\upsilon^4}{c^2}\ ,\quad (\upsilon^2=\upsilon_1^2+\upsilon_2^2 \quad \text{για } \upsilon_3=0) \qquad (\Delta\text{-}6)$$

Δύο ζεύγη παρομοίων εξισώσεων μπορούμε να βρούμε και για τα επίπεδα υ_1,υ_3 και υ_2,υ_3. Επομένως διαπιστώνουμε ότι η τομή της σύνθετης επιφάνειας με καθ' ένα από τα προαναφερόμενα επίπεδα, είναι ένας κύκλος (σχ. Δ-5) και ένα τετάρτου βαθμού ***οβαλοειδές (ovaloid)*** (σχ. Δ-6).

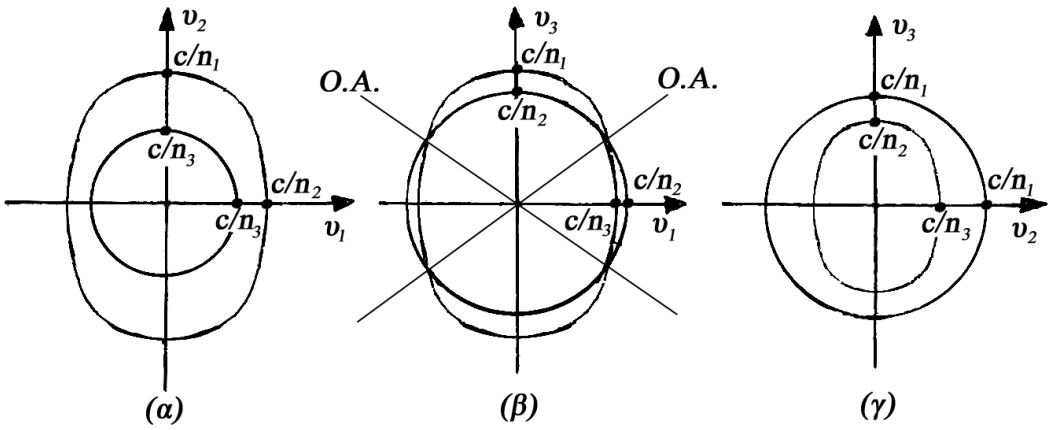
Ο κύκλος θα τέμνει τους άξονες υ_1,υ_2 στο ίδιο σημείο c/n_3. Το οβαλοειδές τέμνει τον άξονα υ_1 (για $\upsilon_2=0$) στο σημείο c/n_2 και τον υ_2 (για $\upsilon_1=0$) στο ση-

μείο c/n_1. Στο επίπεδο υ_1,υ_3 βλέπουμε ότι τα κελύφη τέμνονται σ' ένα σημείο P. Η διεύθυνση OP καθορίζει τον ένα από τους δύο οπτικούς άξονες που βρίσκονται σ' αυτό το επίπεδο. Στο (Σχ. Δ-2) δίνονται οι τομές των δύο κελυφών (σφαίρας και οβαλοειδούς) με τα επίπεδα υ_1,υ_2 υ_1,υ_3 υ_2,υ_3 και με την προϋπόθεση ότι ισχύει η σχέση $n_1 < n_2 < n_3$. Τότε οι οπτικοί άξονες θα βρίσκονται στο επίπεδο υ_1,υ_3 (Σχ. Δ-2β).

Για την περίπτωση που ο κρύσταλλος είναι μονοάξονας $\left(n_1 = n_2 = n_o\,, n_3 = n_e\right)$ τότε η (σχ. Δ-3) γίνεται:

$$\left(\frac{\upsilon_1^2+\upsilon_2^2}{n_e^2}+\frac{\upsilon_3^2}{n_o^2}-\frac{\upsilon^4}{c^2}\right)\left(\frac{\upsilon_1^2+\upsilon_2^2+\upsilon_3^2}{n_o^2}-\frac{\upsilon^4}{c^2}\right)=0 \qquad (\Delta\text{-}7)$$

Αν ο πρώτος από τους δύο όρους του γινομένου εξισωθεί με μηδέν, προκύπτει



(Σχ. Δ-2)

μια σχέση που παριστάνει ένα οβαλοειδές εκ περιστροφής περί τον άξονα υ_3. Ο δεύτερος παριστάνει μια σφαίρα. Οι δύο επιφάνειες εφάπτονται σε δύο σημεία κατά μήκος του άξονα υ_3. Δηλ. τελικά στην περίπτωση αυτή οι δύο οπτικοί άξονες εκφυλίζονται σε έναν. Από την εξίσωση του οβαλοειδούς για $\upsilon_2 = 0$ παίρνουμε την τομή του στο επίπεδο υ_1,υ_3:

$$\frac{\upsilon_1^2}{n_e^2}+\frac{\upsilon_3^2}{n_o^2}=\frac{\upsilon^4}{c^2} \quad , \quad (\upsilon^2=\upsilon_1^2+\upsilon_3^2\ ) \qquad (\Delta\text{-}8)$$

Για $\upsilon_1 = 0 \Rightarrow \upsilon_3 = c/n_o$ και $\upsilon_3 = 0 \Rightarrow \upsilon_1 = c/n_e$. Πρόκειται για τα σημεία που το ο-

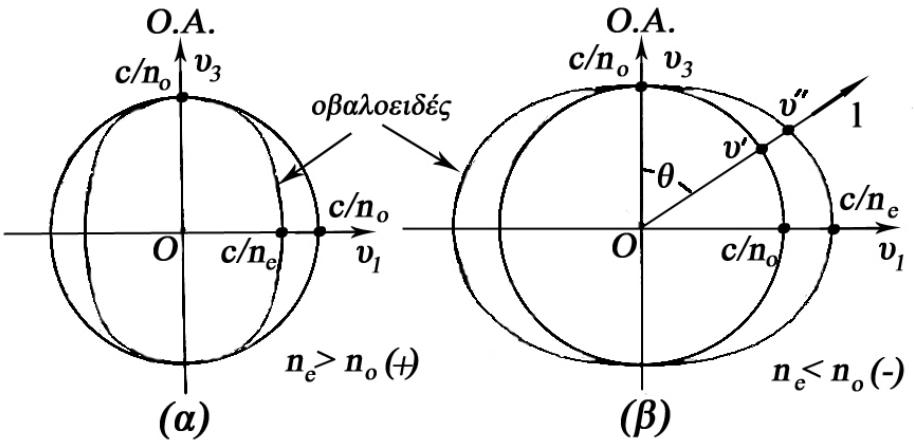
βαλοειδές τέμνει τους άξονες υ_1, υ_3. Από τον δεύτερο παράγοντα του γινομένου της (σχ. Δ-7) (εξίσωση σφαίρας) θα έχουμε:

$$\frac{\upsilon_1^2 + \upsilon_2^2 + \upsilon_3^2}{n_o^2} - \frac{\upsilon^4}{c^2} = 0 \qquad (\Delta\text{-}9)$$

όπου για $\upsilon_2 = 0$ παίρνουμε την τομή της στο επίπεδο υ_1, υ_3:

$$\frac{\upsilon_1^2 + \upsilon_3^2}{n_o^2} = \frac{\upsilon^4}{c^2} \quad , \quad (\upsilon^2 = \upsilon_1^2 + \upsilon_3^2\ ) \qquad (\Delta\text{-}10)$$

Τότε για $\upsilon_1 = 0 \Rightarrow \upsilon_3 = c/n_o$ και $\upsilon_3 = 0 \Rightarrow \upsilon_1 = c/n_o$. Δηλ. πρόκειται για τα σημεία που ο κύκλος τέμνει τους άξονες υ_1, υ_3. Επομένως κατά μήκος του άξονα υ_3 οβαλοειδές και κύκλος εφάπτονται (διεύθυνση του οπτικού άξονα). Για $n_e > n_o$ (δηλ. για θετικό κρύσταλλο), οι τομές των δύο επιφανειών στο επίπεδο υ_1, υ_3 φαίνονται στο (Σχ. Δ-3α). Για $n_e < n_o$ (δηλ. για αρνητικό κρύσταλλο), οι τομές τους φαίνονται στο (Σχ. Δ-3β).



(Σχ. Δ-3)

Στην περίπτωση που οι κύριοι δ.δ. είναι όλοι ίσοι δηλ. $n_1 = n_2 = n_3 = n$ τότε από τη (σχ. Δ-3) βρίσκουμε:

$$\upsilon_1^2 + \upsilon_2^2 + \upsilon_3^2 = n^2\upsilon^4/c^2 = (c/n)^2 \qquad (\Delta\text{-}11)$$

όπου θέσαμε $n^2\upsilon^4/c^2 = (c/n)^2$. Δηλ. τα δύο κελύφη της σύνθετης επιφάνειας εκφυλίζονται σε μια επιφάνεια σφαίρας. Ο κρύσταλλος δηλ. συμπεριφέρεται σαν οπτικά

ισότροπο υλικό.

Μια ευθεία από το κέντρο O προς τις τομές των δύο επιφανειών με το επίπεδο υ_1, υ_3 και σε γωνία θ ως προς τον άξονα υ_3 (οπτικό άξονα του κρυστάλλου), θα τις συναντά (Σχ. Δ- 3β) σε δύο σημεία. Τα σημεία αυτά αντιστοιχούν στις δύο ταχύτητες φάσης υ' και υ'' της τακτικής και της έκτακτης διαταραχής. Θα είναι $\upsilon' = \upsilon_0(\theta) = \upsilon_0$ (για κάθε τιμή της θ) και $\upsilon_o = c/n_o$. Όσον αφορά για την τιμή της υ'' θα έχουμε: $\upsilon'' = \upsilon_e(\theta)$ και $\upsilon_e(\theta) = c/n_e(\theta)$ όπου $n_e(\theta)$ θα δίνεται από τη (σχ. Γ-21). Για $\theta = 0^o$ $\upsilon' = \upsilon'' = c/n_o$ και για $\theta = 90^o$ $\upsilon' = c/n_o$, $\upsilon'' = c/n_e$.

Ε) *Επιφάνειες κύματος ή επιφάνειες ταχύτητας ακτίνας*

Το διάνυσμα Poynting

Θεωρούμε έναν πεπερασμένο όγκο V στο εσωτερικό του οποίου υποθέτουμε ότι εκτός από ύλη, υφίσταται και Η/Μ πεδίο. Τότε η συνολική ενέργεια του πεδίου ελαττώνεται: α) Επειδή έχουμε ροή ενέργειας προς το εξωτερικό της επιφάνειας που περιλαμβάνει τον προαναφερόμενο όγκο και β) Επειδή το πεδίο εκτελεί έργο στην ύλη. Αποδεικνύεται (βλ. ΠΑΡ/ΜΑ 3 (σχ. 3.1.4)) ότι σε ολοκληρωτική μορφή, μια τοπική έκφραση της προαναφερόμενης αρχής (δηλ. της αρχής της διατήρησης της ενέργειας για το Η/Μ πεδίο) εκφράζεται ως εξής:

$$-\frac{\partial}{\partial t}\iiint_V u_p dV = \iint_\Sigma \mathbf{S}\cdot\mathbf{n}d\alpha + \iiint_V \mathbf{E}\cdot\mathbf{j}dV \qquad \text{(E-1)}$$

Όπου $u_p\left(\mathrm{J/m^3}\right)$ συμβολίζει την πυκνότητα της ενέργειας του πεδίου (ενέργεια ανά μονάδα όγκου). Με $\mathbf{S}$ (διάνυσμα Poynting), $\left[S\left(\mathrm{W/m^2} = \mathrm{J/(s\cdot m^2)}\right)\right]$ παριστάνεται η ροή της ενέργειας του πεδίου από την επιφάνεια που περιβάλει τον όγκο V. $\mathbf{n}$ είναι το μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα στην επιφάνεια Σ, $d\alpha$ η στοιχειώδης επιφάνεια, $\mathbf{E}$ η ένταση του ηλ. πεδίου και $\mathbf{J},\left(J\left(\mathrm{A/m^2}\right)\right)$ η πυκνότητα των ρευμάτων στο εσωτερικό της ύλης. Η αντίστοιχη διαφορική έκφραση της (σχ. Ε-1) είναι:

$$-\frac{\partial u}{\partial t} = \nabla\mathbf{S} + \mathbf{E}\cdot\mathbf{J} \qquad \text{(E-2)}$$

Παρά το ότι τα μεγέθη $u_p, \mathbf{S}$ δεν μπορούν να εκφραστούν μονοσήμαντα συναρτήσει των $\mathbf{E}, \mathbf{D}, \mathbf{B}, \mathbf{H}$ εντούτοις με τη βοήθεια των εξισώσεων Maxwell και του διαφορικού διανυσματικού λογισμού ο Poynting το 1884 κατόρθωσε να αποδείξει ότι για δυναμικά Η/Μ πεδία οι εκφράσεις των u_p και $\mathbf{S}$ στην ύλη είναι η εξής:

$$u_p = \frac{\varepsilon_0 k_e}{2}\mathbf{E}\cdot\mathbf{E} + \frac{\varepsilon_0 c^2}{2k_m}\mathbf{B}\cdot\mathbf{B} = \frac{\mathbf{D}\cdot\mathbf{E}}{2} + \frac{\mathbf{B}\cdot\mathbf{H}}{2} \qquad \text{(E-3)}$$

$$\mathbf{S} = \frac{\varepsilon_0 c^2}{k_m}\mathbf{E}\times\mathbf{B} = \frac{\varepsilon_0\mu_0 c^2 k_m \mathbf{E}\times\mathbf{H}}{k_m} = \mathbf{E}\times\mathbf{H} \qquad \text{(E-4)}$$

όπου $\mathbf{B} = \mu_0 k_m \mathbf{H}$ και $\mathbf{D} = \varepsilon_0 k_e \mathbf{E}$. Οι δύο όροι της (σχ. Ε-3) αφορούν τις πυκνότητες ενέργειας του ηλεκτρικού και του μαγνητικού πεδίου.

Το διάνυσμα Poynting και η ταχύτητα ακτίνας

Γνωρίζουμε ότι το διάνυσμα της κυματοκαθέτου $\mathbf{k}$ καθορίζει τη διεύθυνση διάδοσης των επιφανειών σταθερής φάσης (ισοφασικών επιφανειών) των επιπέδων μετώπων κύματος στο εσωτερικό των κρυστάλλων. Η διεύθυνση όμως ροής της ενέργειας, είναι αυτή του διανύσματος Poynting. Δηλαδή του $\mathbf{S}$. Τα $\mathbf{S}$ και $\mathbf{k}$ (ή τα αντίστοιχα μοναδιαία τους $\mathbf{l} = \mathbf{k}/|\mathbf{k}| = \mathbf{k}/k$ $(k = \omega/\upsilon)$, $\mathbf{s} = \mathbf{S}/|\mathbf{S}|$), στη γενικότερη περίπτωση μεταξύ τους σχηματίζουν μια γωνία. Από όσα έχουμε αναφέρει ως εδώ, είμαστε σε θέση να κατασκευάσουμε το διάγραμμα των σχετικών διευθύνσεων μεταξύ των διανυσμάτων $\mathbf{E}, \mathbf{D}, \mathbf{B}, \mathbf{H}, \mathbf{l}, \mathbf{s}$ για την περίπτωση διάδοσης στον κρύσταλλο ενός επιπέδου μετώπου κύματος (Σχ. Ε-1). Κατ' αρχή από τη (σχ. Α-26) συμπεραίνουμε ότι $\mathbf{D} \perp \mathbf{l}$ επειδή:

$$\mathbf{l} \cdot \mathbf{D} = 0 \tag{E-5}$$

Επίσης από τη διαφ. εξίσωση του Maxwell:

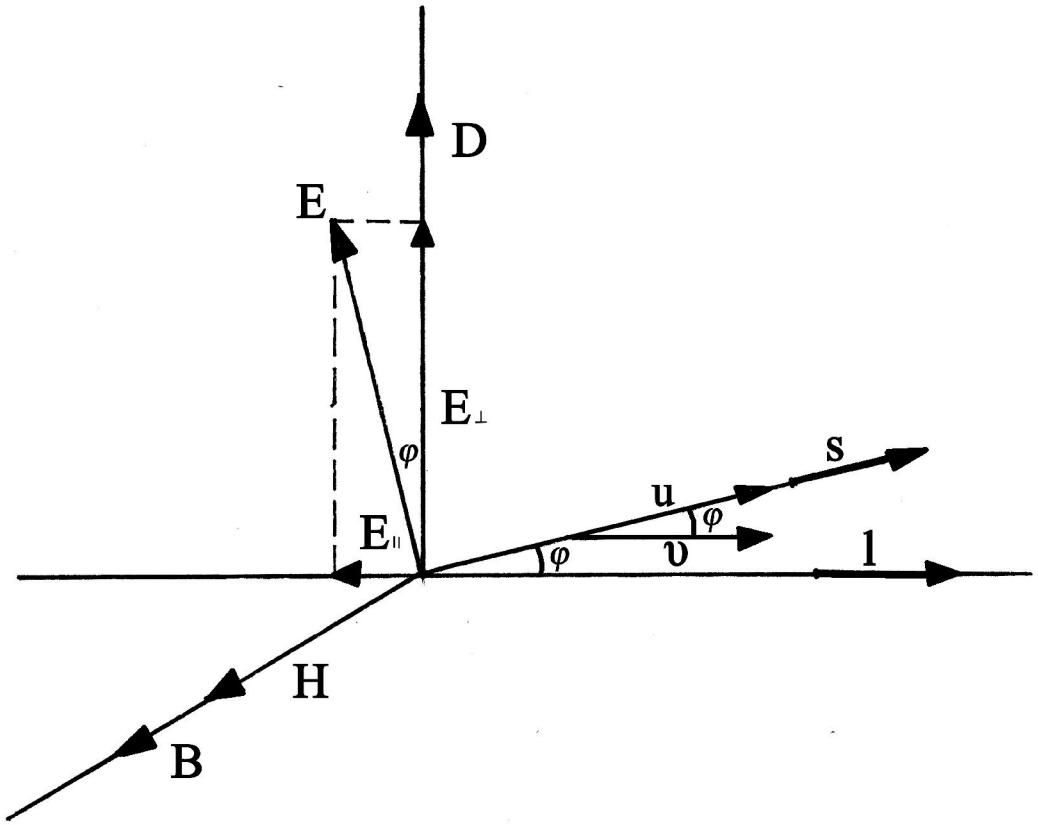
$\nabla \times \tilde{\mathbf{H}} = \partial \tilde{\mathbf{D}} / \partial t \ (\mathbf{J} = 0)$ για $\tilde{\mathbf{H}} = \mathbf{H} e^{i(\omega t - \mathbf{k}\cdot\mathbf{r})}$ και $\tilde{\mathbf{D}} = \mathbf{D} e^{i(\omega t - \mathbf{k}\cdot\mathbf{r})}$ θα έχουμε:

$$\nabla \times \tilde{\mathbf{H}} = \begin{pmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x_1} & \dfrac{\partial}{\partial x_2} & \dfrac{\partial}{\partial x_3} \\ \tilde{H}_1 & \tilde{H}_2 & \tilde{H}_3 \end{pmatrix} \quad \text{όπου:} \quad \begin{aligned} \tilde{H}_1 &= H_1 e^{i(\omega t - \mathbf{k}\cdot\mathbf{r})} \\ \tilde{H}_2 &= H_2 e^{i(\omega t - \mathbf{k}\cdot\mathbf{r})} \\ \tilde{H}_3 &= H_3 e^{i(\omega t - \mathbf{k}\cdot\mathbf{r})} \end{aligned} \tag{E-6}$$

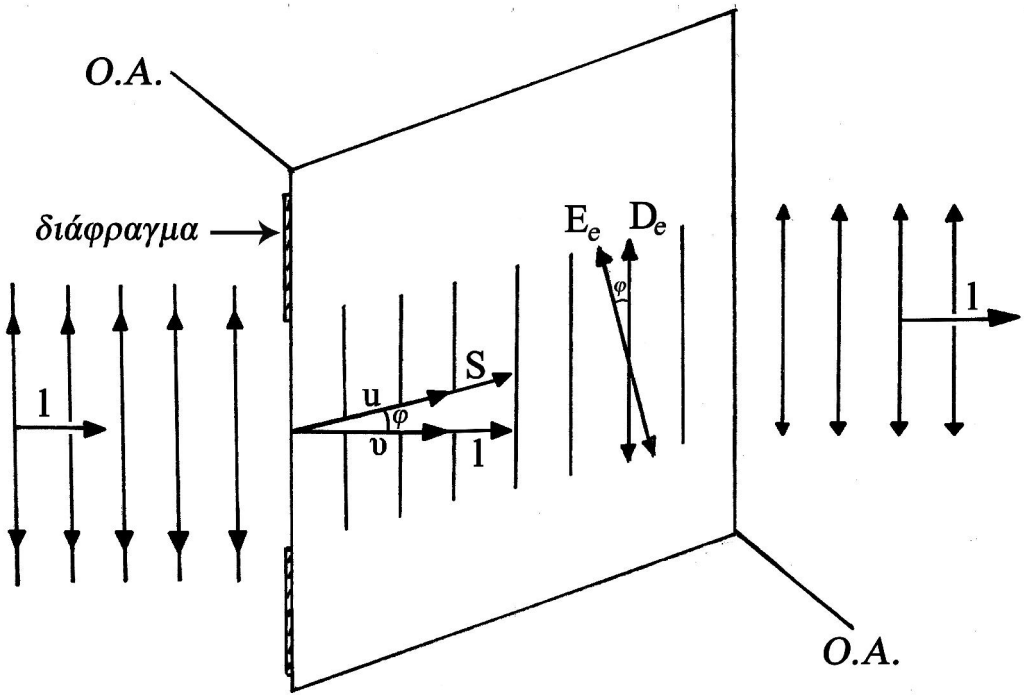
$$\nabla \times \tilde{\mathbf{H}} = \left(\frac{\partial \tilde{H}_3}{\partial x_2} - \frac{\partial \tilde{H}_2}{\partial x_3} \right) \mathbf{i} + \left(\frac{\partial \tilde{H}_1}{\partial x_3} - \frac{\partial \tilde{H}_3}{\partial x_1} \right) \mathbf{j} + \left(\frac{\partial \tilde{H}_2}{\partial x_1} - \frac{\partial \tilde{H}_1}{\partial x_2} \right) \mathbf{k}$$

Επειδή: $\dfrac{\partial \tilde{H}_3}{\partial x_2} = -ik_2 H_3 e^{i(\omega t - \mathbf{k}\cdot\mathbf{r})}$, $\dfrac{\partial \tilde{H}_2}{\partial x_3} = -ik_3 H_2 e^{i(\omega t - \mathbf{k}\cdot\mathbf{r})}$, κ.λ.π. τελικά:

$$\begin{aligned} \nabla \times \tilde{\mathbf{H}} &= \left[-i\left(k_2 H_3 - k_3 H_2\right)\mathbf{i} - i\left(k_3 H_1 - k_1 H_3\right)\mathbf{j} - i\left(k_1 H_2 - k_2 H_1\right)\mathbf{k} \right] e^{i(\omega t - \mathbf{k}\cdot\mathbf{r})} \\ &= -i\left(\mathbf{k} \times \mathbf{E}\right) e^{i(\omega t - \mathbf{k}\cdot\mathbf{r})} \end{aligned}$$



(Σχ. Ε-1α)



(Σχ. Ε-1β)

Επομένως: $$\nabla \times \tilde{\mathbf{H}} = -i\left(\mathbf{k} \times \mathbf{H}\right) e^{i(\omega t - \mathbf{k}\cdot\mathbf{r})} \qquad \text{(E-7)}$$

Επίσης επειδή $\tilde{\mathbf{D}} = \mathbf{D} e^{i(\omega t - \mathbf{k}\cdot\mathbf{r})}$ θα έχουμε:

$$\frac{\partial \tilde{\mathbf{D}}}{\partial t} = i\omega \mathbf{D} e^{i(\omega t - \mathbf{k}\cdot\mathbf{r})} \qquad \text{(E-8)}$$

Οπότε από τις (σχ. Ε-7,Ε-8) επειδή $\nabla \times \tilde{\mathbf{H}} = \partial \tilde{\mathbf{D}} / \partial t \ \left(\mathbf{J} = 0\right)$ βρίσκουμε:

$\mathbf{k} \times \mathbf{H} = -\omega \mathbf{D}$ και επειδή $\mathbf{k} = \frac{\omega}{c} n \mathbf{l}$ τελικά:

$$\mathbf{D} = -\frac{n}{c} \mathbf{l} \times \mathbf{H} \qquad \text{(E-9)}$$

Δηλ. το διάνυσμα $\mathbf{H}$ είναι κάθετο στα $\mathbf{D}, \mathbf{l}$ και τα τρία μαζί μπορεί ν' αποτελέσουν ένα τρισορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων.

Επειδή επίσης θεωρήσαμε ότι τα υλικά μας είναι μαγνητικά ισόπτροπα, τότε τα $\mathbf{B}, \mathbf{H}$ που συνδέονται με τη σχέση:

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H} \qquad \text{(E-10)}$$

είναι συγγραμμικά. Δεν συμβαίνει όμως το ίδιο μεταξύ των $\mathbf{D}, \mathbf{E}$ επειδή τα τελευταία για ανισότροπα διηλεκτρικά, κατά τα γνωστά, συνδέονται με τις (σχ. Α-2) ή στην καλύτερη των περιπτώσεων όταν αναφέρονται στο σύστημα συντεταγμένων των κυρίων αξόνων x_1, x_2, x_3, με τις (σχ. Α-6). Θ' αποδείξουμε στα επόμενα ότι τα $\mathbf{D}, \mathbf{E}$ σχηματίζουν γωνία μεταξύ τους και ότι τα $\mathbf{D}, \mathbf{E}, \mathbf{l}$ βρίσκονται στο ίδιο επίπεδο.

Θα πρέπει ν' αποδείξουμε κατ' αρχή ότι ισχύει η σχέση:

$$\mathbf{H} = \frac{n}{\mu c} \mathbf{l} \times \mathbf{E} \qquad \text{(E-11)}$$

Η τελευταία προκύπτει από τη διαφορική εξίσωση του Maxwell (σχ. Α-13) $\nabla \times \tilde{\mathbf{E}} = -\frac{\partial \tilde{\mathbf{B}}}{\partial t} = -\mu \frac{\partial \tilde{\mathbf{H}}}{\partial t}$, αν αντικαταστήσουμε κατά τα γνωστά: $\tilde{\mathbf{E}} = \mathbf{E} e^{i(\omega t - \mathbf{k}\cdot\mathbf{r})}$ και $\tilde{\mathbf{H}} = \mathbf{H} e^{i(\omega t - \mathbf{k}\cdot\mathbf{r})}$, με $\tilde{E}_1 = E_1 e^{i(\omega t - \mathbf{k}\cdot\mathbf{r})}$ κλπ , $\tilde{H}_1 = H_1 e^{i(\omega t - \mathbf{k}\cdot\mathbf{r})}$ κλπ. , όπου E_1, E_2, E_3 οι συνιστώσες του $\mathbf{E}$ και H_1, H_2, H_3 αυτές του $\mathbf{H}$. Από τη (σχ. Ε-11) συμπεραίνουμε ότι το $\mathbf{E}$ είναι κάθετο στο $\mathbf{H}$.

Αντικαθιστούμε το $\mathbf{H}$ από τη (σχ. Ε-11) στη (σχ. Ε-9) οπότε θα έχουμε:
$\mathbf{D} = -\frac{n^2}{\mu c^2}\mathbf{l}\times(\mathbf{l}\times\mathbf{E})$.
Και επειδή: $\mathbf{l}\times(\mathbf{l}\times\mathbf{E}) = \mathbf{l}(\mathbf{l}\cdot\mathbf{E}) - \mathbf{E}(\mathbf{l}\cdot\mathbf{l}) = \mathbf{l}(\mathbf{l}\cdot\mathbf{E}) - \mathbf{E}$ βρίσκουμε:

$$\mathbf{D} = \frac{n^2}{\mu c^2}\left[\mathbf{E} - \mathbf{l}(\mathbf{l}\cdot\mathbf{E})\right] \qquad \text{(E-12)}$$

Αν υποθέσουμε ότι $\mathbf{E} = \mathbf{E}_\perp + \mathbf{E}_\parallel$ (βλ. Σχ. Ε-1α), όπου η καθετότητα και η παραλληλότητα των συνιστωσών του $\mathbf{E}$ αναφέρονται στις διευθύνσεις των $\mathbf{D}$ και $\mathbf{l}$, τότε: $(\mathbf{l}\cdot\mathbf{E})\mathbf{l} = E_\parallel\mathbf{l} = \mathbf{E}_\parallel$. Επομένως $\mathbf{E} - \mathbf{l}(\mathbf{l}\cdot\mathbf{E}) = \mathbf{E}_\perp$ οπότε η (σχ. Ε-12) γίνεται:

$$\mathbf{D} = \frac{n^2}{\mu c^2}\mathbf{E}_\perp \qquad \text{(E-13)}$$

και επομένως επειδή τα $\mathbf{E}, \mathbf{E}_\parallel, \mathbf{E}_\perp, \mathbf{l}$ είναι συνεπίπεδα και ισχύει η (Ε-13) (δηλ. τα $\mathbf{D}$ και $\mathbf{E}_\perp$ είναι συγγραμμικά), τότε τα $\mathbf{D}, \mathbf{E}, \mathbf{l}$ βρίσκονται στο ίδιο επίπεδο. Επομένως τα $\mathbf{D}$ και $\mathbf{E}$ σχηματίζουν μεταξύ τους γωνία. Επειδή τέλος από τη (σχ. Ε-4) $\mathbf{S} = \mathbf{E}\times\mathbf{H}$ και το $\mathbf{E}$ είναι κάθετο στο $\mathbf{H}$ και το διάνυσμα $\mathbf{S}$ θα είναι κάθετο στο $\mathbf{H}$ καθώς και το $\mathbf{E}$ στο $\mathbf{S}$.

Θα θεωρήσουμε τώρα ένα επίπεδο μέτωπο κύματος να διαδίδεται στο εσωτερικό ενός κρυστάλλου. Τότε τα επίπεδα σταθερής φάσης θα είναι κάθετα στο $\mathbf{l}$, αλλά θα διαδίδονται κατά μήκος του $\mathbf{s} = \mathbf{S}/|\mathbf{S}|$ που είναι το μοναδιαίο διάνυσμα κατά μήκος του διανύσματος Poynting. Είναι η λεγόμενη ***διεύθυνση της ακτίνας***. Στο (Σχ. Ε-1β) γίνεται άμεσα εμφανής η διαδικασία αυτή για την περίπτωση ενός κρυστάλλου Ασβεστίτη στη σχισμογενή του μορφή, όπου κάθετα σε μια έδρα του κατά μήκος της κύριας τομής του προσπίπτει εξωτερικά ένα μονοχρωματικό επίπεδο μέτωπο κύματος. Το τελευταίο είναι γραμμικά πολωμένο παράλληλα στο επίπεδο που βρίσκεται ο οπτικός του άξονας. Σε επαφή με την επιφάνεια πρόσπτωσης του κρυστάλλου, είναι τοποθετημένο ένα διάφραγμα που περιλαμβάνει ένα ευμέγεθες (έστω κυκλικό) άνοιγμα (π.χ. διαμέτρου $1-2\text{cm}$). Για την περίπτωση αυτή – όπως αποδεικνύεται (βλ. Άσκ.16-Λυμένη) – λόγω του τρόπου δόνησης του κρυστάλλου, διαδίδεται στο εσωτερικό του μόνο η έκτακτη διαταραχή (ιδιοκατάσταση $\mathbf{D}_e$). Στο σχήμα γίνεται εμφανής η κάμψη προς τα επάνω (του αρχικά προσπίπτοντος μετώπου κύματος) προς τη διεύθυνση διάδοσης της ενέργειας (διάνυσμα Poynting $\mathbf{S}$) στο εσωτερικό του κρυστάλλου, παρά το ότι διατηρεί την επιπεδότητά του προς τη διεύθυνση της κυματοκαθέτου $\mathbf{k}$ (με μοναδιαίο το διάνυσμα $\mathbf{l}$).

Έστω τώρα ότι ϕ είναι η γωνία μεταξύ $\mathbf{l}$ και $\mathbf{s}$. Τότε οι επιφάνειες σταθερής φάσης κινούνται κατά μήκος της ακτίνας (της $\mathbf{s}$) με μια ταχύτητα $\mathbf{u}$ που ονομάζεται ***ταχύτητα ακτίνας(ray velocity)***. Η ταχύτητα όμως διάδοσης κατά τη διεύθυνση της κυματικαθέτου, είναι αυτή της ***ταχύτητας φάσης(phase velocity***) η οποία κατά τα γνωστά συμβολίζεται με $\boldsymbol{\upsilon}$. Άρα μεταξύ των u και υ (όπως αποδεικνύεται στα επόμενα) θα υφίσταται η σχέση:

$$u = \upsilon / \cos\phi \tag{E-14}$$

Επομένως η ταχύτητα ακτίνας u θα είναι μεγαλύτερη της ταχύτητας φάσης υ, εκτός από την περίπτωση για την οποία $\phi = 0^o$. Το τελευταίο συμβαίνει για διάδοση του φωτός κατά μήκος των κυρίων αξόνων του κρυστάλλου όπου τα $\mathbf{l}$ και $\mathbf{s}$ είναι παράλληλα. Ένας πλέον ακριβής ορισμός του μέτρου της ταχύτητας ακτίνας δίνεται στο επόμενο (Παράδειγμα 1).

Επιφάνειες ταχύτητας ακτίνας

Πρόκειται για τις επιφάνειες που μας δίνουν τις τιμές των ταχυτήτων ακτίνας για οποιαδήποτε διεύθυνση της τελευταίας, που είναι κατά τα γνωστά και η διεύθυνση διάδοσης της ενέργειας. Θα πρέπει λοιπόν κατά κάποιο τρόπο – για τη μελέτη αυτού του προβλήματος –, να δούμε ποια είναι η μορφή αυτών των επιφανειών στο χώρο των ταχυτήτων ακτίνας δηλ. στο σύστημα συντεταγμένων u_1, u_2, u_3. Στην περίπτωση αυτή, μας είναι πολύ χρήσιμη η εφαρμογή του ***κανόνα της δυαδικότητας(rule of duality)*** ο οποίος εκφράζεται γενικά ως εξής:

Υποθέτουμε ότι τα παρακάτω μεγέθη διευθετούνται σε δύο γραμμές με τον ακόλουθο τρόπο:

$$\left.\begin{array}{ccccccccccccccc} \mathbf{E} & \mathbf{D} & \mathbf{l} & \mathbf{s} & c & \mu & \upsilon & n & \varepsilon_1 & \varepsilon_2 & \varepsilon_3 & \upsilon_1 & \upsilon_2 & \upsilon_3 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ \mathbf{D} & \mathbf{E} & -\mathbf{s} & -\mathbf{l} & 1/c & 1/\mu & 1/u & 1/n_r & 1/\varepsilon_1 & 1/\varepsilon_2 & 1/\varepsilon_3 & 1/\upsilon_1 & 1/\upsilon_2 & 1/\upsilon_3 \end{array}\right\} \tag{E-15}$$

Τότε: ***'Αν τα μεγέθη μιας οποιασδήποτε σχέσης που απαρτίζεται από όρους της πρώτης γραμμής αντικατασταθούν με τις αντίστοιχες της δεύτερης γραμμής, τότε θα προκύψει μια νέα έγκυρη σχέση '***.

Θα εφαρμόσουμε τον κανόνα αυτό στη (σχ. Γ-2):

$$\mathbf{k}\left(\mathbf{k}\cdot\mathbf{E}\right) + \left(\omega^2\mu\varepsilon - k^2\right)\mathbf{E} = 0 \tag{E-16}$$

η οποία με την αντικατάσταση: $\mathbf{k} = k\mathbf{l} = (\omega/\upsilon)\mathbf{l}$ και τον μετασχηματισμό δίνει:

$$\begin{array}{lll} \mathbf{l} & (\mathbf{l}\cdot\mathbf{E}) + (\upsilon^2\,\mu\,\varepsilon - 1)\mathbf{E} = 0 & (1) \\ \downarrow & \downarrow\downarrow\downarrow \quad \downarrow\downarrow\downarrow \quad \downarrow & \downarrow \\ & -\mathbf{s}\,(-\mathbf{s}\cdot\mathbf{D}) + \left(\dfrac{1}{u^2}\dfrac{1}{\mu}\dfrac{1}{\varepsilon} - 1\right)\mathbf{D} = 0 & (2) \end{array}$$

$$u^2\mathbf{s}(\mathbf{s}\cdot\mathbf{D}) + \left(\frac{\varepsilon_0 c^2}{\varepsilon} - u^2\right)\mathbf{D} = 0 \qquad \left(\mu \simeq \mu_0\ ,\ \varepsilon_0\mu_0 c^2 = 1\right) \tag{E-17}$$

ή επειδή $u\mathbf{s} = \mathbf{u}$ η τελευταία γίνεται:

$$\mathbf{u}(\mathbf{u}\cdot\mathbf{D}) + \left(\frac{\varepsilon_0 c^2}{\varepsilon} - u^2\right)\mathbf{D} = 0 \tag{E-18}$$

όπου $u^2 = u_1^2 + u_2^2 + u_3^2$ και $\mathbf{s}$ κατά τα γνωστά το μοναδιαίο διάνυσμα κατά μήκος της διεύθυνσης της ακτίνας. Η (σχ. Ε-18) εκφρασμένη στο σύστημα συντεταγμένων των κυρίων αξόνων για το οποίο ισχύουν οι (σχ. Α-6) αναλύεται στις παρακάτω τρεις εξισώσεις:

$$\left.\begin{array}{l} u_1(\mathbf{u}\cdot\mathbf{D}) + \left(\dfrac{\varepsilon_0 c^2}{\varepsilon_1} - u^2\right)D_1 = 0 \\ u_2(\mathbf{u}\cdot\mathbf{D}) + \left(\dfrac{\varepsilon_0 c^2}{\varepsilon_2} - u^2\right)D_2 = 0 \\ u_3(\mathbf{u}\cdot\mathbf{D}) + \left(\dfrac{\varepsilon_0 c^2}{\varepsilon_3} - u^2\right)D_3 = 0 \end{array}\right\} \tag{E-19}$$

όπου για τη συνιστώσα D_i θα ισχύει: $\varepsilon = \varepsilon_i$ με $i = 1,2,3$.

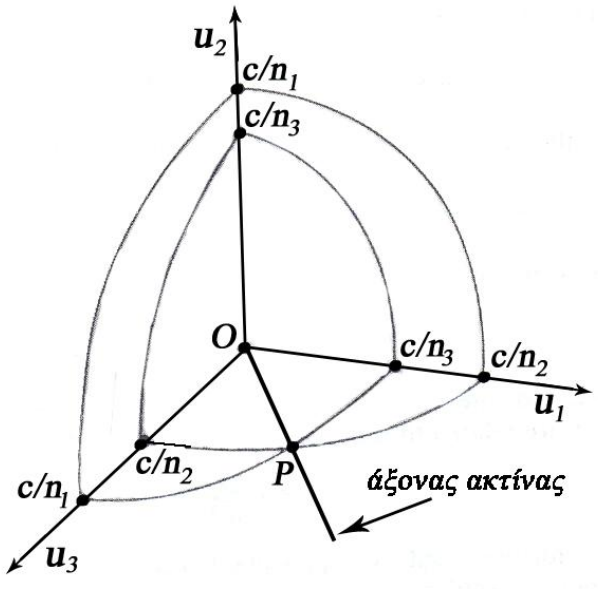
Και επειδή: $\varepsilon_1 = \varepsilon_0 n_1^2$, $\varepsilon_2 = \varepsilon_0 n_2^2$, $\varepsilon_3 = \varepsilon_0 n_3^2$, $u^2 = u_1^2 + u_2^2 + u_3^2$ και $\mathbf{u}\cdot\mathbf{D} = u_1 D_1 + u_2 D_2 + u_3 D_3$ η (σχ. Ε-19) γίνεται:

$$\begin{pmatrix} \dfrac{c^2}{n_1^2} - u_2^2 - u_3^2 & u_1 u_2 & u_1 u_3 \\ u_2 u_1 & \dfrac{c^2}{n_2^2} - u_1^2 - u_3^2 & u_2 u_3 \\ u_3 u_1 & u_3 u_2 & \dfrac{c^2}{n_3^2} - u_1^2 - u_2^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{pmatrix} = 0 \tag{E-20}$$

Προκειμένου τώρα το ομογενές σύστημα των τριών εξισώσεων ως προς D_1, D_2, D_3 να έχει λύση μη τετριμμένη θα πρέπει να ισχύει:

$$\begin{vmatrix} \frac{c^2}{n_1^2} - u_2^2 - u_3^2 & u_1 u_2 & u_1 u_3 \\ u_2 u_1 & \frac{c^2}{n_2^2} - u_1^2 - u_3^2 & u_2 u_3 \\ u_3 u_1 & u_3 u_2 & \frac{c^2}{n_3^2} - u_1^2 - u_2^2 \end{vmatrix} = 0 \qquad \text{(E-21)}$$

Η (σχ. Ε-21) παριστάνει μια επιφάνεια τριών διαστάσεων στο χώρο των u_1, u_2, u_3. Την ονομάζουμε ***επιφάνεια κύματος ή επιφάνεια ταχύτητας ακτίνας(ray-velocity surface)***. Όπως μπορούμε να διαπιστώσουμε αποτελείται από δύο κελύφη τα οποία στη γενικότερη περίπτωση έχουν τέσσερα κοινά σημεία. Οι δύο όμως διευθύνσεις που ορίζουν – ανά δύο αντιδιαμετρικά – αυτά τα σημεία, δεν είναι οι οπτικοί άξονες του κρυστάλλου αλλά ονομάζονται ***άξονες ακτίνας (ray axes)***.



(Σχ. Ε-2)

Στο (Σχ. Ε-2) παρουσιάζεται ένα ογδοϊμόριο της σύνθετης αυτής επιφάνειας. Προκειμένου να κατανοήσουμε τη δομή της, θα πάρουμε τις τομές των δύο κελυφών με ένα εκάστοτε από τα επίπεδα που περιλαμβάνουν ανά δύο τους άξονες u_1, u_2, u_3. Έστω επιλέγουμε το επίπεδο u_1, u_2. Για το συγκεκριμένο θα έχουμε: $u_3 = 0$. Και επομένως η (σχ. Ε-21) γίνεται:

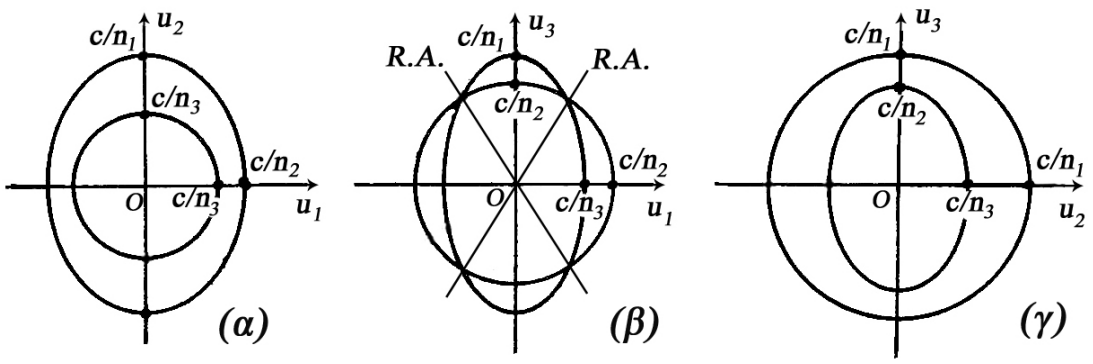
$$\left(\frac{c^2}{n_3^2}-u_1^2-u_2^2\right)\left[\left(\frac{c^2}{n_1^2}-u_2^2\right)\left(\frac{c^2}{n_2^2}-u_1^2\right)-u_1^2u_2^2\right]=0 \qquad \text{(E-22)}$$

Άρα οι τομές των δύο επιφανειών στο επίπεδο u_1,u_2 θα αποτελούνται από τον κύκλο:

$$u_1^2+u_2^2=\left(\frac{c}{n_3}\right)^2 \qquad \text{(E-23)}$$

και την έλλειψη: $$\frac{u_1^2}{\left(\frac{c}{n_2}\right)^2}+\frac{u_2^2}{\left(\frac{c}{n_1}\right)^2}=1 \qquad \text{(E-24)}$$

Δύο ζεύγη παρομοίων εξισώσεων μπορούμε να βρούμε και για τα επίπεδα u_1,u_3 u_2,u_3. Ο κύκλος θα τέμνει τους άξονες u_1,u_2 στα σημεία c/n_3 και παρομοίως c/n_3. Επίσης η έλλειψη τέμνει τον άξονα u_1 στο σημείο c/n_2 και τον u_2 στο c/n_1, όπως φαίνεται στο (Σχ. Ε-3α). Επομένως γίνεται εμφανές ότι η επιφάνεια ταχύτητας ακτίνας συνίσταται από δύο κελύφη. Τα τελευταία μας αναδεικνύουν τις δύο δυνατές τιμές της ταχύτητας ακτίνας $u(u',u'')$ για κάθε διεύθυνσή από το O προς τη σύνθετη επιφάνεια. Στη γενικότερη περίπτωση που $n_1 \neq n_2 \neq n_3$, τα δύο κελύφη



(Σχ. Ε-3)

τέμνονται σε τέσσερα σημεία Q (ανά δύο αντιδιαμετρικά ως προς το O) και βρίσκονται σ' ένα από τα τρία επίπεδα που ορίζουν οι άξονες u_1,u_2,u_3. Είναι οι προαναφερόμενοι άξονες ακτίνας και στη γενικότερη περίπτωση δεν ταυτίζονται με τους οπτικούς άξονες του κρυστάλλου. Κατά τη διεύθυνση των αξόνων ακτίνας, είναι προφανές ότι οι δύο ταχύτητες ακτίνας u',u'' των (δύο) διαδιδόμενων διαταραχών

είναι ίδιες. Στο (Σχ. Ε-3) δίνονται οι τομές των δύο κελυφών με τα επίπεδα u_1, u_2 u_1, u_3 και u_2, u_3 με την προϋπόθεση ότι $n_1 < n_2 < n_3$. Στο (Σχ. Ε-3β) σχεδιάζονται οι διευθύνσεις των δύο αξόνων ακτίνας.

Στην ειδικότερη περίπτωση που οι κρύσταλλοι είναι μονοάξονες τότε: $n_1 = n_2 = n_o$ και $n_3 = n_e$. Επομένως η (σχ. Ε-21) θα πάρει τη μορφή:

$$\left[n_e^2\left(u_1^2+u_2^2\right)+n_o^2u_3^2-c^2\right]\left[n_o^2\left(u_1^2+u_2^2+u_3^2\right)-c^2\right]=0 \qquad \text{(E-25)}$$

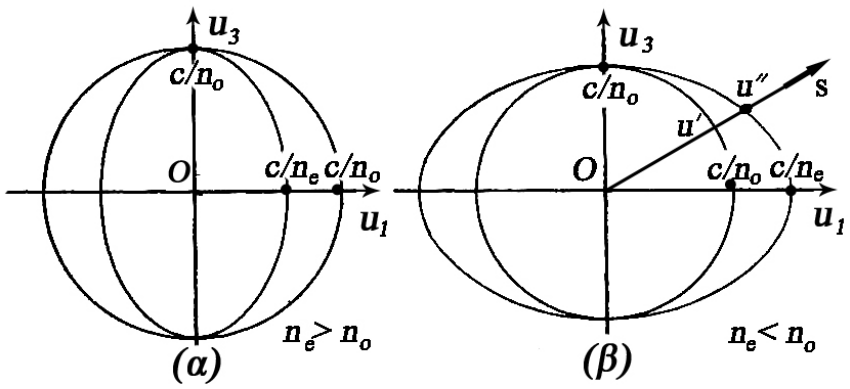
Από τον μηδενισμό του πρώτου παράγοντα της προηγούμενης σχέσης παίρνουμε:

$$\frac{u_1^2+u_2^2}{\left(\frac{c}{n_e}\right)^2}+\frac{u_3^2}{\left(\frac{c}{n_o}\right)^2}=1 \qquad \text{(E-26)}$$

Πρόκειται για ένα ελλειψοειδές εκ περιστροφής περί τον άξονα u_3. Ο δεύτερος όρος μας δίνει:

$$\frac{u_1^2+u_2^2+u_3^2}{\left(\frac{c}{n_o}\right)^2}=1 \qquad \text{(E-27)}$$

και είναι μια σφαίρα με ακτίνα c/n_o. Οι δύο επιφάνειες εφάπτονται σε δύο σημεία οπότε οι άξονες ακτίνας εκφυλίζονται σε ένα. Στο (Σχ. Ε-4) φαίνεται η τομή των



(Σχ. Ε-4)

δύο επιφανειών με το επίπεδο u_1, u_3 δηλ. για $u_2 = 0$, για θετικό (+) (Σχ. Ε-4α) και αρνητικό (-) (Σχ. Ε-4β) κρύσταλλο. Για τους μονοάξονες κρυστάλλους επειδή κατά

μήκος του άξονα u_3: $u = c/n_o = \upsilon$ για τις δύο διαδιδόμενες διαταραχές, η ταχύτητα ακτίνας είναι ίση με την ταχύτητα φάσης. Τότε ο u_3 θα είναι ταυτόχρονα και ο οπτικός άξονας του κρυστάλλου. Επίσης κατά μήκος του u_1: $u_e = \upsilon_e = c/n_e$ όπως επίσης και $u_o = \upsilon_o = c/n_o$. Για μια τυχαία διεύθυνση της ακτίνας διάδοσης, θα έχουμε σαν αποτέλεσμα την τομή της σύνθετης επιφάνειας της (σχ. Ε-21) σε δύο σημεία u', u''. Πρόκειται για τις ταχύτητες ακτίνας στη διεύθυνση αυτή, οι οποίες όμως δεν συμπίπτουν με τις αντίστοιχες ταχύτητες φάσης υ', υ''. Οι u', u'' είναι λύσεις της εξίσωσης:

$$\frac{s_1^2}{\frac{1}{u^2} - \frac{1}{\upsilon_1^2}} + \frac{s_2^2}{\frac{1}{u^2} - \frac{1}{\upsilon_2^2}} + \frac{s_3^2}{\frac{1}{u^2} - \frac{1}{\upsilon_3^2}} = 0 \qquad \text{(E-28)}$$

όπου s_1, s_2, s_3 είναι τα συνημίτονα κατεύθυνσης του $\mathbf{s}$, δηλ. του μοναδιαίου διανύσματος κατά μήκος της διάδοσης της ενέργειας (διεύθυνση ακτίνας) των δύο διαδιδόμενων μετώπων κύματος στον κρύσταλλο. Η εξίσωση αυτή – η οποία παρομοίως ονομάζεται εξίσωση Fresnel – προκύπτει από την αντίστοιχή της (σχ. Α-30) μέσω του κανόνα της δυαδικότητας εφαρμόζοντας τις (σχ. Ε-15). Όπου $\upsilon_1, \upsilon_2, \upsilon_3$ οι κύριες ταχύτητες φάσης όπως αυτές δίνονται από τις (σχ. Α-29) και για μονοάξονες κρυστάλλους $\upsilon_1 = c/n_o$, $\upsilon_2 = c/n_o$, $\upsilon_3 = c/n_e$. Επειδή η (σχ. Ε-28) είναι μια διτετράγωνη εξίσωση, σαν λύσεις θα μας δώσει: $u^2 = u'^2$ και $u^2 = u''^2$.

Τελευταία έχουμε την περίπτωση που οι κύριοι δ.δ. είναι όλοι ίσοι μεταξύ τους δηλ. $n_1 = n_2 = n_3 = n$. Τότε από τη (σχ. Ε-21) βρίσκουμε:

$$u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 = \left(\frac{c}{n}\right)^2 \qquad \text{(E-29)}$$

και η επιφάνεια με τα δύο κελύφη εκφυλίζεται σε μια σφαίρα με ακτίνα c/n. Θα είναι δηλ. $u = c/n = \upsilon$ για κάθε διεύθυνση διάδοσης και αφορά ένα ισότροπο υλικό.

Παράδειγμα 1 *

Κατά κανόνα όταν μελετούμε τη διάδοση ενός επιπέδου μετώπου κύματος προς μία διεύθυνση στο εσωτερικό ενός κρυστάλλου, γνωρίζουμε τα συνημίτονα κατεύθυνσης της $\mathbf{l}$ ή του $\mathbf{s}$. Στα επόμενα θα υπολογίσουμε τα s_k όταν μας δίνονται

---

* M. Born - E. Wolf: 'Principles of Optics' Ch. XIV (Optics of Crystals) Fifth Ed. (1975).

τα l_k για $k = 1,2,3$.

- Για λόγους πλήρους κατανόησης της αποδεικτικής διαδικασίας, θα πρέπει κατ' αρχή να ορίσουμε με μεγαλύτερη ακρίβεια την έννοια της ταχύτητας ακτίνας u δηλ. ν' αναδείξουμε τη (σχ. Ε-14). Για το λόγο αυτό θα πρέπει να υπολογίσουμε αναλυτικά τη συνολική πυκνότητα ενέργειας u_p του πεδίου (ηλεκτρική και μαγνητική) και μάλιστα συναρτήσει του διανύσματος Poynting $\mathbf{S}$. Πράγματι από τη (σχ. Ε-3) γνωρίζουμε ότι στην ύλη:

$$u_p = \frac{\varepsilon_0 k_e}{2}\mathbf{E}\cdot\mathbf{E} + \frac{\varepsilon_0 c^2}{2k_m}\mathbf{B}\cdot\mathbf{B} = \frac{\mathbf{D}\cdot\mathbf{E}}{2} + \frac{\mathbf{B}\cdot\mathbf{H}}{2} = u_e + u_m \qquad \text{(E-30)}$$

Όπου $u_e = \frac{\mathbf{D}\cdot\mathbf{E}}{2}$ η πυκνότητα της ηλεκτρικής ενέργειας και $u_m = \frac{\mathbf{B}\cdot\mathbf{H}}{2}$ η αντίστοιχη της μαγνητικής. Μας είναι όμως γνωστές οι σχέσεις : $\mathbf{D} = -\frac{n}{c}\mathbf{l}\times\mathbf{H}$ (Ε-9) και $\mathbf{H} = \frac{n}{\mu c}\mathbf{l}\times\mathbf{E}$ (Ε-11) για $\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}$. Επομένως:

$$u_e = \frac{\mathbf{E}\cdot\mathbf{D}}{2} = -\frac{n}{2c}\mathbf{E}\cdot(\mathbf{l}\times\mathbf{H}) = -\frac{n}{2c}\mathbf{l}\cdot(\mathbf{H}\times\mathbf{E})$$

και τελικά: $$u_e = \frac{n}{2c}\mathbf{l}\cdot(\mathbf{E}\times\mathbf{H}) \qquad \text{(E-31)}$$

Επίσης: $$u_m = \frac{\mathbf{H}\cdot\mathbf{B}}{2} = \frac{n}{2c}\mathbf{H}\cdot(\mathbf{l}\times\mathbf{E}) = \frac{n}{2c}\mathbf{l}\cdot(\mathbf{E}\times\mathbf{H})$$

δηλ. $$u_m = \frac{n}{2c}\mathbf{l}\cdot(\mathbf{E}\times\mathbf{H}) \qquad \text{(E-32)}$$

όπου χρησιμοποιήσαμε τη σχέση: $\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c}) = \mathbf{b}\cdot(\mathbf{c}\times\mathbf{a}) = \mathbf{c}\cdot(\mathbf{a}\times\mathbf{b})$.

Άρα $u_p = u_e + u_m = 2u_m = \frac{n}{c}\mathbf{l}\cdot(\mathbf{E}\times\mathbf{H})$ και επειδή $\mathbf{S} = \mathbf{E}\times\mathbf{H}$:

$$u_p = \frac{n}{c}\mathbf{S}\cdot\mathbf{l} \qquad \text{(E-33)}$$

Κατά τα γνωστά, η ***ταχύτητα φάσης*** **υ** είναι αυτή με την οποία διαδίδονται

οι ισοφασικές επιφάνειες (μέτωπα κύματος) κατά τη φορά της κυματοκαθέτου και το μέτρο της είναι $\upsilon = c/n$. Η ***ταχύτητα ακτίνας*** $\mathbf{u}$, αφορά την ταχύτητα διάδοσης της ενέργειας, με φορά αυτήν του διανύσματος Poynting $\mathbf{S}$ (ή του μοναδιαίου του $\mathbf{s}$). ***'Το μέτρο της*** u ***είναι ίσο με την ενέργεια η οποία διαδίδεται ανά μονάδα χρόνου και ανά μονάδα επιφάνειας, διαιρεμένη με την συνολική πυκνότητα ενέργειας*** u_p ***'***. Επομένως:

$$u = S/u_p = S\Big/\frac{n}{c}\mathbf{l}\cdot(\mathbf{E}\times\mathbf{H}) = S\Big/\frac{n}{c}\mathbf{l}\cdot\mathbf{S} = S\Big/\frac{n}{c}S\mathbf{s}\cdot\mathbf{l} = \frac{\upsilon}{\cos\phi}$$

Όπου $\upsilon = c/n$, $\mathbf{S} = S\mathbf{s}$ και $\mathbf{s}\cdot\mathbf{l} = \cos\phi$ με ϕ τη γωνία που σχηματίζουν οι διευθύνσεις των δύο ταχυτήτων. Άρα ισχύει η (σχ. Ε-14):

$$\upsilon = u\mathbf{s}\cdot\mathbf{l} = u\cos\phi \qquad \text{(E-34)}$$

Από το (Σχ. Ε-1α) έχουμε: $\mathbf{E}\cdot\mathbf{l} = -E\sin\phi$, $E_\perp = E\cos\phi \;\Rightarrow\; \mathbf{E}\cdot\mathbf{l} = -E_\perp\tan\phi$ και

$\mathbf{D}\cdot\mathbf{s} = D\cos(90+\phi) = D\sin\phi$. Επίσης από τη (σχ. Ε-13): $\mathbf{D} = \frac{n^2}{c^2\mu}\mathbf{E}_\perp$ άρα

$D = \frac{n^2}{c^2\mu}E_\perp$. Οπότε: $\mathbf{D}\cdot\mathbf{s} = D\sin\phi = \frac{n^2E_\perp}{c^2\mu} = -\frac{n^2}{c^2\mu}\mathbf{E}\cdot\mathbf{l}\cos\phi \quad \Rightarrow$

$$\mathbf{D}\cdot\mathbf{s} = -\frac{n^2}{c^2\mu}(\mathbf{E}\cdot\mathbf{l})\frac{\upsilon}{u}$$

Και τελικά: $$\mathbf{D}\cdot\mathbf{s} = -\frac{1}{\mu\upsilon u}(\mathbf{E}\cdot\mathbf{l}) \qquad \text{(E-35)}$$

όπου χρησιμοποιήσαμε τις σχέσεις: $\upsilon = u\cos\phi$ και $\upsilon = c/n$.

Από τις (σχ. Γ-9) είναι δυνατόν να υπολογίσουμε τις συνιστώσες E_k $k = 1.2.3$ των δύο διαδιδόμενων μετώπων κύματος στο εσωτερικό ενός κρυστάλλου (κατά τη διεύθυνση της $\mathbf{l}$) όταν είναι γνωστές οι δύο ταχύτητες φάσης του $\upsilon^2 = \upsilon'^2$ και $\upsilon^2 = \upsilon''^2$. Επομένως η (σχ. Γ-9) σε σύντομη γραφή έχει ως εξής:

$$E_k = \frac{\upsilon_k^2 l_k(\mathbf{E}\cdot\mathbf{l})}{\upsilon_k^2 - \upsilon^2} \quad k = 1,2,3 \qquad \text{(E-36)}$$

Με τη βοήθεια τώρα του κανόνα της δυαδικότητας (σχ. Ε-15) έχουμε:

$$D_k = \frac{\dfrac{-s_k\left(\mathbf{D}\cdot(-\mathbf{s})\right)}{\upsilon_k^2}}{\dfrac{1}{\upsilon_k^2}-\dfrac{1}{u^2}} = \frac{\dfrac{s_k\left(\mathbf{D}\cdot\mathbf{s}\right)}{\upsilon_k^2}}{\dfrac{u^2-\upsilon_k^2}{\upsilon_k^2 u^2}} \Rightarrow$$

$$D_k = -\frac{u^2 s_k\left(\mathbf{D}\cdot\mathbf{s}\right)}{\upsilon_k^2-u^2} \quad k=1,2,3 \tag{E-37}$$

Αντικαθιστώντας τώρα τη (σχ. Ε-35) στην (σχ. Ε-37) θα έχουμε:

$$D_k = \varepsilon_k E_k = -\frac{u^2 s_k\left[-\dfrac{\left(\mathbf{E}\cdot\mathbf{l}\right)}{\mu\upsilon u}\right]}{\upsilon_k^2-\upsilon^2} = \frac{\dfrac{u^2 s_k\left(\mathbf{E}\cdot\mathbf{l}\right)}{\mu\upsilon u}}{\upsilon_k^2-\upsilon^2} \Rightarrow$$

$$E_k = \frac{u^2 l_k\left(\mathbf{E}\cdot\mathbf{l}\right)}{\mu\upsilon\varepsilon_k u\left(\upsilon_k^2-u^2\right)} = \frac{\upsilon_k^2 u s_k\left(\mathbf{E}\cdot\mathbf{l}\right)}{\upsilon\left(\upsilon_k^2-u^2\right)} \quad k=1,2,3 \tag{E-38}$$

όπου: $\mu\varepsilon_k = \mu\varepsilon_0 n_k^2 = \left(n_k/c\right)^2 \Rightarrow \mu\varepsilon_k = 1/\upsilon_k^2 \quad \left(\mu \simeq \mu_0\right)$

Συγκρίνοντας τώρα τη (σχ. Ε-38) με την (σχ. Ε-36) βρίσκουμε:

$$\frac{\upsilon l_k}{\upsilon_k^2-\upsilon^2} = \frac{u s_k}{\upsilon_k^2-u^2} \quad k=1,2,3 \tag{E-39}$$

Και από τη (σχ. Ε-39) με τη βοήθεια της ιδιότητας : $\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d} \Rightarrow \dfrac{a-b}{b}=\dfrac{c-d}{d}$

βρίσκουμε: $$u s_k - \upsilon l_k = \upsilon l_k \frac{u^2-\upsilon^2}{\upsilon^2-\upsilon_k^2} \quad k=1,2,3 \tag{E-40}$$

Η ύψωση στο τετράγωνο των δύο μελών αυτών των τριών εξισώσεων και η πρόσθεσή τους, λαμβανομένου υπόψη ότι:
$l_1^2+l_2^2+l_3^2=1$, $s_1^2+s_2^2+s_3^2=1$, $l_1 s_1 + l_2 s_2 + l_3 s_3 = \mathbf{l}\cdot\mathbf{s} = \cos\phi$ και ότι $\upsilon = u\cos\phi$
μας οδηγεί στο να βρούμε:

$$u^2-\upsilon^2=\upsilon^2\left(u^2-\upsilon^2\right)^2\left[\left(\frac{l_1}{\upsilon^2-\upsilon_1^2}\right)^2+\left(\frac{l_2}{\upsilon^2-\upsilon_2^2}\right)^2+\left(\frac{l_3}{\upsilon^2-\upsilon_3^2}\right)^2\right] \qquad \text{(E-41)}$$

Κατόπιν ορίζουμε σαν:

$$g^2=\upsilon^2\left(u^2-\upsilon^2\right)=\left[\left(\frac{l_1}{\upsilon^2-\upsilon_1^2}\right)^2+\left(\frac{l_2}{\upsilon^2-\upsilon_2^2}\right)^2+\left(\frac{l_3}{\upsilon^2-\upsilon_3^2}\right)^2\right]^{-1} \qquad \text{(E-42)}$$

Όμως από τη (σχ. Ε-41) μπορούμε να προσδιορίσουμε τις τιμές της $u\left(u',u''\right)$ συναρτήσει των γνωστών συνημιτόνων κατεύθυνσης l_1,l_2,l_3 επειδή ήδη οι ταχύτητες φάσης $\upsilon\left(\upsilon',\upsilon''\right)$ είναι γνωστές από την εξίσωση Fresnel (σχ. Α-30). Άρα οι $u\left(u',u''\right)$ είναι γνωστές και επομένως οι δύο τιμές της g^2. Τελικά από τη (σχ. Ε-39) λύνοντας ως προς s_k βρίσκουμε:

$$s_k=\frac{\upsilon}{u}\frac{\upsilon_k^2-u^2}{\upsilon_k^2-\upsilon^2}l_k \quad k=1,2,3 \qquad \text{(E-43)}$$

και με τη βοήθεια της $g^2=\upsilon^2\left(u^2-\upsilon^2\right)$ θα έχουμε:

$$s_k=\frac{l_k}{\upsilon u}\left(\upsilon^2+\frac{g^2}{\upsilon^2-\upsilon_k^2}\right) \quad k=1,2,3 \qquad \text{(E-44)}$$

Δηλ. εκφράσαμε τα s_k συναρτήσει των l_k για $k=1,2,3$.

Παράδειγμα 2

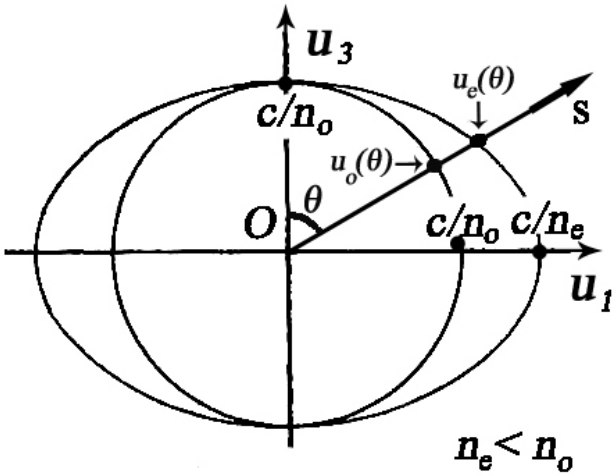
Για την περίπτωση αρνητικού μονοάξονα κρυστάλλου, να υπολογιστούν συναρτήσει της γωνίας θ (όπου θ η γωνία που σχηματίζει το μοναδιαίο διάνυσμα Poynting **s** με τον οπτικό άξονα) οι ταχύτητες ακτίνας $u_o(\theta)$ και $u_e(\theta)$.

- Από τη (σχ. Ε-25): $\left[n_e^2\left(u_1^2+u_2^2\right)+n_o^2u_3^2-c^2\right]\left[n_o^2\left(u_1^2+u_2^2+u_3^2\right)-c^2\right]=0$ για $u_2=0$ θα έχουμε: $\left[n_e^2u_1^2+n_o^2u_3^2-c^2\right]\left[n_o^2\left(u_1^2+u_3^2\right)-c^2\right]=0$. Και από την τελευταία σχέση:

α) $n_o^2\left(u_1^2+u_3^2\right)=c^2$ και β) $n_e^2u_1^2+n_o^2u_3^2=c^2$

α) Αν στη σχέση: $n_o^2\left(u_1^2+u_3^2\right)=c^2$ γίνουν οι αντικαταστάσεις (Σχ. Ε-5): $u_1=u_o(\theta)\sin\theta$ και $u_3=u_o(\theta)\cos\theta$, τότε: $n_o^2\left(u^2{}_o(\theta)\sin^2\theta+u^2{}_o(\theta)\cos^2\theta\right)=c^2$. Και τελικά: $u^2{}_o(\theta)=c^2/n_o^2=(c/n_o)^2=u_o^2$. Επομένως:

$$u_o(\theta)=c/n_o=\upsilon_o \tag{E-45}$$



(Σχ. Ε-5)

β) Αν στη σχέση: $n_e^2u_1^2+n_o^2u_3^2=c^2$ γίνουν οι αντικαταστάσεις (Σχ. Ε-5): $u_1=u_e(\theta)\sin\theta$ και $u_3=u_e(\theta)\cos\theta$ τότε: $n_e^2u_e^2(\theta)\sin^2\theta+n_o^2u_e^2(\theta)\cos^2\theta=c^2$. Και μετά τις πράξεις: $\left(\frac{n_e}{c}\right)^2u_e^2(\theta)\sin^2\theta+\left(\frac{n_o}{c}\right)u_e^2(\theta)\cos^2\theta=1$. Οπότε:

$$\frac{1}{u_e^2(\theta)}=\frac{\sin^2\theta}{\upsilon_e^2}+\frac{\cos^2\theta}{\upsilon_o^2} \quad \text{με} \quad \upsilon_o=\frac{c}{n_o},\quad \upsilon_e=\frac{c}{n_e} \tag{E-46}$$

ΣΤ) *Ιδιότητες ορθογωνιότητας μεταξύ των ιδιοκαταστάσεων*

Σαν ***ιδιοκατάσταση (Eigen mode)*** ονομάζουμε – κατά τα γνωστά – τη μόνη επιτρεπόμενη διαδιδόμενη διαταραχή στο εσωτερικό ενός κρυστάλλου, η οποία όμως δεν μεταβάλλει την κατάσταση πόλωσής της. Αποδεικνύεται ότι – στη γενικότερη περίπτωση – κατά τη διεύθυνση της κυματοκαθέτου, οι διαδιδόμενες στο κρύσταλλο ιδιοκαταστάσεις είναι δύο τον αριθμό. Υποθέτοντας ότι τα πεδιακά τους μεγέθη είναι τα $\mathbf{E}_1, \mathbf{D}_1, \mathbf{H}_1$ και $\mathbf{E}_2, \mathbf{D}_2, \mathbf{H}_2$ θα δούμε στα επόμενα τις σχέσεις που υφίστανται μεταξύ τους.

Ήδη έχουμε αποδείξει στο (Κεφ. Β, σχ. Β-14) ότι μεταξύ των $\mathbf{D}_1, \mathbf{D}_2$ υφίσταται η σχέση:

$$\mathbf{D}_1 \cdot \mathbf{D}_2 = 0 \qquad (\Sigma\text{T-1})$$

δηλ. τα $\mathbf{D}_1, \mathbf{D}_2$ είναι μεταξύ τους ορθογώνια. Επίσης στο (Κεφ. Α, σχ. Α-26) αποδείξαμε ότι: $\mathbf{l} \cdot \mathbf{D} = 0$. Επομένως:

$$\mathbf{l} \cdot \mathbf{D}_1 = \mathbf{l} \cdot \mathbf{D}_2 = 0 \qquad (\Sigma\text{T-2})$$

δηλ. τα $\mathbf{D}_1, \mathbf{D}_2$ είναι κάθετα προς την κυματοκάθετη $\mathbf{k}$. Θα δούμε κατόπιν τι ακριβώς σχέση υφίσταται μεταξύ των $\mathbf{D}_1, \mathbf{E}_2$ και $\mathbf{D}_2, \mathbf{E}_1$. Για το λόγο αυτό από τη (σχ. Α-23) μπορούμε να διαπιστώσουμε ότι τα συνημίτονα κατεύθυνσης για το καθένα από τα $\mathbf{D}_1, \mathbf{D}_2$ είναι ανάλογα των:

$$\frac{l_1}{\upsilon_1^2 - \upsilon^2}\ ,\ \frac{l_2}{\upsilon_2^2 - \upsilon^2}\ ,\frac{l_3}{\upsilon_3^2 - \upsilon^2} \qquad (\Sigma\text{T-3})$$

για $\upsilon^2 = \upsilon'^2$, $\upsilon^2 = \upsilon''^2$. Επίσης από τη (σχ. Γ-9), τα συνημίτονα κατεύθυνσης για το καθένα από τα $\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2$ είναι ανάλογα των:

$$\frac{l_1\upsilon_1^2}{\upsilon_1^2 - \upsilon^2}\ ,\ \frac{l_2\upsilon_2^2}{\upsilon_2^2 - \upsilon^2}\ ,\frac{l_3\upsilon_3^2}{\upsilon_3^2 - \upsilon^2} \qquad (\Sigma\text{T-4})$$

για $\upsilon^2 = \upsilon'^2$, $\upsilon^2 = \upsilon''^2$. Τότε τα συνημίτονα κατεύθυνσης των $\mathbf{D}_1, \mathbf{E}_2$ θα είναι ανάλογα των:

$$\mathbf{D}_1 \sim \frac{l_1}{\upsilon_1^2 - \upsilon'^2}\ ,\ \frac{l_2}{\upsilon_2^2 - \upsilon'^2}\ ,\ \frac{l_3}{\upsilon_3^2 - \upsilon'^2} \qquad \mathbf{E}_2 \sim \frac{l_1\upsilon_1^2}{\upsilon_1^2 - \upsilon''^2}\ ,\ \frac{l_2\upsilon_2^2}{\upsilon_2^2 - \upsilon''^2}\ ,\frac{l_3\upsilon_3^2}{\upsilon_3^2 - \upsilon''^2}$$

και επομένως το γινόμενο $\mathbf{D}_1 \cdot \mathbf{E}_2$ θα είναι ανάλογο της παράστασης:

$$\frac{l_1^2\upsilon_1^2}{\left(\upsilon_1^2 - \upsilon'^2\right)\left(\upsilon_1^2 - \upsilon''^2\right)} + \frac{l_2^2\upsilon_2^2}{\left(\upsilon_1^2 - \upsilon'^2\right)\left(\upsilon_2^2 - \upsilon''^2\right)} + \frac{l_3^2\upsilon_3^2}{\left(\upsilon_1^2 - \upsilon'^2\right)\left(\upsilon_3^2 - \upsilon''^2\right)}$$

η οποία είναι ίση με:

$$\frac{\upsilon'^2 f\left(\upsilon'^2\right) - \upsilon''^2 f\left(\upsilon''^2\right)}{\upsilon'^2 - \upsilon''^2} = 0$$

επειδή από τη (σχ. Α-30): $f\left(\upsilon^2\right) = \frac{l_1^2}{\left(\upsilon^2 - \upsilon_1^2\right)} + \frac{l_2^2}{\left(\upsilon^2 - \upsilon_2^2\right)} + \frac{l_3^2}{\left(\upsilon^2 - \upsilon_3^2\right)} = 0$

Επομένως: $\mathbf{D}_1 \cdot \mathbf{E}_2 = 0$ (ΣΤ-5)

Με τον ίδιο ακριβώς τρόπο αποδεικνύεται ότι:

$$\mathbf{D}_2 \cdot \mathbf{E}_1 = 0 \qquad (\Sigma\text{T-6})$$

Επίσης από τη θεωρία του ηλεκτρομαγνητισμού είναι γνωστό το θεώρημα του Lorentz που αφορά τη διάδοση στον ίδιο χώρο δύο πεδίων της ίδιας συχνότητας που βρίσκονται σε σύζευξη. Αν $\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2, \mathbf{H}_1, \mathbf{H}_2$ είναι τα δύο πεδία σ' ένα σημείο εκτός πηγών, τότε το θεώρημα εκφράζεται ως εξής:

$$\nabla\left(\mathbf{E}_1 \times \mathbf{H}_2 - \mathbf{E}_2 \times \mathbf{H}_1\right) = 0 \qquad (\Sigma\text{T-7})$$

Ας θεωρήσουμε τώρα ότι τα $\mathbf{E}_1, \mathbf{H}_1$ και $\mathbf{E}_2, \mathbf{H}_2$ αφορούν τις δύο εν γένει ιδιοκαταστάσεις στο εσωτερικό ενός κρυστάλλου. Τότε οι τελευταίες λόγω της κοινής γενεσιουργού αιτίας τους είναι συζευγμένες, οπότε μπορούμε να θεωρήσουμε ότι ισχύει η (σχ. ΣΤ-7). Στη μιγαδική τους έκφραση αυτά τα πεδία μπορούν να γραφούν κατά τα γνωστά ως εξής.

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathbf{E}}_1 &= \mathbf{E}_1 e^{i(\omega t-\mathbf{k}\cdot\mathbf{r})} = \left(E_{11}\mathbf{i}+E_{12}\mathbf{j}+E_{13}\mathbf{k}\right)e^{i(\omega t-\mathbf{k}\cdot\mathbf{r})}\\
\tilde{\mathbf{E}}_2 &= \mathbf{E}_2 e^{i(\omega t-\mathbf{k}\cdot\mathbf{r})} = \left(E_{21}\mathbf{i}+E_{22}\mathbf{j}+E_{23}\mathbf{k}\right)e^{i(\omega t-\mathbf{k}\cdot\mathbf{r})}\\
\tilde{\mathbf{H}}_1 &= \mathbf{H}_1 e^{i(\omega t-\mathbf{k}\cdot\mathbf{r})} = \left(H_{11}\mathbf{i}+H_{12}\mathbf{j}+H_{13}\mathbf{k}\right)e^{i(\omega t-\mathbf{k}\cdot\mathbf{r})}\\
\tilde{\mathbf{H}}_2 &= \mathbf{H}_2 e^{i(\omega t-\mathbf{k}\cdot\mathbf{r})} = \left(H_{21}\mathbf{i}+H_{22}\mathbf{j}+H_{23}\mathbf{k}\right)e^{i(\omega t-\mathbf{k}\cdot\mathbf{r})}
\end{aligned} \qquad (\Sigma\text{T-8})$$

όπου: $\omega t-\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}=\omega t-k_1x_1-k_2x_2-k_3x_3$. Τότε θα έχουμε:

$$\tilde{\mathbf{E}}_1\times\tilde{\mathbf{H}}_2=\begin{pmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ aE_{11} & aE_{12} & aE_{13}\\ aH_{21} & aH_{22} & aH_{23}\end{pmatrix} \qquad a=e^{i(\omega t-\mathbf{k}\cdot\mathbf{r})}$$

Δηλ.

$$\tilde{\mathbf{E}}_1\times\tilde{\mathbf{H}}_2=\left[\left(E_{12}H_{23}-E_{13}H_{22}\right)\mathbf{i}+\left(E_{13}H_{21}-E_{11}H_{23}\right)\mathbf{j}+\left(E_{11}H_{22}-E_{12}H_{21}\right)\mathbf{k}\right]e^{2i(\omega t-\mathbf{k}\cdot\mathbf{r})}$$

Τότε:

$$\nabla\left(\tilde{\mathbf{E}}_1\times\tilde{\mathbf{H}}_2\right)=-2i\left[k_1\left(E_{12}H_{23}-E_{13}H_{22}\right)+k_2\left(E_{13}H_{21}-E_{11}H_{23}\right)+\right.$$

$$\left.+k_3\left(E_{11}H_{22}-E_{12}H_{21}\right)\right]e^{2i(\omega t-\mathbf{k}\cdot\mathbf{r})} \quad\Rightarrow$$

$$\nabla\left(\tilde{\mathbf{E}}_1\times\tilde{\mathbf{H}}_2\right)=-2i\mathbf{k}\cdot\left(\mathbf{E}_1\times\mathbf{H}_2\right)e^{2i(\omega t-\mathbf{k}\cdot\mathbf{r})}$$

Και επειδή $\mathbf{k}=(\omega/c)n\mathbf{l}$ θα έχουμε:

$$\nabla\left(\tilde{\mathbf{E}}_1\times\tilde{\mathbf{H}}_2\right)=-\frac{2i\omega n}{c}\mathbf{l}\cdot\left(\mathbf{E}_1\times\mathbf{H}_2\right)e^{2i(\omega t-\mathbf{k}\cdot\mathbf{r})} \qquad (\Sigma\text{T-9})$$

Με τον ίδιο τρόπο βρίσκουμε:

$$\nabla\left(\tilde{\mathbf{E}}_2\times\tilde{\mathbf{H}}_1\right)=-\frac{2i\omega n}{c}\mathbf{l}\cdot\left(\mathbf{E}_2\times\mathbf{H}_1\right)e^{2i(\omega t-\mathbf{k}\cdot\mathbf{r})} \qquad (\Sigma\text{T-10})$$

Τελικά από τις (σχ. ΣΤ-9,10,7) θα έχουμε:

$$\mathbf{l}\cdot\left(\mathbf{E}_1\times\mathbf{H}_2\right)=\mathbf{l}\cdot\left(\mathbf{E}_2\times\mathbf{H}_1\right) \qquad (\Sigma\text{T-11})$$

Γνωρίζουμε όμως ότι μεταξύ των $\mathbf{E}$ και $\mathbf{H}$ ισχύει η (σχ. Ε-11):

$$\mathbf{H} = \frac{n}{\mu c}\mathbf{l} \times \mathbf{E} \qquad (\Sigma\text{T-12})$$

Επομένως η (σχ. ΣΤ-11) γίνεται:

$$\frac{n''}{\mu c}\mathbf{l} \cdot \left[\mathbf{E}_1 \times \left(\mathbf{l} \times \mathbf{E}_2\right)\right] = \frac{n'}{\mu c}\mathbf{l} \cdot \left[\mathbf{E}_2 \times \left(\mathbf{l} \times \mathbf{E}_1\right)\right] \qquad (\Sigma\text{T-13})$$

και με τη βοήθεια της $\mathbf{a} \cdot \left(\mathbf{b} \times \mathbf{c}\right) = \mathbf{c} \cdot \left(\mathbf{a} \times \mathbf{b}\right)$ παίρνει τη μορφή:

$$\frac{n''}{\mu c}\left(\mathbf{l} \times \mathbf{E}_1\right) \cdot \left(\mathbf{l} \times \mathbf{E}_2\right) = \frac{n'}{\mu c}\left(\mathbf{l} \times \mathbf{E}_1\right) \cdot \left(\mathbf{l} \times \mathbf{E}_2\right) \qquad (\Sigma\text{T-14})$$

Η τελευταία θα πρέπει να ισχύει για κάθε διεύθυνση διάδοσης $\mathbf{l}$ όπου $n' \neq n''$ (δ.δ. των δύο ιδιοκαταστάσεων). Αυτό επιτυγχάνεται μόνον όταν και τα δύο μέλη της (σχ. ΣΤ-14) είναι μηδέν. Επομένως από τη (σχ. ΣΤ-11) θα έχουμε:

$$\mathbf{l} \cdot \left(\mathbf{E}_1 \times \mathbf{H}_2\right) = \mathbf{l} \cdot \left(\mathbf{E}_2 \times \mathbf{H}_1\right) = 0 \qquad (\Sigma\text{T-15})$$

Τέλος με τη βοήθεια των (σχ. ΣΤ-4) μπορούμε κατόπιν πράξεων ν' αποδείξουμε ότι :

$$\mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{E}_2 \neq 0 \qquad (\Sigma\text{T-16})$$

Δηλ. τα $\mathbf{E}_1$ και $\mathbf{E}_2$ δεν είναι ορθογώνια. Η ορθογωνιότητα μεταξύ των $\mathbf{E}_1$ και $\mathbf{E}_2$ ισχύει μόνον όταν οι κρύσταλλοι είναι μονοάξονες καθώς και για τα ισότροπα υλικά. Παρακάτω παραθέτουμε συγκεντρωτικά τις σχέσεις ορθογωνιότητας μεταξύ των ιδιοκαταστάσεων, που μελετήσαμε προηγουμένως.

$$\begin{cases} \mathbf{D}_1 \cdot \mathbf{D}_2 = 0 \quad \mathbf{l} \cdot \mathbf{D}_1 = \mathbf{l} \cdot \mathbf{D}_2 = 0 \\ \mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{E}_2 \neq 0 \quad \left(\text{για διάξονες κρυστάλλους}\right) \\ \mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{E}_2 = 0 \quad \begin{pmatrix} \text{για μονοξονες κρυστάλλους} \\ \text{και ισότροπα υλικά} \end{pmatrix} \\ \mathbf{D}_1 \cdot \mathbf{E}_2 = \mathbf{D}_2 \cdot \mathbf{E}_1 = 0 \\ \mathbf{l} \cdot \left(\mathbf{E}_1 \times \mathbf{H}_2\right) = \mathbf{l} \cdot \left(\mathbf{E}_2 \times \mathbf{H}_1\right) = 0 \end{cases}$$

Ζ) *Επαγομένη διπλή διάθλαση του φωτός στα ισότροπα και ανισότροπα υλικά*

Στα προηγούμενα κεφάλαια μελετήσαμε τον τρόπο με τον οποίο διαδίδεται η Η/Μ ακτινοβολία στο εσωτερικό των ανισοτρόπων υλικών (των κρυστάλλων). Προέκυψε το εξής βασικό συμπέρασμα: Στη γενικότερη περίπτωση, κατά τη διεύθυνση μιας κυματοκαθέτου και για την περίπτωση που ο κρύσταλλος δεν είναι οπτικά ενεργός (βλ. Κεφ.7), μπορούν να διαδοθούν δύο επίπεδα γραμμικά πολωμένα μετ. κύματος (ιδιοκαταστάσεις), οι ιδιότητες των οποίων περιγράφονται λεπτομερώς στο (Κεφ. ΣΤ). Με τη βοήθεια του ελλειψοειδούς των δ.δ. (Κεφ. Β) είναι δυνατόν να προσδιορίσουμε τις ταχύτητες φάσης των δύο αυτών κυμάτων. Δηλ. τους δείκτες διάθλασής και κατά προέκταση τη διαφορά φάσης μεταξύ τους, κατά τη διάδοσή τους σε μια ορισμένη απόσταση στο εσωτερικό του κρυστάλλου.

Το ερώτημα που τίθεται είναι το εξής: Τι ακριβώς θα συμβεί εάν στον κρύσταλλο ή ακόμα και σε ένα ισότροπο υλικό, επιδράσουν διάφορες 'εξωγενείς δυνάμεις' όπως: Ηλεκτρικά πεδία (στατικά ή μη), μαγνητικά πεδία, μηχανικές τάσεις, θερμοκρασιακές μεταβολές ή συνδυασμός των προαναφερόμενων; Κάτω από αυτές τις συνθήκες θα δούμε ότι οι ιδιότητες των υλικών μεταβάλλονται, με συνέπεια να 'επάγονται' διαφόρων ειδών φαινόμενα. Κύριο χαρακτηριστικό αυτών των φαινομένων, είναι ότι επηρεάζουν τον τρόπο με τον οποίο διαδίδεται το φως μέσω των κρυστάλλων που υπόκεινται στις προαναφερόμενες επιδράσεις. Δηλ. τις ιδιοκαταστάσεις των διαδιδόμενων πεδίων καθώς και τις ταχύτητες φάσης (δηλ.

Σημείωση

Επαναλαμβάνουμε εδώ ότι οι ***ιδιοκαταστάσεις (eigenstates or eigenvectors)*** σε έναν κρύσταλλο, ονομάζονται οι καταστάσεις πόλωσης των μόνων και μόνο αυτών (ορθογωνίων μεταξύ τους) επιπέδων μετ. κύματος $(\mathbf{D}_1, \mathbf{D}_2)$, τα οποία μπορούν να διαδοθούν προς μια ορισμένη διεύθυνση (της κυματοκαθέτου $\mathbf{k}$) χωρίς να μεταβληθούν. Οι ***ιδιοτιμές (eigenvalues)*** που αντιστοιχούν στις προαναφερόμενες ιδιοκαταστάσεις αποδεικνύεται ότι είναι οι $\left(1/n'^2, 1/n''^2\right)$. Όπου (n', n'') οι δ.δ. οι οποίοι σχετίζονται με τις ταχύτητες φάσης των $(\mathbf{D}_1, \mathbf{D}_2)$ μέσω των γνωστών σχέσεων: $\left(\upsilon' = c/n', \upsilon'' = c/n''\right)$.

τους δ.δ.). Ο τρόπος διαπραγμάτευσής τους θα είναι φαινομενολογικός. Από την άποψη ότι ελάχιστες μόνον νύξεις θα γίνουν όσον αφορά τον ατομικό χαρακτήρα

των υλικών και τις δυνάμεις που ασκούνται μεταξύ των φορτίων και τους δεσμούς τους.

Φαινόμενα που στοιχειωδώς θα εξετάσουμε εδώ είναι: Το ***γραμμικό ηλεκτροοπτικό (linear electro-optic effect)*** ή ***(Pockells effect)*** στην πρωτεύουσα και δευτερεύουσα έκφρασή του. Το ***τετραγωνικό ηλεκτροοπτικό (quadratic electro-optic effect)*** ή ***(Kerr effect)***, επίσης στην πρωτεύουσα και δευτερεύουσα έκφρασή του και το ***φωτοελαστικό (photoelastic effect)***. Ηλεκτροοπτικό (γραμμικό και τετραγωνικό), είναι το φαινόμενο το οποίο προκύπτει όταν σε έναν κρύσταλλο (ή ακόμα και σε ισότροπο υλικό) εφαρμόσουμε ηλεκτρικό πεδίο $(\mathrm{V/m})$ προς μια ορισμένη διεύθυνση. Φωτοελαστικό, είναι το φαινόμενο το οποίο προκύπτει όταν σε κρύσταλλο ή σε ισότροπο υλικό εφαρμόσουμε προς μια διεύθυνση μηχανική τάση$\left(\mathrm{Nt/m^2}\right)$. Το αποτέλεσμα και στις δύο αυτές περιπτώσεις θα είναι το εξής: Η εφαρμογή της εκάστοτε εξωγενούς δύναμης θα έχει σαν αποτέλεσμα εν γένει, την μεταβολή του σχήματος, του μεγέθους ή ακόμα και του προσανατολισμού του ελλειψοειδούς των δ.δ. Κάτω από αυτές τις νέες συνθήκες, στη διεύθυνση μιας κυματοκαθέτου είναι ευνόητο ότι θα έχουμε μεταβολή των ιδιοτιμών άρα και των ιδιοκαταστάσεων $(\mathbf{D}_1, \mathbf{D}_2)$ στο εσωτερικό των υλικών.

Το ηλεκτροοπτικό φαινόμενο

Η Κβαντομηχανική θεωρία των στερεών αποδεικνύει ότι τα στοιχεία που χαρακτηρίζουν τον πίνακα της ηλεκτρικής διαπερατότητας ενός κρυστάλλου (σχ. Α-4), εξαρτώνται από την κατανομή των φορτίων των ατόμων του. Αν όμως εφαρμόσουμε εξωτερικά ένα ηλεκτρικό πεδίο, τότε προκύπτει μια ανακατανομή τους. Το γεγονός αυτό θα έχει σαν συνέπεια τον επανακαθορισμό των στοιχείων του πίνακα της ηλ. διαπερατότητας. Τα στοιχεία όμως αυτά καθορίζουν – όπως είδαμε σε προηγούμενα κεφάλαια – τις ιδιοκαταστάσεις (τις καταστάσεις πόλωσης των διαδιδόμενων με τις νέες συνθήκες κυμάτων) καθώς και τις ταχύτητες φάσης τους(δηλ. τους νέους δ.δ.). Ας υποθέσουμε (χωρίς να εφαρμόσουμε εξωτερικό ηλεκτ. πεδίο) ότι τα στοιχεία του πίνακα της διαπερατότητας αναφέρονται στο σύστημα των κυρίων αξόνων του κρυστάλλου x_1, x_2, x_3. Τότε ο τελευταίος παίρνει κατά τα γνωστά τη μορφή της (σχ. Α-5) δηλ. διαθέτει μόνο διαγώνια στοιχεία και οι σχέσεις μεταξύ των D_i και E_i $i = 1,2,3$ είναι γραμμικές (σχ. Α-6). Συνεπώς το ελλ. των δ.δ. περιγράφεται από τη (σχ. Β-5) όπου n_1, n_2, n_3 οι κύριοι δ.δ. με $\varepsilon_i = \varepsilon_0 n_i^2$ $i = 1,2,3$.

Η εξίσωση όμως που περιγράφει το ελλ. των δ.δ. είναι δυνατόν να εκφρα-

στεί και από τη (σχ. Β-11) δηλ. την:

$$B_1x_1^2 + B_2x_2^2 + B_3x_3^2 = 1 \quad \text{ή} \quad B_{ij}x_ix_j = 1 \begin{cases} B_{ij} = 0 \ , \ i \neq j \\ B_{ij} = B_i \ \ i = j \end{cases} \ i = j = 1,2,3 \qquad \text{(Z-1)}$$

όπου B_1, B_2, B_3 τα διαγώνια στοιχεία του πίνακα της αδιαπερατότητας που δίνεται από τη (σχ. Β-10). Δηλ. ο πίνακας $[B]$ έχει τη μορφή:

$$[B] = \begin{pmatrix} B_1 & 0 & 0 \\ 0 & B_2 & 0 \\ 0 & 0 & B_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/n_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/n_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/n_3^2 \end{pmatrix} \qquad \text{(Z-2)}$$

όπου $\mathbf{E} = [\varepsilon]^{-1}\mathbf{D}$ (σχ. Β-7) , $\mathbf{E} = \dfrac{1}{\varepsilon_o}[B]\mathbf{D}$ (σχ. Β-9).

Γραμμικό ηλεκτροοπτικό φαινόμενο (Pockels effect)

Η επίδραση σε κρύσταλλο ηλεκτρικού πεδίου, θα έχει – όπως ήδη αναφέραμε – σαν συνέπεια εν γένει την μεταβολή στο σχήμα τον προσανατολισμό και το μέγεθος του ελλ. των δ.δ. Το γεγονός αυτό γίνεται εμφανές από την εξίσωση που το περιγράφει στις νέες συνθήκες. Έστω $B_{ij}(0)$ είναι τα στοιχεία του πίνακα της αδιαπερατότητας (σχ. Ζ-1), όταν το εξωτερικά εφαρμοζόμενο πεδίο είναι $\mathbf{E} = 0$ (πίνακας διαγώνιος). $B_{ij}(\mathbf{E})$ είναι τα στοιχεία του μετά την εφαρμογή του πεδίου ($\mathbf{E} \neq 0$). Ο πίνακας όμως αυτός δεν είναι πλέον διαγώνιος, γεγονός που αντανακλά τις μεταβολές στο ελλ. των δ.δ. Αποδεικνύεται ότι όταν οι κρύσταλλοι δεν είναι κεντροσυμμετρικοί και τα ηλεκ. πεδία όχι πολύ ισχυρά τότε:

$$B_{ij}(\mathbf{E}) = B_{ij}(0) + r_{ijk}E_k \quad i,j,k = 1,2,3 \qquad \text{(Z-3)}$$

όπου $E_k \ \ k = 1,2,3$ οι συνιστώσες του εφαρμοζόμενου στο εσωτερικό του κρυστάλλου πεδίου και $r_{ijk} \ \ i,j,k = 1,2,3$ οι ***γραμμικοί ηλεκτροοπτικοί συντελεστές (linear electro-optical coefficients)***. Οι διαστάσεις των r_{ijk} είναι $(\mathrm{m/V})$ και η τάξη μεγέθους τους $1\times10^{-12}\,\mathrm{m/V}$. Για πρώτη φορά το φαινόμενο είχε περιγραφεί από

τον F.C.A. Pockells το 1893.

Ένα οποιοδήποτε στοιχείο του πίνακα της αδιαπερατότητας (έστω το B_{12}) εκφράζεται ως εξής: $B_{12}(\mathbf{E}) = B_{12}(0) + r_{121}E_1 + r_{122}E_2 + r_{123}E_3$. Ή επειδή ο πίνακας $B_{ij}(0)$ είναι διαγώνιος: $B_{12}(0) = 0$ οπότε:

$$B_{12}(\mathbf{E}) = r_{121}E_1 + r_{122}E_2 + r_{123}E_3 .$$

Επίσης για το στοιχείο $B_{22}(\mathbf{E})$:

$$B_{22}(\mathbf{E}) = 1/n_2^2 + r_{221}E_1 + r_{222}E_2 + r_{223}E_3 \quad \text{κ.ο.κ.}$$

Κάτω από αυτές τις συνθήκες, στη γενικότερη περίπτωση τα στοιχεία των συντελεστών του γραμμικού ηλεκτροπτικού φαινομένου είναι 27. Επειδή όμως όπως αποδεικνύεται $r_{ijk} = r_{jik}$, καθώς και για θερμοδυναμικούς λόγους, τα 27 στοιχεία περιορίζονται σε 18. Τα τελευταία – ανάλογα με την τάξη στην οποία ανήκει ο κρύσταλλος – έχουν διαφορετικές τιμές, ίσες μεταξύ τους ή μηδενικές. Με βάση αυτά τα δεδομένα και χρησιμοποιώντας μια συντομογραφία, οι τρεις δείκτες των ηλεκτροοπτικών συντελεστών γίνονται δύο. Η συντομογραφία είναι η εξής:

$$(11)\to 1, (22)\to 2, (33)\to 3, (23) = (32)\to 4, (13) = (31)\to 5, (12) = (21)\to 6$$

Οπότε μπορούμε να προβούμε στις εξής συντομογραφίες:

$$r_{11k} \to r_{1k}, r_{22k} \to r_{2k}, r_{33k} \to r_{3k}, r_{23k} = r_{32k} \to r_{4k}, r_{13k} = r_{31k} \to r_{5k}, r_{12k} = r_{21k} \to r_{6k}$$

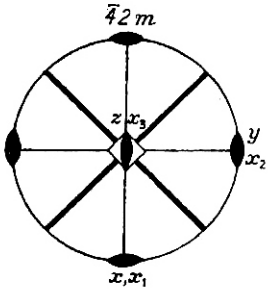
για $k = 1,2,3$. Δηλ. οι συντελεστές από 27 γίνονται 18. Οι τελευταίοι μπορούν να γραφούν με τη μορφή πινάκων (6×3) (ΠΑΡ/ΜΑ 6 (Πίν. 5α,β)). Στα επόμενα (Σχ. Z-1,2,3), παραθέτουμε τη μορφή αυτών των πινάκων για τρεις κρυστάλλους που ανήκουν σε αντίστοιχες κρυσταλλικές τάξεις και τους οποίους θα χρησιμοποιήσουμε στα παραδείγματά μας.

KH_2PO_4 (KDP) (Δισόξινο Φωσφορικό Κάλιο) (Τετραγωνικό σύστημα)

$\bar{4}2m$ $(2 \parallel x_1)$

$$r_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ r_{41} & 0 & 0 \\ 0 & r_{41} & 0 \\ 0 & 0 & r_{63} \end{pmatrix}$$

$j=1,2,3$
$i=1,2,..,6$



$(T)\, r_{41} = r_{52} = 8 \times 10^{-12}$ m/V
$(T)\, r_{63} = 11 \times 10^{-12}$ m/V
$\lambda = 0.633\,\mu$m
$n_o = 1.5074$
$n_e = 1.4669$

(Σχ. Z-1)

Η εξίσωση τελικά που θα περιγράφει το νέο ελλειψοειδές των δ.δ. θα δίνεται

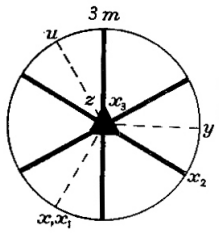
από τη σχέση:

$$B_{ij}(\mathbf{E})x_i x_j = \left[B_{ij}(0) + r_{ijk}E_k\right]x_i x_j = 1 \quad i,j,k = 1,2,3 \qquad \text{(Z-4)}$$

$LiNbO_3$ (Νιοβικό Λίθιο) (Τριγωνικό σύστημα)

$$r_{ij} = \begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{array}\begin{array}{c} \text{3m} \quad (\text{m} \perp x_1) \\ \begin{pmatrix} 0 & -r_{22} & r_{13} \\ 0 & r_{22} & r_{13} \\ 0 & 0 & r_{33} \\ 0 & r_{51} & 0 \\ r_{51} & 0 & 0 \\ -r_{22} & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \quad \begin{array}{c} \text{3m} \quad (\text{m} \perp x_2) \\ \begin{pmatrix} r_{11} & 0 & r_{13} \\ -r_{11} & 0 & r_{13} \\ 0 & 0 & r_{33} \\ 0 & r_{51} & 0 \\ r_{51} & 0 & 0 \\ 0 & -r_{11} & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

$j=1,2,3$
$i=1,2,..,6$



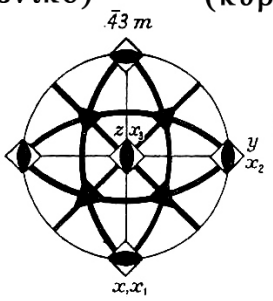
(T) r_{13}= 9.6 x 10^{-12} m/V
(T) r_{22}= 6.8 -//-
(T) r_{33}= 30.9 -//-
(T) r_{42}= r_{51}=32.6 -//-
λ = 0.6328 μm
n_o= 2.286
n_e= 2.200

(Σχ. Z-2)

GaAs (Γάλλιο Αρσενικό) (κυβικό σύστημα)

$$r_{ij} = \begin{array}{c} \bar{4}3\text{m}, 23 \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ r_{41} & 0 & 0 \\ 0 & r_{41} & 0 \\ 0 & 0 & r_{41} \end{pmatrix} \end{array}$$

$j=1,2,3$
$i=1,2,..,6$



(T) r_{41}= 1.43 x 10^{-12} m/V
λ = 1.51 μm
n = 3.3895

(Σχ. Z-3)

όπου $B_{ij}(0)$ τα στοιχεία του διαγωνιοποιημένου πίνακα της (σχ. Z-2). Η ανάπτυξη της (σχ. Z-4), θα μας δώσει κατ' αρχή ως προς $j = 1,2,3$:

$$\left[B_{i1}(0) + r_{i1k}E_k\right]x_i x_1 + \left[B_{i2}(0) + r_{i2k}E_k\right]x_i x_2 + \left[B_{i3}(0) + r_{i3k}E_k\right]x_i x_3 = 1 \qquad \text{(Z-5)}$$

Επίσης η ανάπτυξη της (σχ. Z-5) ως προς $i = 1,2,3$ μας δίνει:

$$\begin{aligned} &\left[B_{11}(0) + r_{11k}E_k\right]x_1 x_1 + \left[B_{21}(0) + r_{21k}E_k\right]x_2 x_1 + \left[B_{31}(0) + r_{31k}E_k\right]x_3 x_1 + \\ &+\left[B_{12}(0) + r_{12k}E_k\right]x_1 x_2 + \left[B_{22}(0) + r_{22k}E_k\right]x_2 x_2 + \left[B_{32}(0) + r_{32k}E_k\right]x_3 x_2 + \\ &+\left[B_{13}(0) + r_{13k}E_k\right]x_1 x_3 + \left[B_{23}(0) + r_{23k}E_k\right]x_2 x_3 + \left[B_{33}(0) + r_{33k}E_k\right]x_3 x_3 = 1 \end{aligned} \qquad \text{(Z-6)}$$

Κατόπιν εξαλείφοντας τους μηδενικούς όρους και χρησιμοποιώντας τις συντομογραφίες για τους ηλεκτροοπτικούς συντελεστές, η (σχ. Z-6) γίνεται:

$$\begin{aligned}&\left[B_{11}(0)+r_{1k}E_k\right]x_1^2+\left[r_{6k}E_k\right]x_1x_2+\left[r_{5k}E_k\right]x_1x_3+\\&+\left[B_{22}(0)+r_{2k}E_k\right]x_2^2+\left[r_{6k}E_k\right]x_1x_2+\left[r_{4k}E_k\right]x_2x_3+\\&+\left[B_{33}(0)+r_{3k}E_k\right]x_3^2+\left[r_{5k}E_k\right]x_1x_3+\left[r_{4k}E_k\right]x_2x_3=1\end{aligned} \tag{Z-7}$$

και τελικά:

$$\begin{aligned}&\left(1/n_1^2+r_{1k}E_k\right)x_1^2+\left(1/n_2^2+r_{2k}E_k\right)x_2^2+\left(1/n_3^2+r_{3k}E_k\right)x_3^2+\\&2r_{4k}E_kx_2x_3+2r_{5k}E_kx_1x_3+2r_{6k}E_kx_1x_2=1\end{aligned} \tag{Z-8}$$

όπου $B_{11}(0)=1/n_1^2$, $B_{22}(0)=1/n_2^2$, $B_{33}(0)=1/n_3^2$ και $B_{ij}=0$ για $i\neq j$, τα στοιχεία του μη διαταραγμένου πίνακα της αδιαπερατότητας και οι όροι $r_{ijk}E_k$ ως προς k αθροίζονται ως εξής: $r_{ijk}E_k=r_{ij1}E_1+r_{ij2}E_2+r_{ij3}E_3$.

Άρα τελικά γνωρίζοντας: α) Τα στοιχεία του μη διαταραγμένου πίνακα $B_{ij}(0)$ της αδιαπερατότητας, β) Τον (6×3) πίνακα r_{ij} με $i=1,2,..,6$ και $j=1,2,3$ των γραμμικών ηλεκτροοπτικών συντελεστών και γ) Τη διεύθυνση εφαρμογής του ηλεκτρικού πεδίου $\mathbf{E}=E_1\mathbf{i}+E_2\mathbf{j}+E_3\mathbf{k}$, τότε μέσω της (σχ. Z-8) προσδιορίζουμε το ελλ. των δ.δ. του διαταραγμένου μετά την εφαρμογή του ηλεκτρικού πεδίου στον κρύσταλλο. Είναι εμφανές ότι αν $E_k=0$ $k=1,2,3$, τότε η (σχ. Z-8) καταλήγει στη (σχ. Z-1) που περιγράφει το μη διαταραγμένο ελλ. των δ.δ.

Στη γενικότερη περίπτωση, οι κύριοι άξονες του νέου ελλειψοειδούς σε σχέση με το μη διαταραγμένο – που αντιστοιχεί στο σύστημα συντεταγμένων των κυρίων αξόνων του κρυστάλλου – δεν συμπίπτουν. Το γεγονός αυτό άλλωστε γίνεται εμφανές από το ότι στη (σχ. Z-8) υπάρχουν τα γινόμενα των x_1,x_2,x_3 ανά δύο. Προκειμένου να υπολογίσουμε τους νέους κύριους δ.δ. θα πρέπει να ορίσουμε το ελλ. των δ.δ. ως προς ένα νέο τρισορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων, που οι άξονές του συμπίπτουν με τις διευθύνσεις των κυρίων αξόνων του νέου ελλειψοειδούς. Η διαδικασία αυτή ανάγεται στη μετάβαση σε νέο σύστημα συντεταγμένων x_1',x_2',x_3' στο οποίο θα έχουν εξαλειφθεί οι όροι των γινομένων $x_i'x_j'$. Από μαθηματική άποψη είναι ισοδύναμο με τη διαγωνιοποίηση του πίνακα με στοιχεία τα $B_{ij}(\mathbf{E})$ που περιγράφεται από τη (σχ. Z-3). Στο νέο πλέον σύστημα συντεταγμένων, είναι δυνατόν να υπολογίσουμε για μια ορισμένη διεύθυνση της κυματοκαθέτου, τις ιδιοκαταστάσεις του συστήματος καθώς και τους δ.δ. που αντιστοιχούν σ' αυτές. Ο υπολογισμός αυτός γίνεται πλέον με τον γνωστό τρόπο που έχει περιγραφεί και αποδειχθεί στο (Κεφ. Β). Δηλ. από το κέντρο του νέου ελλειψοειδούς των δ.δ. φέρουμε επίπεδο κάθετο προς την κυματοκάθετη και του οποίου η τομή είναι

έλλειψη. Τότε οι δ.δ. n', n'' (από τους οποίους υπολογίζουμε τις ταχύτητες φάσης), θα είναι τα μήκη των ημιαξόνων της έλλειψης και οι διευθύνσεις τους, αυτές των πεδίων $\mathbf{D}_1, \mathbf{D}_2$ των ιδιοκαταστάσεων. Τα συνημίτονα κατεύθυνσης των $\mathbf{D}_1, \mathbf{D}_2$ και $\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2$ θα δίνονται κατά τα γνωστά από τις (σχ. Α-23, Β-13) και (σχ. Γ-9, Γ-10), αφού θα είναι γνωστές οι ταχύτητες φάσης υ', υ''.

Η προαναφερόμενη διαδικασία έχει μεγάλο ενδιαφέρον από πρακτική άποψη επειδή αφορά σε μεγάλο πλήθος εφαρμογών. Πράγματι οι ηλεκτροοπτικοί κρύσταλλοι μπορούν να χρησιμοποιηθούν σαν διαμορφωτές του πλάτους ή της φάσης οπτικών σημάτων στην ορατή ή υπέρυθρη περιοχή του Η/Μ φάσματος, σαν εκτροπείς οπτικών δεσμών, σαν φασματικά φίλτρα, σαν μέσα καταγραφής πληροφοριών και σε πολλούς άλλους τομείς της σύγχρονης οπτικής τεχνολογίας (βλ. § 8.3) . Ένα τυπικά εφαρμοζόμενο στους κρυστάλλους στατικό ηλεκτ. πεδίο , προκειμένου να εμφανιστεί το γραμμικό ηλεκτροοπτικό φαινόμενο είναι: $10\,\mathrm{kV/cm}$. Το τελευταίο είναι πολύ μικρό συγκρινόμενο με τα πεδία που επικρατούν στο εσωτερικό του (λόγω των φορτίων των ατόμων) που είναι της τάξης των $10^5\,\mathrm{kV/cm}$. Αν και οι προκαλούμενες μεταβολές στους δ.δ. λόγω του γραμμικού ηλεκτροοπτικού φαινομένου είναι της τάξης του 10^{-4} εντούτοις τα αποτελέσματα είναι μετρήσιμα με τη βοήθεια των γνωστών μεθόδων της συμβολομετρίας, της φωτοελαστικότητας ή και άλλων μεθόδων. Στον (Πίν.Ζ-4) σταχυολογούμε ενδεικτικά ένα ορισμένο αριθμό υλικών τα οποία εμφανίζουν το ηλεκτροοπτικό φαινόμενο αν και έχουν μελετηθεί πολλά περισσότερα.

Παραδείγματα

1. KH_2PO_4 (KDP) (Δισόξινο Φωσφορικό Κάλιο)

Ο κρύσταλλος του KH_2PO_4 ή (KDP) όπως σε συντομογραφία αναφέρεται στη διεθνή βιβλιογραφία, χρησιμοποιείται τα μέγιστα σαν στοιχείο διαμόρφωσης του πλάτους ή της φάσης ακτινοβολιών στην ορατή ως επί το πλείστον περιοχή του Η/Μ φάσματος. Παρουσιάζει λοιπόν ιδιαίτερο ενδιαφέρον ο υπολογισμός της διαφοράς φάσης που αναπτύσσεται μεταξύ των δύο του ιδιοκαταστάσεων, κατά τη διάδοσή τους στο εσωτερικό ενός κρυστάλλου κάτω από την επίδραση εξωτερικού ηλεκ. πεδίου. Η λύση αυτού του προβλήματος, προϋποθέτει τον υπολογισμό των δ.δ. των δύο προαναφερομένων καταστάσεων, ή ισοδύναμα των ταχυτήτων φάσης για τη διάδοση κάτω από αυτές τις συνθήκες.

Ο κρύσταλλος του KDP ανήκει στο τετραγωνικό σύστημα, με ομάδα συμμετρίας σημείου την ($\bar{4}2m$). Όπως διαπιστώνουμε και από το (Σχ. Ζ-1) διαθέτει έ-

Υλικό	Συμμετρία	Μήκος κύματος (μm)	Ηλεκτροοπτικός συντελεστής $(10^{-12}\ m/V)$	Δείκτης διάθλασης
GaAs	$\bar{4}3m$	1.15	$(T)\ r_{41} = 1.43$	$n = 3.43$
B-ZnS Sphalerite	$\bar{4}3m$	0.6	$(T)\ r_{41} = 2.1$	$n = 2.36$
		0.633	$(S)\ r_{41} = -1.6$	$n = 2.35$
$Bi_{12}GeO_{20}$	23	0.666	$(T)\ r_{41} = 3.22$	$n = 2.54$
$Bi_{12}GeO_{20}$	23	0.633	$(T)\ r_{41} = 5$	$n = 2.54$
$LiNbO_3$ (T_c=1230 ^{0}C)	3m	0.633	$(T)\ r_{13} = 9.6$	$n_0 = 2.286$ $n_e = 2.200$
			$(T)\ r_{22} = 6.8$	
			$(T)\ r_{33} = 30.9$	
			$(T)\ r_{51} = 32.6$	
$LiTaO_3$	3m	0.633	$(T)\ r_{13} = 8.4$	$n_0 = 2.176$ $n_e = 2.180$
			$(T)\ r_{33} = 30.5$	
			$(T)\ r_{22} = -0.2$	
KH_2PO_4 (KDP)	$\bar{4}2m$	0.546	$(T)\ r_{41} = 8.77$	$n_0 = 1.5115$ $n_e = 1.4698$
			$(T)\ r_{63} = 10.3$	
		0.633	$(T)\ r_{41} = 8$	$n_0 = 1.5074$ $n_e = 1.4669$
			$(T)\ r_{63} = 11$	
KD_2PO_4 (KD^*P)	$\bar{4}2m$	0.546	$(T)\ r_{63} = 26.8$	$n_0 = 1.5079$ $n_e = 1.4683$
			$(T)\ r_{41} = 8.8$	
		0.633	$(T)\ r_{63} = 24.1$	$n_0 = 1.502$ $n_e = 1.462$
			$(T)\ r_{41} = 8.8$	
$(NH_4)H_2PO_4$ (ADP)	$\bar{4}2m$	0.546	$(T)\ r_{63} = 8.56$	$n_0 = 1.5266$ $n_e = 1.4808$
			$(T)\ r_{41} = 23.76$	
		0.633	$(T)\, n_o^3\, r_{63} = 27.6$ $(T) r_{63} = 7.8$	$n_0 = 1.5220$ $n_e = 1.4773$
			$(T)\ r_{41} = 23.41$	
$BaTiO_3$ (T_c=395 ^{0}K)	4mm	0.546	$(T)\ r_{51} = 1640$	$n_0 = 2.437$ $n_e = 2.365$
			$(S)\ r_{51} = 820$	

(T): υπό σταθερή μηχανική τάση – ***(S)***: υπό σταθερή σχ. παραμόρφωση

(Πίν. Ζ-4)

ναν άξονα τέταρτης τάξης (διεύθυνση του κυρίου άξονα x_3) που είναι και ο οπτικός του άξονας. Επίσης τρεις ορθογώνιους μεταξύ τους άξονες δεύτερης τάξης καθώς και δύο επίπεδα συμμετρίας. Είναι μονοάξονας αρνητικός (π.χ. για $\lambda = 0.633\mu\text{m}$, $n_1 = n_2 = n_o = 1.5074$ και $n_3 = n_e = 1.4669$). Οι τιμές των ηλεκτροοπτικών του συντελεστών φαίνονται στους (Πίν. Ζ-1, Ζ-4) από όπου πάλι για $\lambda = 0.633\mu\text{m}$ $r_{41} = r_{52} = 8\times10^{-12}\,\text{m/V}$ και $r_{63} = 11\times10^{-12}\,\text{m/V}$. Αν υποθέσουμε τώρα ότι στον κρύσταλλο εφαρμόζουμε ένα στατικό ηλεκ. πεδίο $\mathbf{E} = E_1\mathbf{i} + E_2\mathbf{j} + E_3\mathbf{k}$, το νέο ελλ. των δ.δ. θα πάρει τη μορφή (σχ. Ζ-8):

$$\frac{x_1^2}{n_o^2} + \frac{x_2^2}{n_o^2} + \frac{x_3^2}{n_e^2} + 2x_2x_3r_{41}E_1 + 2x_1x_3r_{41}E_2 + 2x_1x_2r_{63}E_3 = 1 \qquad \text{(Ζ-9)}$$

επειδή μόνο $r_{41} = r_{52} \neq 0$, $r_{63} \neq 0$ και $n_1 = n_2 = n_o, n_3 = n_e$. Από την τελευταία σχέση είναι εμφανές ότι η εφαρμογή του ηλεκτ. πεδίου 'παραμορφώνει' το ελλ. των δ.δ. και το 'περιστρέφει' σε σχέση με το σύστημα συντεταγμένων των κυρίων αξόνων x_1, x_2, x_3. Με τα δεδομένα αυτά, σκοπός μας στα επόμενα είναι: α) Ο προσδιορισμός των ιδιοκαταστάσεων και των δ.δ. (ταχυτήτων φάσης) για μια ορισμένη διεύθυνση διάδοσης του φωτός (της κυματοκαθέτου) και β) Ο υπολογισμός των διευθύνσεων των κυρίων αξόνων καθώς και των κυρίων δ.δ. του νέου ελλειψοειδούς (βλ. μέθοδο Jacobi στα επόμενα). Πριν όμως παραθέσουμε την προαναφερόμενη μέθοδο, θα επιδιώξουμε την επίλυση (όσο αυτό είναι δυνατόν) ορισμένων απλών προβλημάτων, βασιζόμενοι κατά κύριο λόγο στην περιγραφή του ελλειψοειδούς των δ.δ. σε άλλο κατάλληλο σ.σ. Το τελευταίο από μαθηματική άποψη σημαίνει τον μετασχηματισμό της (σχ. Ζ-9) μεταξύ διαφορετικών σ.σ.

α) *Κρύσταλλος* KH_2PO_4 (KDP). Π*εδίο κατά τη διεύθυνση του άξονα* x_3

Επειδή $\mathbf{E} = E_3\mathbf{k}$ η (σχ. Ζ-9) γίνεται:

$$\frac{x_1^2}{n_o^2} + \frac{x_2^2}{n_o^2} + \frac{x_3^2}{n_e^2} + 2r_{63}E_3x_1x_2 = 1 \qquad \text{(Ζ-10)}$$

Στη γενικότερη περίπτωση θα πρέπει να προσδιορίσουμε το νέο σύστημα συντεταγμένων x_1', x_2', x_3' έτσι ώστε:

$$\frac{x_1'^2}{n_1'^2}+\frac{x_2'^2}{n_2'^2}+\frac{x_3'^2}{n_3'^2}=1 \qquad \text{(Z-11)}$$

όπου x_1', x_2', x_3' οι διευθύνσεις των κυρίων αξόνων του νέου ελλειψοειδούς. Τότε τα μήκη αυτών των αξόνων θα είναι: $2n_1', 2n_2', 2n_3'$. Δηλ. το διπλάσιο των δ.δ. σ' αυτές τις διευθύνσεις και θα εξαρτώνται από την ένταση του εφαρμοζόμενου ηλεκτ. πεδίου.

Είναι γνωστό όμως ότι οι συντεταγμένες x_1, x_2, x_3 του παλαιού συστήματος συνδέονται με τις νέες x_1', x_2', x_3' μέσω των σχέσεων που εξάγονται από τον (Πίν.Z-5) (βλ. Άσκ. 17-Λυμένη) όπου:

		Παλαιό σύστημα		
		x_1	x_2	x_3
Νέο σύστημα	x_1'	a_{11}	a_{12}	a_{13}
	x_2'	a_{21}	a_{22}	a_{23}
	x_3'	a_{31}	a_{32}	a_{33}

(Πίν. Z-5)

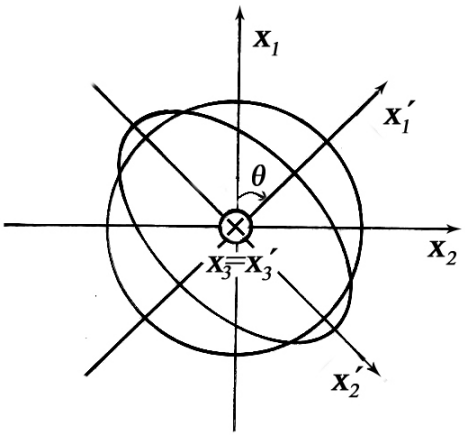
$a_{ij}=\cos\widehat{x_i'x_j}$ είναι τα συνημίτονα κατεύθυνσης μεταξύ των νέων και των παλαιών αξόνων. Επομένως οι x_1, x_2, x_3 θα εκφράζονται συναρτήσει των x_1', x_2', x_3' από τις εξής σχέσεις:

$$\begin{aligned} x_1 &= a_{11}x_1'+a_{21}x_2'+a_{31}x_3' \\ x_2 &= a_{12}x_1'+a_{22}x_2'+a_{32}x_3' \\ x_3 &= a_{13}x_1'+a_{23}x_2'+a_{33}x_3' \end{aligned} \qquad \text{(Z-12)}$$

Για το συγκεκριμένο όμως παράδειγμα της εφαρμογής του πεδίου κατά τη διεύθυνση x_3 από τη (σχ. Z-10) συμπεραίνουμε ότι $x_3' \equiv x_3$ (δηλ. η περιστροφή θα γίνει ως προς τον άξονα x_3) επειδή ο μικτός όρος του γινομένου περιλαμβάνει μόνο τα x_1, x_2. Επομένως για να ταυτιστούν οι άξονες x_1, x_2 με τους x_1', x_2' που αντιστοιχούν με τις διευθύνσεις των κυρίων αξόνων της έλλειψης ως προς x_1', x_2' θα πρέπει: $a_{13}=a_{23}=a_{31}=a_{32}=0$ και $a_{33}=1$. (στροφή κατά τη φορά των δεικτών του ρολογιού $\theta<0$). Επομένως οι (σχ. Z-12) γίνονται (βλ.(Σχ. Z-6)):

$$x_1=\cos\theta x_1'-\sin\theta x_2', \quad x_2=\sin\theta x_1'+\cos\theta x_2', \quad x_3=x_3' \qquad \text{(Z-13)}$$

Αντικαθιστούμε τελικά τις (σχ. Ζ-13) στη (σχ. Ζ-10) και μετά την εκτέλεση των



(Σχ. Ζ-6)

πράξεων θα έχουμε:

$$\frac{x_1'^2}{n_o^2}+\frac{x_2'^2}{n_o^2}+\frac{x_3'^2}{n_e^2}+2r_{63}E_3\left(\sin\theta\cos\theta x_1'^2-\sin\theta\cos\theta x_2'^2+\right.$$

$$\left.+\cos^2\theta x_1'x_2'-\sin^2\theta x_1'x_2'\right)=1 \qquad \text{(Z-14)}$$

Προκειμένου τώρα η (σχ. Ζ-14) να τεθεί στη μορφή της (σχ. Ζ-11), θα πρέπει το αλγεβρικό άθροισμα των όρων των γινομένων $x_1'x_2'$ να είναι ίσο με μηδέν. Δηλ. $\left(\cos^2\theta-\sin^2\theta\right)x_1'x_2'=0$ ή $\cos 2\theta=0$ επειδή $x_1'x_2'\neq 0$. Επομένως $\theta=45^0$ (ή $\theta=-45^0$ όπως φαίνεται στο (Σχ. Ζ-6)) . Άρα από τις σχέσεις αυτές προσδιορίζεται η αριθμητική τιμή της γωνίας στροφής θ. Τελικά επειδή $2\sin\theta\cos\theta=\sin 2\theta$ και $\theta=45^0$ η (σχ. Ζ-14) γίνεται:

$$\frac{x_1'^2}{n_o^2}+\frac{x_2'^2}{n_o^2}+\frac{x_3'^2}{n_e^2}+r_{63}E_3x_1'^2-r_{63}E_3x_2'^2=1$$

ή:

$$\left(\frac{1}{n_o^2}+r_{63}E_3\right)x_1'^2+\left(\frac{1}{n_o^2}-r_{63}E_3\right)x_2'^2+\frac{x_3'^2}{n_e^2}=1 \qquad \text{(Z-15)}$$

Αντιπαραβάλλοντας τώρα τις (σχ. Ζ-15) και (σχ. Ζ-11) θα έχουμε:

$$\frac{1}{n_1'^2}=\frac{1}{n_o^2}+r_{63}E_3,\qquad \frac{1}{n_2'^2}=\frac{1}{n_o^2}-r_{63}E_3,\qquad \frac{1}{n_3'^2}=\frac{1}{n_e^2} \qquad \text{(Z-16)}$$

Από τη σχέση: $\frac{1}{n_1'^2} = \frac{1}{n_o^2} + r_{63}E_3 \Rightarrow \frac{1}{n_o^2} - \frac{1}{n_1'^2} = -r_{63}E_3 \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{n_1'^2 - n_o^2}{n_o^2 n_1'^2} = \frac{(n_1' + n_o)(n_1' - n_o)}{n_o^2 n_1'^2} \simeq \frac{2(n_1' - n_o)}{n_o^3} = -r_{63}E_3$ επειδή: $n_1 \simeq n_o$. Τότε:

$$n_1' = n_o - \frac{1}{2} n_o^3 r_{63} E_3 \qquad \text{(Z-17)}$$

Από την δεύτερη και την τρίτη των (σχ. Z-16) προκύπτει με τον ίδιο τρόπο:

$$n_2' = n_o + \frac{1}{2} n_o^3 r_{63} E_3 \qquad \text{(Z-18)}$$

και από την τρίτη: $n_3' = n_e$ (Z-19)

Τελικά n_1', n_2', n_3' θα είναι οι κύριοι δ.δ. του νέου τριαξονικού ελλ. των δ.δ. μετά την εφαρμογή του πεδίου $\mathbf{E} = E_3\mathbf{k}$ στον κρύσταλλο του KDP. Και επειδή $n_1' \neq n_2' \neq n_3'$ ο κρύσταλλος από μονοάξονας (για $E_3 = 0$ η (σχ. Z-10) γίνεται: $\frac{x_1^2}{n_o^2} + \frac{x_2^2}{n_o^2} + \frac{x_3^2}{n_e^2} = 1$) μετατρέπεται σε διάξονα (σχ. Z-15).

Σαν πρακτική εφαρμογή, θέλουμε να χρησιμοποιήσουμε ένα πλακίδιο αυτού του κρυστάλλου (πάχους $d = 1\text{cm}$) με παράλληλες έδρες κομμένες κάθετα προς τον άξονα x_3, σαν καθυστερητή $\lambda/4$ για φως μ.κ. $\lambda = 0.633\text{nm}$, (κόκκινο του Laser He-Ne) διαδιδόμενο κατά μήκος του. Ποιο πεδίο θα πρέπει να εφαρμόσουμε κατά μήκος των δύο παραλλήλων εδρών του;

Όπως έχουμε αποδείξει προηγουμένως με το πεδίο κατά τη διεύθυνση x_3 η τελευταία παύει πλέον να είναι οπτικός άξονας (βλ. Σχ. Z-6). Επομένως για διάδοση στην ίδια διεύθυνση η τομή του νέου πλέον τριαξονικού ελλ. των δ.δ. θα μας δώσει έλλειψη (και όχι κύκλο) με άξονες κατά x_1', x_2' . Αυτές θα είναι και οι διευθύνσεις ταλάντωσης των ιδιοκαταστάσεων $\mathbf{D}_1, \mathbf{D}_2$. Όσο για τους νέους δ.δ. θα δίνονται από τις (σχ. Z-17, Z-18). Επομένως η διαφορά φάσης των δύο διαταραχών στην έξοδο του πλακιδίου πάχους d θα είναι $\Delta\phi = (2\pi/\lambda)(n_2' - n_1')d$. Και για να είναι το πλακίδιο $\lambda/4$ θα πρέπει $\Delta\phi = \pi/2$. Αλλά $n_2' - n_1' = n_o^3 r_{63} E_3$. Επομένως το πεδίο κατά μήκος του κρυστάλλου θα δίνεται από τη σχέση:

$$E_3 = \lambda / 4dn_o^3 r_{63} \qquad \text{(Z-20)}$$

και επειδή (Σχ. Z-1) $n_o = 1.5074$, $r_{63} = 11\times10^{-12}\,\mathrm{m/V}$, $\lambda = 0.633\mu\mathrm{m}$ για $d = 1\mathrm{cm}$ βρίσκουμε: $E_3 \simeq 4.2\,\mathrm{kV/cm}$.

β) *Κρύσταλλος* KH_2PO_4 (KDP). *Πεδίο κατά τη διεύθυνση του άξονα* x_1

Επειδή $\mathbf{E} = E_1\mathbf{i}$ η (σχ. Z-9) γίνεται:

$$\frac{x_1^2}{n_o^2} + \frac{x_2^2}{n_o^2} + \frac{x_3^2}{n_e^2} + 2r_{41}E_1x_2x_3 = 1 \qquad \text{(Z-21)}$$

Με τον ίδιο όπως και προηγουμένως τρόπο θα πρέπει να προσδιορίσουμε το νέο σύστημα συντεταγμένων x_1', x_2', x_3' έτσι ώστε να ισχύει η (σχ. Z-11). Όπου x_1', x_2', x_3' οι διευθύνσεις των κυρίων αξόνων το νέου ελλειψοειδούς των δεικτών διάθλασης. n_1', n_2', n_3' τα μήκη των ημιαξόνων που αντιπροσωπεύουν τους κύριους δ.δ. και που θα εξαρτώνται από το εφαρμοζόμενο εξωτερικά ηλεκτ. πεδίο. Επειδή όμως στην προκειμένη περίπτωση ο μικτός όρος του γινομένου στη (σχ. Z-21) περιλαμβάνει μόνο το γινόμενο x_2x_3, συμπεραίνουμε ότι η περιστροφή του συστήματος συντεταγμένων x_1, x_2, x_3 θα γίνει ως προς τον άξονα x_1 δηλ. $x_1 \equiv x_1'$. Επομένως για να ταυτιστούν οι άξονες x_2, x_3 με τους x_2', x_3' που αντιστοιχούν με τις διευθύνσεις των κυρίων αξόνων της έλλειψης ως προς x_2', x_3' θα πρέπει να εκτελέσουμε στροφή κατά τη φορά των δεικτών του ρολογιού ($\theta < 0$). Τότε:

$$a_{12} = a_{13} = a_{21} = a_{31} = 0 \ , \ a_{11} = 1 .$$

Και άρα:

$$a_{22} = \cos\theta, a_{23} = \sin\theta, a_{32} = -\sin\theta, a_{33} = \cos\theta .$$

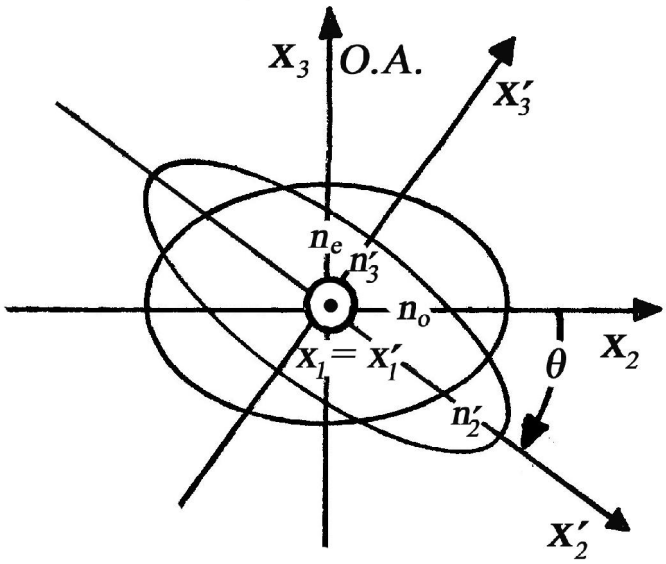
Τότε με τη βοήθεια του (Πίν.Z-5) ο μετασχηματισμός των συντεταγμένων θα δίνεται από τις σχέσεις:

$$x_1 = x_1' \ , \ x_2 = \cos\theta x_2' - \sin\theta x_3' \ , \ x_3 = \sin\theta x_2' + \cos\theta x_3' \qquad \text{(Z-22)}$$

Οπότε αν αντικαταστήσουμε τις (σχ. Z-22) στη (σχ. Z-21) μετά την εκτέλεση των πράξεων θα έχουμε:

$$\frac{x_1'^2}{n_o^2}+\left(\frac{\cos^2\theta}{n_o^2}+\frac{\sin^2\theta}{n_e^2}+r_{41}E_1\sin 2\theta\right)x_2'^2+\left(\frac{\sin^2\theta}{n_o^2}+\frac{\cos^2\theta}{n_e^2}-r_{41}E_1\sin 2\theta\right)x_3'^2+$$

$$+\left(\frac{\sin 2\theta}{n_e^2}-\frac{\sin 2\theta}{n_o^2}+2r_{41}E_1\cos 2\theta\right)x_2'x_3'=1 \qquad \text{(Z-23)}$$



(Σχ. Z-7)

Προκειμένου τώρα η (σχ. Z-23) να τεθεί στη μορφή της (σχ. Z-11) θα πρέπει ο συντελεστής του αλγεβρικού αθροίσματος του γινομένου $x_2'x_3'$ να γίνει ίσος με το μηδέν. Δηλ. $\sin 2\theta\left(\frac{1}{n_e^2}-\frac{1}{n_o^2}\right)+2r_{41}E_1\cos 2\theta=0$, οπότε τελικά:

$$\tan 2\theta = 2r_{41}E_1\Big/\left(\frac{1}{n_o^2}-\frac{1}{n_e^2}\right) \qquad \left(n_e<n_o \Rightarrow \tan\theta<0\right) \qquad \text{(Z-24)}$$

Άρα επειδή $\theta<0$ η πραγματική στροφή που καθορίζεται από τη (Σχ. Z-24) γίνεται κατά τη φορά των δεικτών του ρολογιού. Στην ίδια (σχ. Z-24) θα καταλήγαμε αν η αρχική στροφή του σ.σ. γινόταν κατά τη φορά των δεικτών του ρολογιού. Τότε η (σχ. Z-23) γίνεται:

$$\frac{x_1'^2}{n_o^2}+\left(\frac{\cos^2\theta}{n_o^2}+\frac{\sin^2\theta}{n_e^2}+r_{41}E_1\sin 2\theta\right)x_2'^2+\left(\frac{\sin^2\theta}{n_o^2}+\frac{\cos^2\theta}{n_e^2}-r_{41}E_1\sin 2\theta\right)x_3'^2=1 \qquad \text{(Z-25)}$$

ή σε συνδυασμό με την (σχ. Z-24):

$$\frac{x_1'^2}{n_o^2}+\left(\frac{1}{n_o^2}+r_{41}E_1\tan\theta\right)x_2'^2+\left(\frac{1}{n_e^2}-r_{41}E_1\tan\theta\right)x_3'^2=1 \qquad \text{(Z-26)}$$

Αντιπαραβάλλοντας τώρα τη (σχ. Z-26) με τη (Z-11) θα έχουμε:

$$\frac{1}{n_1'^2}=\frac{1}{n_o^2} \qquad \text{(Z-27)}$$

$$\frac{1}{n_2'^2}=\frac{1}{n_o^2}+r_{41}E_1\tan\theta \qquad \text{(Z-28)}$$

$$\frac{1}{n_3'^2}=\frac{1}{n_e^2}-r_{41}E_1\tan\theta \qquad \text{(Z-29)}$$

Και για $n_2' \simeq n_o$ και $n_3' \simeq n_e$ οι παραπάνω σχέσεις γίνονται:

$$n_1'=n_o \qquad \left(n_1'=n_1=n_o\right) \qquad \text{(Z-30)}$$

$$n_2'=n_o-\frac{1}{2}n_o^3r_{41}E_1\tan\theta \qquad \left(n_2'>n_2=n_o\right) \qquad \text{(Z-31)}$$

$$n_3'=n_e+\frac{1}{2}n_e^3r_{41}E_1\tan\theta \qquad \left(n_3'<n_3=n_e\right) \qquad \text{(Z-32)}$$

όπου η γωνία θ δίνεται από τη (σχ. Z-24). Τελικά n_1', n_2', n_3' είναι οι κύριοι δ.δ. του νέου τριαξονικού ελλ.των δ.δ. για πεδίο κατά τη διεύθυνση του άξονα x_1. Και επειδή στην περίπτωσή μας $n_3'<n_1'<n_2'$ επειδή $\tan\theta<0$ $\left(n_e<n_o\right)$, ο κρύσταλλος από μονοάξονας για $\mathbf{E}=0$ καθίσταται διάξονας για $\mathbf{E}=E_1\mathbf{i}$.

2) $LiNbO_3$ (Νιοβικό Λίθιο)

Ο κρύσταλλος του $LiNbO_3$ χρησιμοποιείται σαν στοιχείο διαμόρφωσης του πλάτους ή της φάσης ακτινοβολιών στην ορατή ως επί το πλείστον περιοχή του Η/Μ φάσματος. Ανήκει στο τριγωνικό σύστημα, στην ομάδα συμμετρίας σημείου ($3m$). Όπως μπορούμε να διαπιστώσουμε από το (Σχ. Z-2) διαθέτει ένα άξονα τρίτης τάξης (διεύθυνση του κρυσταλλογραφικού άξονα x_3) που είναι και ο οπτικός άξονας του κρυστάλλου, καθώς και τρία επίπεδα συμμετρίας. Οι τιμές των τεσσάρων ηλεκτροοπτικών του συντελεστών, βρίσκονται στα περιεχόμενα του (Σχ. Z-2) όπου για $\lambda=0.633\mu\text{m}$ έχουμε: $r_{22}=6.8\times10^{-12}\,\text{m/V}$, $r_{33}=30.9\times10^{-12}\,\text{m/V}$, $r_{13}=9.6\times10^{-12}\,\text{m/V}$ $r_{51}=32.6\times10^{-12}\,\text{m/V}$, με την προϋπόθεση ότι: $\left(\text{m}\perp x_1\right)$.

α) *Κρύσταλλος* $LiNbO_3$ *. Πεδίο κατά τη διεύθυνση του άξονα* x_3

Από τη (σχ. Ζ-8) για $\mathbf{E} = E_3\mathbf{k}$ η εξίσωση του ελλ. των δ.δ. γράφεται:

$$\left(1/n_1^2 + r_{13}E_3\right)x_1^2 + \left(1/n_2^2 + r_{23}E_3\right)x_2^2 + \left(1/n_3^2 + r_{33}E_3\right)x_3^2 +$$

$$+2r_{43}E_3x_2x_3 + 2r_{53}E_3x_1x_3 + 2r_{63}E_3x_1x_2 = 1$$

Αλλά επειδή: $n_1 = n_2 = n_o$, $n_3 = n_e$, $r_{23} = r_{13}$, $r_{43} = r_{53} = r_{63} = 0$ θα έχουμε:

$$\left(1/n_o^2 + r_{13}E_3\right)x_1^2 + \left(1/n_o^2 + r_{13}E_3\right)x_2^2 + \left(1/n_e^2 + r_{33}E_3\right)x_3^2 = 1 \qquad \text{(Z-33)}$$

Η τελευταία σχέση παρατηρούμε ότι δεν περιλαμβάνει μικτούς όρους (δηλ. με τη μορφή γινομένων ανά δύο των x_1, x_2, x_3) επομένως ο πίνακας μετασχηματισμού των συντεταγμένων μεταξύ των x_1, x_2, x_3 και x_1', x_2', x_3' είναι μοναδιαίος. Άρα: $x_1 \equiv x_1'$, $x_2 \equiv x_2'$, $x_3 \equiv x_3'$. Όπως λοιπόν βλέπουμε το μεν σχήμα του νέου ελλ. των δ.δ. μεταβάλλεται, όχι όμως και ο προσανατολισμός του. Κάτω από αυτές τις συνθήκες (δηλ. για πεδίο κατά τη διεύθυνση του x_3) η (σχ. Ζ-33) συγκρινόμενη με την (σχ. Ζ-11) μας δίνει:

$$\frac{1}{n_1'^2} = \frac{1}{n_o^2} + r_{13}E_3 \ , \ \frac{1}{n_2'^2} = \frac{1}{n_o^2} + r_{13}E_3 \ , \ \frac{1}{n_3'^2} = \frac{1}{n_e^2} + r_{33}E_3 \qquad \text{(Z-34)}$$

Με την προϋπόθεση ότι $n_1' = n_2' \simeq n_o$ και $n_3' \simeq n_e$ θα έχουμε:

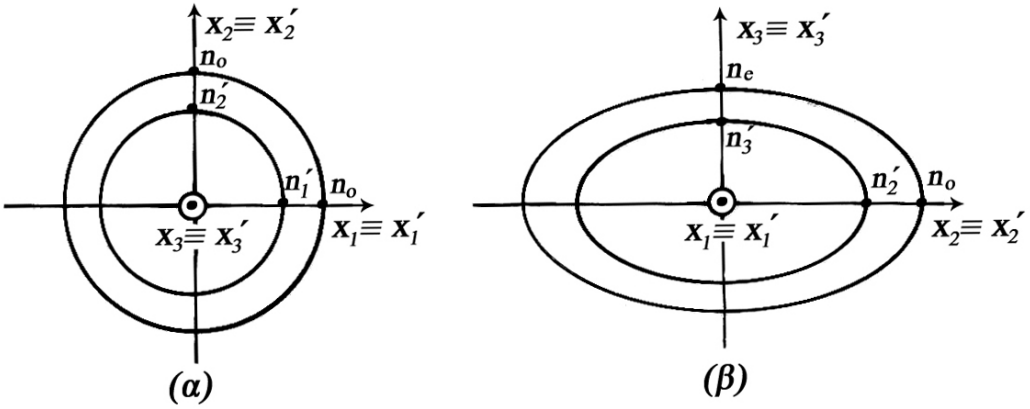
$$n_1' = n_o - \frac{1}{2}n_o^3 r_{13}E_3 \qquad \text{(Z-35)}$$

$$n_2' = n_o - \frac{1}{2}n_o^3 r_{13}E_3 \qquad \text{(Z-36)}$$

$$n_3' = n_e - \frac{1}{2}n_e^3 r_{33}E_3 \qquad \text{(Z-37)}$$

Η επισκόπηση των εξισώσεων (σχ. Ζ-35,36,37) μας οδηγεί στο συμπέρασμα ότι με το πεδίο κατά τη διεύθυνση x_3 ο κρύσταλλος του $LiNbO_3$ παραμένει μονοάξονας ($n_1' = n_2' \neq n_3'$) και μάλιστα αρνητικός επειδή $n_3' - n_2' < 0$. Αν υποθέσουμε ότι το πεδίο εφαρμόζεται κατά τη διεύθυνση x_3 και το φως διαδίδεται κατά τον άξονα x_1

τότε η τομή του νέου ελλ. των δ.δ. κάθετα προς τη διεύθυνση αυτή (Σχ. Z-8β) μας δίνει τους δ.δ. των ιδιοκαταστάσεων των δύο διαταραχών (τακτικής και έκτακτης). Δηλ. για $x_1' = 0$ η εξίσωση της έλλειψης θα είναι ($x_1 \equiv x_1'$, $x_2 \equiv x_2'$, $x_3 \equiv x_3'$):



(Σχ. Z-8)

$$\frac{x_2'^2}{n_2'^2} + \frac{x_3'^2}{n_3'^2} = x_2^2\left[\left(\frac{1}{n_o^2} + r_{13}E_3\right)^2\right]^{-1} + x_3^2\left[\left(\frac{1}{n_e^2} + r_{33}E_3\right)^2\right]^{-1} = 1 \qquad \text{(Z-38)}$$

Επομένως η διπλοθλαστικότητα $n_3' - n_2'$ προς αυτή τη διεύθυνση θα είναι με βάση τις (σχ. Z-36,37):

$$n_3' - n_2' = \left(n_e - n_o\right) - \left(1/2\right)\left(n_e^3 r_{33} - n_o^3 r_{13}\right) \qquad \text{(Z-39)}$$

Αν υποθέσουμε τώρα ότι το πεδίο είναι κατά τη διεύθυνση x_3 και το φως διαδίδεται κατά την ίδια διεύθυνση, τότε η τομή του νέου ελλ. των δ.δ. κάθετα προς τη διεύθυνση αυτή (Σχ. Z-8α) θα μας δώσει πάλι τους δ.δ. των ιδιοκαταστάσεων των δύο διαταραχών (τακτικής και έκτακτης) γι' αυτήν την περίπτωση. Δηλ. για $x_3' = 0$ η εξίσωση θα είναι κύκλος:

$$\frac{x_1'^2}{n_1'^2} + \frac{x_2'^2}{n_2'^2} = x_1^2\left[\left(\frac{1}{n_o^2} + r_{13}E_3\right)^2\right]^{-1} + x_2^2\left[\left(\frac{1}{n_o^2} + r_{13}E_3\right)^2\right]^{-1} = 1$$

Επομένως η διπλοθλαστικότητα προς αυτή τη διεύθυνση θα είναι με βάση τις (σχ. Z-35,36): $n_2' - n_1' = 0$ (διεύθυνση οπτικού άξονα).

β) Κρύσταλλος $LiNbO_3$ *. Πεδίο κατά τη διεύθυνση του άξονα* x_1

Από τη (σχ. Z-8) για $\mathbf{E} = E_1\mathbf{i}$ η εξίσωση του διαταραγμένου ελλειψοειδούς των δ.δ. για $n_1 = n_2 = n_o$, $n_3 = n_e$ και $r_{61} = -r_{22} \neq 0$, $r_{11} = r_{21} = r_{31} = 0$, $r_{51} \neq 0$ θα είναι:

$$\frac{x_1^2}{n_o^2} + \frac{x_2^2}{n_o^2} + \frac{x_3^2}{n_e^2} + 2r_{51}E_1x_1x_3 - 2r_{22}E_1x_1x_2 = 1 \qquad \text{(Z-40)}$$

Στην προκειμένη περίπτωση θα πρέπει να προσδιορίσουμε το νέο σύστημα συντεταγμένων x_1', x_2', x_3' δηλ. τις διευθύνσεις των αξόνων του νέου ελλειψοειδούς, έτσι ώστε η (σχ. Z-40) να πάρει τη μορφή της (σχ. Z-11). Κατά τα γνωστά έπεται ο προσδιορισμός των κυρίων δ.δ. n_1', n_2', n_3'. Για το συγκεκριμένο όμως πρόβλημα απαιτείται μια επίπονη διαδικασία περισσότερων μετασχηματισμών του ενός. Το γεγονός οφείλεται στο ότι οι μικτοί όροι των γινομένων είναι περισσότεροι του ενός (δύο στην περίπτωσή μας) και στη γενικότερη περίπτωση είναι τρεις δηλ. οι x_1x_2, x_1x_3, x_2x_3. Για το λόγο αυτό, θα προσπαθήσουμε ν' αντιμετωπίσουμε τα προβλήματα αυτού του είδους σε μια γενικότερη μορφή, προκειμένου να επιτύχουμε την επίλυσή τους. Αυτό αφορά:

1) Την ανάπτυξη μεθόδου υπολογισμού των δ.δ. (ταχυτήτων φάσης) και των ιδιοκαταστάσεων (καταστάσεων πόλωσης των $\mathbf{D}_1, \mathbf{D}_2$) για την περίπτωση: α) Εφαρμογής του πεδίου σε τυχαία διεύθυνση στο εσωτερικό του κρυστάλλου και β) Διεύθυνσης διάδοσης του φωτός (διεύθυνση κυματοκαθέτου $\mathbf{k}$) το ίδιο τυχαία.

2) Την ανάπτυξη μεθόδου προσδιορισμού του διαταραγμένου ελλ. των δ.δ. μετά την εφαρμογή του πεδίου, δηλ. α) Του υπολογισμού των διευθύνσεων x_1', x_2', x_3' των κυρίων αξόνων του στο εσωτερικό του κρυστάλλου και β) Του υπολογισμού των κυρίων δ.δ. n_1', n_2', n_3'.

Τα προηγούμενα με την προϋπόθεση ότι οι προς μελέτη κρύσταλλοι δεν είναι οπτικά ενεργοί και είναι μαγνητικά ισότροποι. Η διαδικασία που ακολουθείται είναι αυτή της μεθόδου Jacobi.*

---

* T.A. Maldonado and T.K. Gaylord: ' Electrooptic effect calculations: Simplified procedure for arbitrary cases' App. Optics Vol. 27 No. 24, 5051-5066 (Dec. 1988).

1) Μέθοδος υπολογισμού των δ.δ. (ταχυτήτων φάσης) και των ιδιοκαταστάσεων ή ιδιοδιανυσμάτων (καταστάσεων πόλωσης των $\mathbf{D}_1, \mathbf{D}_2$) για την περίπτωση: α) Εφαρμογής του πεδίου σε τυχαία διεύθυνση στο εσωτερικό του κρυστάλλου και β) Για διεύθυνση διάδοσης του φωτός (διεύθυνση κυματοκαθέτου $\mathbf{k}$) το ίδιο τυχαία

Ήδη έχει αναφερθεί και περιγραφεί ποσοτικά, η επίδραση του ηλεκτ. πεδίου στη διαμόρφωση του διαταραγμένου ελλ. των δ.δ. ως προς το σύστημα συντεταγμένων των κυρίων αξόνων x_1, x_2, x_3. Κάτω από αυτές τις συνθήκες το ελλειψοειδές παίρνει τη μορφή που μας δίνει η (σχ. Ζ-8):

$$\begin{aligned}&\left(1/n_1^2 + r_{1k}E_k\right)x_1^2 + \left(1/n_2^2 + r_{2k}E_k\right)x_2^2 + \left(1/n_3^2 + r_{3k}E_k\right)x_3^2 + \\ &2r_{4k}E_k x_2 x_3 + 2r_{5k}E_k x_1 x_3 + 2r_{6k}E_k x_1 x_2 = 1\end{aligned} \qquad \text{(Ζ-41)}$$

όπου $r_{ik}E_k = r_{i1}E_1 + r_{i2}E_2 + r_{i3}E_3$, $\mathbf{E} = E_1\mathbf{i} + E_2\mathbf{j} + E_3\mathbf{k}$. r_{ij} $i = 1,2,..,6$ $j = 1,2,3$ οι ηλεκτροοπτικοί συντελεστές και n_1, n_2, n_3 οι κύριοι δ.δ. του μη διαταραγμένου ελλ. των δ.δ. Από απλή επισκόπηση της (σχ. Ζ-41) διαπιστώνουμε ότι η εφαρμογή του ηλεκτ. πεδίου μεταβάλλει το σχήμα (και) ή το μέγεθος (και) ή τον προσανατολισμό του μη διαταραγμένου ελλ. των δ.δ. το οποίο εκφραζόταν από τη από τη σχέση:

$$\frac{x_1^2}{n_1^2} + \frac{x_2^2}{n_2^2} + \frac{x_3^2}{n_3^2} = 1 \qquad \text{(Ζ-42)}$$

Σημείωση

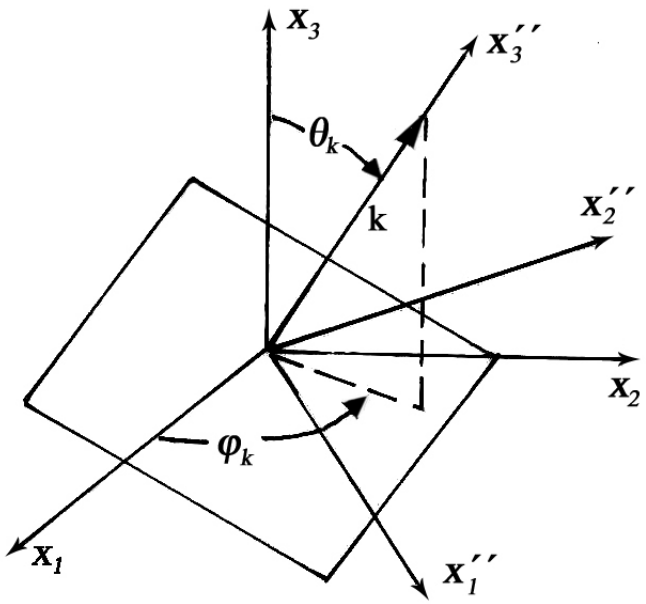
Δεν θα πρέπει να συγχέουμε από εδώ και στο εξής τους δ.δ. n_1, n_2 των δύο συγκεκριμένων ιδιοκαταστάσεων του εκάστοτε προβλήματός μας υπό την επίδραση πεδίου, με τους δύο από τους κύριους δ.δ. n_1, n_2, n_3 του μη διαταραγμένου ελλ. των δ.δ. Η μόνη περίπτωση που θα μπορούσαν να ταυτίζονται, είναι αυτή της διάδοσης στον μη διαταραγμένο κρύσταλλο (δηλ. χωρίς την επίδραση πεδίου) κατά τη διεύθυνση του κρυσταλλογραφικού του άξονα x_3.

Κατ' αρχή απλοποιούμε τη (σχ. Ζ-41) θέτοντάς την στη μορφή:

$$Ax_1^2 + Bx_2^2 + Cx_3^2 + 2Fx_2x_3 + 2Gx_1x_3 + 2Hx_1x_2 = 1 \qquad \text{(Z-43)}$$

όπου:
$$\left.\begin{array}{l} A = 1/n_1^2 + r_{1k}E_k \ , \ B = 1/n_2^2 + r_{2k}E_k \ , \ C = 1/n_3^2 + r_{3k}E_k \\ F = r_{4k}E_k \ , \ G = r_{5k}E_k \ , \ H = r_{6k}E_k \end{array}\right\} \qquad \text{(Z-44)}$$

Η κυματοκάθετη **k** μπορεί να καθοριστεί συναρτήσει των σφαιρικών συντεταγμένων ϕ_k, θ_k στο σύστημα x_1, x_2, x_3. Οπότε για καθορισμένη από το εκάστοτε πρόβλημά μας διεύθυνση διάδοσης του φωτός στον κρύσταλλο, μπορούμε να προσδιορίσουμε την τομή του διαταραγμένου ελλειψοειδούς της (σχ. Z-43), με ένα επίπεδο κάθετο στην **k** που διέρχεται από το κέντρο του. Η τομή αυτή εν γένει θα είναι έλλειψη της οποίας οι ημιάξονες θα καθορίζουν τις διευθύνσεις των ιδιοκαταστάσεων $\mathbf{D}_1, \mathbf{D}_2$ οι οποίες διαδίδονται κατά μήκος της **k**. Όσο για τα μήκη των ημιαξόνων θα είναι οι δ.δ. n_1, n_2.



(Σχ. Z-9)

Για το σκοπό αυτό βρίσκουμε τις σχέσεις μετασχηματισμού των συντεταγμένων x_1, x_2, x_3 συναρτήσει των x_1'', x_2'', x_3'' όπου το νέο σύστημα συντεταγμένων x_1'', x_2'', x_3'' καθορίζεται έτσι ώστε ο άξονας x_3'' να είναι παράλληλος με την **k** και ταυτόχρονα ο x_1'' να βρίσκεται στο επίπεδο x_3, x_3'' όπως φαίνεται στο (Σχ. Z-9). Θα πρέπει να σημειώσουμε παρεμπιπτόντως ότι το σύστημα x_1'', x_2'', x_3'' δεν ταυτίζεται με το σύστημα x_1', x_2', x_3' που καθορίζει τις διευθύνσεις των κυρίων αξόνων του

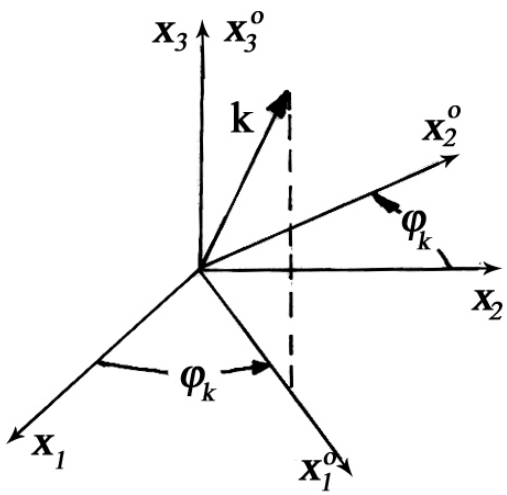
διαταραγμένου ελλ. των δ.δ. Ο μετασχηματισμός $x_1, x_2, x_3 \to x_1'', x_2'', x_3''$ πραγματοποιείται με τη βοήθεια δύο στροφών:

α) (Σχ. Ζ-10) από το $x_1, x_2, x_3 \to x_1^0, x_2^0, x_3^0$ με στροφή κατά τη γωνία ϕ_k αντίθετη των δεικτών του ρολογιού περί τον άξονα $x_3 \equiv x_3^0$ έτσι ώστε x_3^0, $\mathbf{k}$, x_1^0 να βρίσκονται στο ίδιο επίπεδο. Θα έχουμε: $\cos\widehat{x_1^0 x_1} = \cos\phi_k$, $\cos\widehat{x_1^0 x_2} = \sin\phi_k$, $\cos\widehat{x_2^0 x_1} = -\sin\phi_k$, $\cos\widehat{x_2^0 x_2} = \cos\phi_k$, $\cos\widehat{x_3^0 x_3} = 1$ και τα υπόλοιπα συνημίτονα κατεύθυνσης έχουν την τιμή μηδέν. Επομένως:

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= \cos\phi_k x_1^0 - \sin\phi_k x_2^0 \\ x_2 &= \sin\phi_k x_1^0 + \cos\phi_k x_2^0 \\ x_3 &= x_3^0 \end{aligned}\right\} \qquad \text{(Z-45)}$$

ή

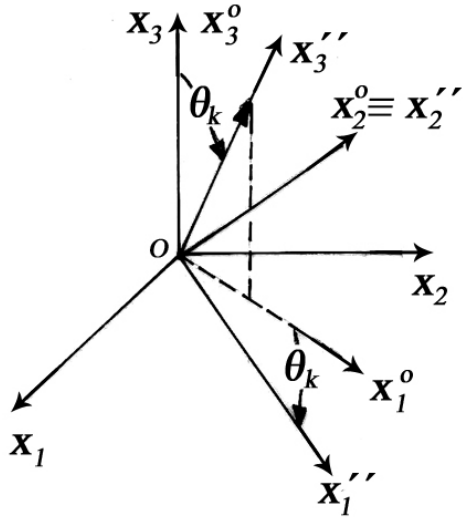
$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\phi_k & -\sin\phi_k & 0 \\ \sin\phi_k & \cos\phi_k & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1^0 \\ x_2^0 \\ x_3^0 \end{pmatrix} \qquad \text{(Z-46)}$$



	x_1	x_2	x_3
x_1^o	$\cos\varphi_k$	$\sin\varphi_k$	0
x_2^o	$-\sin\varphi_k$	$\cos\varphi_k$	0
x_3^o	0	0	1

(Σχ. Ζ-10)

β) (Σχ. Ζ-11) από το $x_1^0, x_2^0, x_3^0 \to x_1'', x_2'', x_3''$ με στροφή κατά τη γωνία θ_k αντίθετη των δεικτών του ρολογιού περί τον άξονα $x_2^0 \equiv x_2''$ έτσι ώστε ο $x_3^0 \equiv x_3''$ να ταυτιστεί με τη διεύθυνση της κυματοκαθέτου $\mathbf{k}$ δηλ. $\mathbf{k} \equiv x_3''$. Θα έχουμε:



	x_1^o	x_2^o	x_3^o
x_1''	$\cos\theta_k$	0	$-\sin\theta_k$
x_2''	0	1	0
x_3''	$\sin\theta_k$	0	$\cos\theta_k$

(Σχ. Ζ-11)

$\cos\widehat{x_1''x_1^0} = \cos\theta_k$, $\cos\widehat{x_1''x_3^0} = -\sin\theta_k$, $\cos\widehat{x_3''x_1^0} = \sin\theta_k$, $\cos\widehat{x_3''x_3^0} = \cos\theta_k$, $\cos\widehat{x_2''x_2^0} = 1$ και τα υπόλοιπα συνημίτονα κατεύθυνσης έχουν την τιμή μηδέν. Επομένως:

$$x_1^0 = \cos\theta_k x_1'' + \sin\theta_k x_3'' \ , \ x_2^0 = x_2'' \ , \ x_3^0 = -\sin\theta_k x_1'' + \cos\theta_k x_3'' \qquad \text{(Z-47)}$$

ή

$$\begin{pmatrix} x_1^0 \\ x_2^0 \\ x_3^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta_k & 0 & \sin\theta_k \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta_k & 0 & \cos\theta_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1'' \\ x_2'' \\ x_3'' \end{pmatrix} \qquad \text{(Z-48)}$$

Τότε από τις (σχ. Ζ-48,46) θα έχουμε:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\phi_k & -\sin\phi_k & 0 \\ \sin\phi_k & \cos\phi_k & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta_k & 0 & \sin\theta_k \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta_k & 0 & \cos\theta_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1'' \\ x_2'' \\ x_3'' \end{pmatrix}$$

ή

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\phi_k\cos\theta_k & -\sin\phi_k & \cos\phi_k\sin\theta_k \\ \sin\phi_k\cos\theta_k & \cos\phi_k & \sin\phi_k\sin\theta_k \\ -\sin\theta_k & 0 & \cos\theta_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1'' \\ x_2'' \\ x_3'' \end{pmatrix} \qquad \text{(Z-49)}$$

Επομένως από τη (σχ. Ζ-49) βρίσκουμε:

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= x_1''\cos\phi_k\cos\theta_k - x_2''\sin\phi_k + x_3''\cos\phi_k\sin\theta_k \\ x_2 &= x_1''\sin\phi_k\cos\theta_k + x_2''\cos\phi_k + x_3''\sin\phi_k\sin\theta_k \\ x_3 &= -x_1''\sin\theta_k + x_3''\cos\theta_k \end{aligned}\right\} \qquad \text{(Z-50)}$$

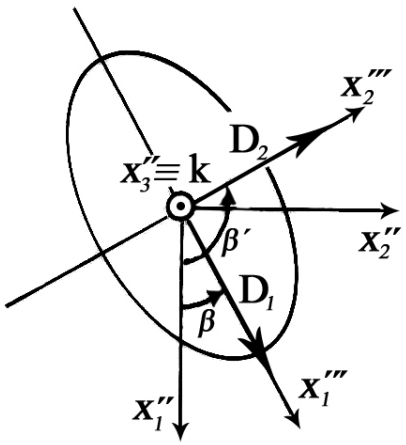
που είναι οι σχέσεις μετασχημ/σμού μεταξύ των συστημάτων $x_1, x_2, x_3 \rightarrow x_1'', x_2'', x_3''$.

Αν τώρα αντικαταστήσουμε τα x_1, x_2, x_3 από τη (σχ. Z-50) στη (σχ. Z-43), θα εκφράσουμε το ελλ. των δ.δ. στο σύστημα συντεταγμένων x_1'', x_2'', x_3''. Η σχέση λοιπόν που θα μας δίνει την εξίσωση της έλλειψης στο επίπεδο το κάθετο στη διεύθυνση της κυματοκαθέτου **k** (διεύθυνση διάδοσης του φωτός), θα βρεθεί αν θέσουμε $x_3'' = 0$. Μετά την εκτέλεση αυτών των πράξεων θα πάρουμε τη σχέση:

$$A''x_1''^2 + B''x_2''^2 + 2H''x_1''x_2'' = 1 \qquad \text{(Z-51)}$$

όπου:

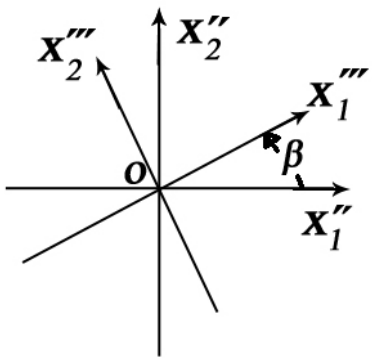
$$\left\{\begin{aligned} A'' &= \cos^2\theta_k\left[A\cos^2\phi_k + B\sin^2\phi_k + H\sin 2\phi_k\right] + \\ &\quad + C\sin^2\theta_k - \sin 2\theta_k\left[F\sin\phi_k + G\cos\phi_k\right] \\ B'' &= A\sin^2\phi_k + B\cos^2\phi_k - H\sin 2\phi_k \\ 2H'' &= \sin 2\phi_k\cos\theta_k\left[B - A\right] + 2\sin\theta_k\left[G\sin\phi_k - F\cos\phi_k\right] + \\ &\quad + 2H\cos\theta_k\cos 2\phi_k \end{aligned}\right\} \qquad \text{(Z-52)}$$



(Σχ. Z-12)

Στο (Σχ. Z-12) φαίνεται η έλλειψη που περιγράφεται από τη (σχ. Z-51) εκφρασμένη στο σύστημα συντεταγμένων x_1'', x_2''. Μας είναι γνωστό όμως ότι οι δι-

ευθύνσεις των ιδιοκαταστάσεων $\mathbf{D}_1, \mathbf{D}_2$ είναι αυτές του μεγάλου και του μικρού άξονα της έλλειψης. Επομένως για τον προσδιορισμό αυτών των διευθύνσεων θα πρέπει να εκφράσουμε τη (σχ. Z-51) ως προς ένα νέο σύστημα συντεταγμένων x_1''', x_2''' του οποίου οι άξονες ταυτίζονται με αυτούς των αξόνων της έλλειψης (Σχ. Z-12). Το τελευταίο επιτυγχάνεται με μια στροφή του x_1'', x_2'' κατά γωνία β αντίθετη των δεικτών του ρολογιού (Σχ. Z-13). Επομένως οι συντεταγμένες x_1'', x_2'' συναρτήσει



	x_1''	x_2''
x_1'''	$\cos\beta$	$\sin\beta$
x_2'''	$-\sin\beta$	$\cos\beta$

(Σχ. Z-13)

των x_1''', x_2''' θα δίνονται από τις σχέσεις:

$$\left.\begin{aligned} x_1'' &= x_1'''\cos\beta - x_2'''\sin\beta \\ x_2'' &= x_1'''\sin\beta + x_2'''\cos\beta \end{aligned}\right\} \qquad \text{(Z-53)}$$

και η αντικατάστασή τους στη (σχ. Z-51) θα μας δώσει μετά την εκτέλεση των πράξεων:

$$\begin{aligned} &\left(A''\cos^2\beta + B''\sin^2\beta + 2H''\sin\beta\cos\beta\right)x_1'''^2 + \\ &+\left(A''\sin^2\beta + B''\cos^2\beta - 2H''\sin\beta\cos\beta\right)x_2'''^2 + \\ &+\left(B''\sin 2\beta - A''\sin 2\beta + 2H''\cos^2\beta - 2H''\sin^2\beta\right)x_1'''x_2''' = 1 \end{aligned} \qquad \text{(Z-54)}$$

Προκειμένου τώρα οι άξονες της έλλειψης να έχουν τις διευθύνσεις των αξόνων x_1''', x_2''' θα πρέπει ο όρος του γινομένου $x_1'''x_2'''$ της (σχ. Z-54) να είναι ίσος με το μηδέν. Ο μηδενισμός του, μας οδηγεί στον υπολογισμό της γωνίας β:

$$\beta = \frac{1}{2}\arctan\frac{2H''}{A'' - B''} \qquad \text{(Z-55)}$$

Σε σχέση λοιπόν με το σύστημα συντεταγμένων x_1'', x_2'' η διεύθυνση του $\mathbf{D}_1$ βρίσκεται αν ο άξονας x_1'' στραφεί αντίθετα των δεικτών του ρολογιού κατά γωνία β. Όσο για τη διεύθυνση του $\mathbf{D}_2$ όπως φαίνεται στο (Σχ. Z-12). Η γωνία στροφής θα είναι $\beta' = \beta + \pi/2$ επειδή τα $\mathbf{D}_1, \mathbf{D}_2$ είναι μεταξύ τους ορθογώνια.

Υπολογισμός των δεικτών διάθλασης n_1, n_2

Εφόσον η γωνία β δίνεται από τη (σχ. Z-55), τότε ο συντελεστής του γινομένου $x_1'''x_2'''$ της (σχ. Z-54) γίνεται ίσος με το μηδέν, οπότε η τελευταία γράφεται:

$$\begin{aligned}&\left(A''\cos^2\beta + B''\sin^2\beta + 2H''\sin\beta\cos\beta\right)x_1'''^2 + \\ &+\left(A''\sin^2\beta + B''\cos^2\beta - 2H''\sin\beta\cos\beta\right)x_2'''^2 = 1\end{aligned} \tag{Z-56}$$

Δηλ. είναι της μορφής: $x_1'''^2/n_1^2 + x_2'''^2/n_2^2 = 1$. Επομένως η αντιπαραβολή των ίσων όρων των δύο τελευταίων σχέσεων μας δίνει τελικά:

$$\left.\begin{aligned}n_1 &= \left[A''\cos^2\beta + B''\sin^2\beta + 2H''\sin\beta\cos\beta\right]^{-1/2} \\ n_2 &= \left[A''\sin^2\beta + B''\cos^2\beta - 2H''\sin\beta\cos\beta\right]^{-1/2}\end{aligned}\right\} \tag{Z-57}$$

όπου n_1, n_2 οι δ.δ των ιδιοκαταστάσεων $\mathbf{D}_1, \mathbf{D}_2$ από τις οποίες μπορούμε να υπολογίσουμε τις ταχύτητες φάσης υ_1, υ_2.

Υπολογισμός των ιδιοκαταστάσεων (των καταστάσεων πόλωσης) των $\mathbf{D_1}$, $\mathbf{D_2}$

Από τη θεωρία των πινάκων γνωρίζουμε ότι: Αν $[\mathrm{A}]$ είναι ένας συμμετρικός πίνακας με στοιχεία που ανήκουν στο σύνολο $\mathbb{R}$ των πραγματικών αριθμών, τότε είναι δυνατόν να διαγωνιοποιηθεί μέσω ενός ***μετασχηματισμού ομοιότητας (similarity transformation)***. Ο μετασχηματισμός αυτός για τον πίνακα $[\mathrm{A}]$ (στην περίπτωσή μας δύο διαστάσεων) είναι της μορφής:

$$[\mathrm{a}][\mathrm{A}][\mathrm{a}]^T = [\lambda] \tag{Z-58}$$

όπου $[\lambda]$ είναι ένα διαγώνιος πίνακας (2×2) και $[a]$ είναι ο πίνακας μετασχηματισμού. Αποδεικνύεται ότι οι ***ιδιοτιμές (eigenvalues)*** του $[A]$ διατηρούνται οι ίδιες και μετά την εκτέλεση του μετασχηματισμού ομοιότητας και είναι ίσες με τα διαγώνια στοιχεία του $[\lambda]$. Ο πίνακας $[a]$ είναι πραγματικός και ***ορθογώνιος (orthogonal)*** (δηλ. $[a]^T = [a]^{-1}$) και γι' αυτό ***μη μοναδικός (nonsingular)***. Όπου $[a]^T$ ο ***ανάστροφος (transpose)*** του $[a]$ και $[a]^{-1}$ ο ***αντιστροφός (inverse)*** του. Κάτω από αυτές τις συνθήκες, αποδεικνύεται ότι οι στήλες του $[a]^T$ (ή οι γραμμές του $[a]$) είναι ανεξάρτητες και παριστάνουν τα δεξιά ιδιοδιανύσματα (ιδιοκαταστάσεις) του $[a]^T$ ή τα αριστερά ιδιοδιανύσματα (ιδιοκαταστάσεις) του $[a]$, των αντιστοίχων ιδιοτιμών του πίνακα.

Η τάξη εμφάνισης των ιδιοκαταστάσεων και των αντιστοίχων ιδιοτιμών γίνεται φανερή, αν ο μετασχηματισμός όπως εκφράζεται από τη (σχ. Z-58) νοηθεί σαν εξίσωση ***ιδιοτιμών (eigenvalue equation)***. Πράγματι πολλαπλασιάζοντας από αριστερά τη (σχ. Z-58) με $[a]^T = [a]^{-1}$ θα έχουμε:

$$[A][a]^T = [a]^T[\lambda] \qquad \text{(Z-59)}$$

επειδή: $[a]^T[a] = [a]^{-1}[a] = [I]$ και $[I][A] = [A]$ όπου $[I]$ ο μοναδιαίος πίνακας.

Τότε η πρώτη στήλη του $[a]^T$ αντιστοιχεί στο ιδιοδιάνυσμα (ιδιοκατάσταση) του οποίου η ιδιοτιμή είναι το πρώτο διαγώνιο στοιχείο του πίνακα $[\lambda]$. Παρόμοια ισχύουν και για τη δεύτερη στήλη.

Η προαναφερόμενη θεωρία μπορεί να εφαρμοστεί στο πρόβλημα της 'χρησιμοποίησης' της (σχ. Z-51) προκειμένου να υπολογίσουμε τους δ.δ. n_1, n_2 (ήδη το έχουμε πετύχει με μια παρόμοια μέθοδο) καθώς και τις ιδιοτιμές (ιδιοδυανύσματα) δηλ. τις καταστάσεις πόλωσης των $\mathbf{D}_1, \mathbf{D}_2$. Πράγματι η εξάλειψη του γινομένου $x_1''x_2''$ από τη (σχ. Z-51) σχετίζεται ουσιαστικά με την διαγωνιοποίηση του πίνακα:

$$[A] = \begin{pmatrix} A'' & H'' \\ H'' & B'' \end{pmatrix} \qquad \text{(Z-60)}$$

το οποίο επιτυγχάνεται με τον μετασχηματισμό ομοιότητας:

$$\begin{pmatrix} \cos\beta & \sin\beta \\ -\sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A'' & H'' \\ H'' & B'' \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} B_1 & 0 \\ 0 & B_2 \end{pmatrix} \qquad \text{(Z-61)}$$

όπου επιλέξαμε $[\mathrm{a}]=\begin{pmatrix} \cos\beta & \sin\beta \\ -\sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix}$ και $[\mathrm{a}]^{\mathrm{T}}=[\mathrm{a}]^{-1}=\begin{pmatrix} \cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix}$

Μετά τις πράξεις η (σχ. Z-61) γίνεται: $\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} B_1 & 0 \\ 0 & B_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1/n_1^2 & 0 \\ 0 & 1/n_2^2 \end{pmatrix}$

$$A_{12}=A_{21}=B''\sin\beta\cos\beta-A''\sin\beta\cos\beta+H''\cos^2\beta-H''\sin^2\beta$$

όπου:

$$A_{11}=A''\cos^2\beta+B''\sin^2\beta+2H''\sin\beta\cos\beta$$

$$A_{22}=A''\sin^2\beta+B''\cos^2\beta-2H''\sin\beta\cos\beta$$

Τότε επειδή $A_{12}=A_{21}=0$ καταλήγουμε ότι η τιμή της β δίνεται από τη (σχ. Z-55). Επίσης από την $A_{11}=B_1=1/n_1^2$ υπολογίζουμε την τιμή του n_1, όπου $B_1=1/n_1^2$ η μία από τις ιδιοτιμές και $A_{22}=B_2=1/n_2^2$ η δεύτερη από την οποία υπολογίζουμε τον n_2.

Δεδομένης τώρα της (σχ. Z-61) θα έχουμε:

$$\begin{pmatrix} A'' & H'' \\ H'' & B'' \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} B_1 & 0 \\ 0 & B_2 \end{pmatrix}=$$

$$=B_1\begin{pmatrix} \cos\beta & 0 \\ \sin\beta & 0 \end{pmatrix}+B_2\begin{pmatrix} 0 & -\sin\beta \\ 0 & \cos\beta \end{pmatrix} \qquad \text{(Z-62)}$$

Επομένως : $\mathbf{D}_1\equiv\begin{pmatrix} \cos\beta \\ \sin\beta \end{pmatrix}$, $\mathbf{D}_2\equiv\begin{pmatrix} -\sin\beta \\ \cos\beta \end{pmatrix}$ (Z-63)

όπου β η γωνία που υπολογίζεται από τη (σχ. Z-55) και που φαίνεται στο (Σχ. Z-12). Οι ιδιοκαταστάσεις $\mathbf{D}_1,\mathbf{D}_2$ όπως περιγράφονται από τις (σχ. Z-63), αντιστοιχούν κατά Jones (βλ. ΠΑΡ-ΜΑ 5) σε γραμμικά πολωμένες καταστάσεις πόλωσης και μάλιστα είναι μεταξύ τους ορθογώνιες (όπως θα έπρεπε) επειδή $\mathbf{D}_1^{\mathrm{T}}\cdot\mathbf{D}_2=0$. Επομένως το αζιμούθιο β' για την $\mathbf{D}_2$ θα είναι: $\beta'=\beta+\pi/2$.

Στα επόμενα θα παραθέσουμε ορισμένα παραδείγματα που αφορούν το γραμμικό ηλεκτροοπτικό φαινόμενο, επιλύοντάς τα με τη βοήθεια της νέας μεθό-

δου που αναπτύξαμε προηγουμένως. Η εκκίνηση θα γίνει με τον κρύσταλλο του $NbLiO_3$ εφαρμόζοντας το πεδίο κατά τον άξονα x_1 και το φως να διαδίδεται κατά τη διεύθυνση του άξονα x_2, παράδειγμα του οποίου την επίλυση είχαμε εγκαταλείψει προηγουμένως, λόγω της δυσκολίας που εμφάνιζε με τις κλασσικές μεθόδους.

α) Κρύσταλλος $LiNbO_3$ *. Πεδίο κατά τη διεύθυνση του άξονα* x_1*. Το φως διαδίδεται κατά τον άξονα* x_2

Αν εφαρμόσουμε στον κρύσταλλο το πεδίο $\mathbf{E} = E_1\mathbf{i}$, τότε το διαταραγμένο ελλ. των δ.δ. ως προς το σύστημα x_1, x_2, x_3 θα δίνεται από τη (σχ. Ζ-40):

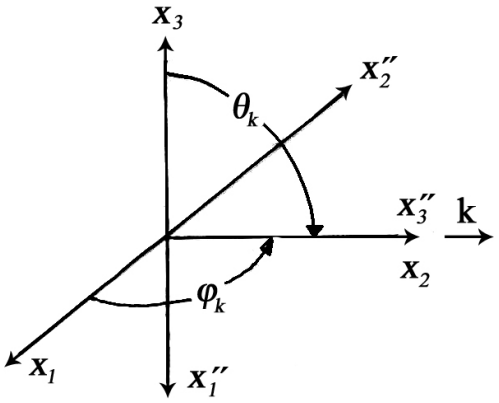
$$\frac{x_1^2}{n_o^2} + \frac{x_2^2}{n_o^2} + \frac{x_3^2}{n_e^2} + 2r_{51}E_1x_1x_3 - 2r_{22}E_1x_1x_2 = 1 \qquad \text{(Ζ-64)}$$

Επομένως με βάση τις (σχ. Ζ-43,44) θα έχουμε:

$$A = \frac{1}{n_o^2}\ ,\ B = \frac{1}{n_o^2}\ ,\ C = \frac{1}{n_e^2}\ ,\ F = 0\ ,\ G = r_{51}E_1\ ,\ H = -r_{22}E_1 \qquad \text{(Ζ-65)}$$

Ο μετασχηματισμός του συστήματος x_1, x_2, x_3 στο x_1'', x_2'', x_3'' φαίνεται στο (Σχ. Ζ-14) από όπου θα έχουμε: $\phi_k = 90^0$ και $\theta_k = 90^0$. Τότε με τη βοήθεια των (σχ. Ζ-52) και των (σχ. Ζ-65) η (σχ. Ζ-51) γράφεται:

$$Cx_1''^2 + Ax_2''^2 + 2Gx_1''x_2'' = 1 \qquad \text{(Ζ-66)}$$



(Σχ. Ζ-14)

Όπου $A'' = C$, $B'' = A$, $2H'' = 2G$. Επομένως από τη (σχ. Ζ-55) βρίσκουμε:

$$\tan\beta = \frac{2H''}{A'' - B''} = \frac{2G}{C - A} \;\Rightarrow\; \tan\beta = \frac{2r_{51}E_1}{\dfrac{1}{n_e^2} - \dfrac{1}{n_o^2}} \qquad \text{(Ζ-67)}$$

Τότε από τις (σχ. Ζ-57) βρίσκουμε τις τιμές των n_1, n_2 :

$$\left.\begin{aligned} n_1 &= \left[\frac{\cos^2\beta}{n_e^2} + \frac{\sin^2\beta}{n_o^2} + r_{51}E_1\sin 2\beta\right]^{-1/2} \\ n_2 &= \left[\frac{\sin^2\beta}{n_e^2} + \frac{\cos^2\beta}{n_o^2} - r_{51}E_1\sin 2\beta\right]^{-1/2} \end{aligned}\right\} \qquad \text{(Ζ-68)}$$

Για $r_{51} = 32.6\times10^{-12}\,\mathrm{m/V}$, $n_o = 2.286$, $n_e = 2.200$ ($\lambda = 0.6328\mu\mathrm{m}$) και $E_1 = 10\,\mathrm{kV/cm} = 10^6\,\mathrm{V/m}$ θα έχουμε: $\beta = 0.2449106^0$, $n_1 = 2.200$, $n_2 = 2.2859$. Και από τις (σχ. Ζ-63):

$$\mathbf{D}_1 \equiv \begin{pmatrix} 0.9999908 \\ 0.0042744 \end{pmatrix} \;,\; \mathbf{D}_2 \equiv \begin{pmatrix} -0.0042744 \\ 0.9999908 \end{pmatrix}$$

β) Κρύσταλλος $\mathbf{LiNbO_3}$ *. Πεδίο κατά τη διεύθυνση του άξονα* x_2*. Το φως διαδίδεται κατά τον άξονα* x_1

Αν εφαρμόσουμε το πεδίο $\mathbf{E} = E_2\mathbf{j}$, τότε το διαταραγμένο ελλ. των δ.δ. ως προς το σύστημα x_1, x_2, x_3 θα δίνεται με τη βοήθεια της (σχ. Ζ-8) από την:

$$\left(1/n_o^2 - r_{22}E_2\right)x_1^2 + \left(1/n_o^2 + r_{22}E_2\right)x_2^2 + x_3^2/n_e^2 + 2r_{51}E_2x_2x_3 = 1 \qquad \text{(Ζ-69)}$$

Τότε με βάση τις (σχ. Ζ-43,44) θα έχουμε:

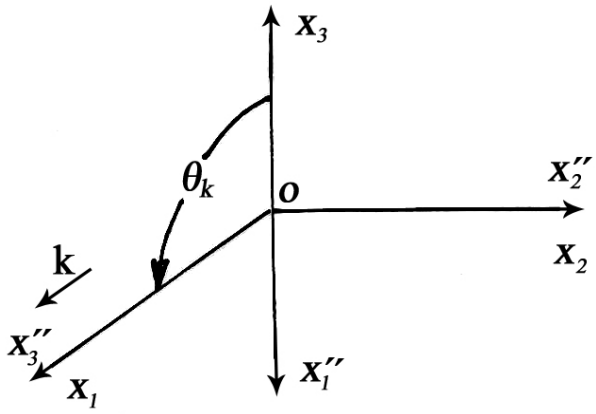
$$A = \frac{1}{n_o^2} - r_{22}E_2 \;,\; B = \frac{1}{n_o^2} + r_{22}E_2 \;,\; C = \frac{1}{n_e^2} \;,\; F = r_{51}E_2 \;,\; G = 0 \;,\; H = 0 \qquad \text{(Ζ-70)}$$

Ο μετασχηματισμός του συστήματος x_1, x_2, x_3 στο x_1'', x_2'', x_3'' φαίνεται στο (Σχ. Ζ-15) από όπου θα έχουμε: $\phi_k = 0^0$ και $\theta_k = 90^0$. Τότε με τη βοήθεια των (σχ. Ζ-52) και (σχ. Ζ-70) η (σχ. Ζ-51) γράφεται:

$$Cx_1''^2 + Bx_2''^2 - 2Fx_1''x_2'' = 1 \qquad \text{(Z-71)}$$

όπου $A'' = C$, $B'' = B$, $2H'' = -2F$. Επομένως από τη (σχ. Z-55) βρίσκουμε:

$$\tan\beta = \frac{2H''}{A'' - B''} = -\frac{2F}{C - B} \;\Rightarrow\; \tan\beta = -\frac{2r_{51}E_2}{\dfrac{1}{n_e^2} - \dfrac{1}{n_o^2} - r_{22}E_2} \qquad \text{(Z-72)}$$



(Σχ. Z-15)

Επίσης από τις (σχ. Z-57) βρίσκουμε για τους n_1, n_2 :

$$n_1 = \left[\frac{\cos^2\beta}{n_e^2} + \left(\frac{1}{n_o^2} + r_{22}E_2\right)\sin^2\beta - r_{51}E_2\sin 2\beta\right]^{-1/2} \qquad \text{(Z-73α)}$$

$$n_2 = \left[\frac{\sin^2\beta}{n_e^2} + \left(\frac{1}{n_o^2} + r_{22}E_2\right)\cos^2\beta + r_{51}E_2\sin 2\beta\right]^{-1/2} \qquad \text{(Z-73β)}$$

Για $r_{51} = 32.6\times10^{-12}\,\text{m/V}$, $r_{22} = 6.8\times10^{-12}\,\text{m/V}$ $n_o = 2.286$, $n_e = 2.200$ $E_2 = 10^6\,\text{V/m}$ ($\lambda = 0.6328\mu\text{m}$) θα έχουμε: $\beta = -0.1225105^0$, $n_1 = 2.199935$, $n_2 = 2.2859678$. Και από τη (σχ. Z-63):

$$\mathbf{D}_1 \equiv \begin{pmatrix} 0.9999977 \\ -0.0021382 \end{pmatrix} \;,\; \mathbf{D}_2 \equiv \begin{pmatrix} 0.0021382 \\ 0.9999977 \end{pmatrix}$$

Στα επόμενα όπως θα δούμε – για το συγκεκριμένο τουλάχιστον πρόβλημα –, έχουμε τη δυνατότητα να προσδιορίσουμε με εύκολο τρόπο τους κύριους δ.δ. του διαταραγμένου ελλειψοειδούς των δ.δ. Επειδή στη (σχ. Z-69) υπάρχει μόνο ο μικτός όρος x_2x_3, τότε είναι εύκολο εκτελώντας μια περιστροφή (αντίθετη των

δεικτών του ρολογιού) περί τον άξονα x_1 να μετατρέψουμε τη (σχ. Ζ-69) στη μορφή της (σχ. Ζ-11):

$$\frac{x_1'^2}{n_1'^2}+\frac{x_2'^2}{n_2'^2}+\frac{x_3'^2}{n_3'^2}=1 \qquad \text{(Ζ-74)}$$

Οι σχέσεις μετασχηματισμού με τη βοήθεια του (Πίν. Ζ-5) θα είναι:

		Παλαιό σύστημα		
		x_1	x_2	x_3
Νέο σύστημα	x_1'	1	0	0
	x_2'	0	$\cos\theta$	$\sin\theta$
	x_3'	0	$-\sin\theta$	$\cos\theta$

$$x_1=x_1' \text{ , } x_2=\cos\theta x_2'-\sin\theta x_3' \text{ , } x_3=\sin\theta x_2'+\cos\theta x_3' \qquad \text{(Ζ-75)}$$

Αν τώρα στη (σχ. Ζ-69) θέσουμε: $A=1/n_o^2-r_{22}E_2$, $B=1/n_o^2+r_{22}E_2$, $D=2r_{51}E_2$ και $C=1/n_e^2$ θα έχουμε: $Ax_1^2+Bx_2^2+Cx_3^2+Dx_2x_3=1$. Η αντικατάσταση κατόπιν των (σχ. Ζ-75) μας δίνει τελικά:

$$\begin{aligned}&Ax_1'^2+\left(B\cos^2\theta+C\sin^2\theta+D\sin\theta\cos\theta\right)x_2'^2+\\&+\left(B\sin^2\theta+C\cos^2\theta-D\sin\theta\cos\theta\right)x_3'^2+\\&+\left(-2B\sin\theta\cos\theta+2C\sin\theta\cos\theta+D\cos^2\theta-D\sin^2\theta\right)x_2'x_3'=1\end{aligned} \qquad \text{(Ζ-76)}$$

Προκειμένου τώρα η (σχ. Ζ-76) να πάρει τη μορφή της (σχ. Ζ-74), θα πρέπει ο συντελεστής του γινομένου $x_2'x_3'$ να γίνει ίσος με το μηδέν. Από τη διαδικασία αυτή βρίσκουμε:

$$\tan 2\theta=\frac{D}{B-C}=\frac{2r_{51}E_2}{\frac{1}{n_0^2}-\frac{1}{n_e^2}+r_{22}E_2} \qquad \text{(Ζ-77)}$$

Τότε η (σχ. Ζ-76) γίνεται:

$$Ax_1'^2 + \left(B\cos^2\theta + C\sin^2\theta + D\sin\theta\cos\theta\right)x_2'^2 + \left(B\sin^2\theta + C\cos^2\theta - D\sin\theta\cos\theta\right)x_3'^2 = 1 \qquad \text{(Z-78)}$$

Αντιπαραβάλλοντας τώρα τις (σχ. Z-78) και (σχ. Z-74) βρίσκουμε:

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{n_1'^2} &= \frac{1}{n_o^2} - r_{22}E_2 \\ \frac{1}{n_2'^2} &= \left(\frac{1}{n_o^2} + r_{22}E_2\right)\cos^2\theta + \frac{\sin^2\theta}{n_e^2} + r_{51}E_2\sin 2\theta \\ \frac{1}{n_3'^2} &= \left(\frac{1}{n_o^2} + r_{22}E_2\right)\sin^2\theta + \frac{\cos^2\theta}{n_e^2} - r_{51}E_2\sin 2\theta \end{aligned}\right\} \qquad \text{(Z-79)}$$

3) GaAs

Ο κρύσταλλος του Γαλλίου Αρσενικού, χρησιμοποιείται σαν στοιχείο διαμόρφωσης του πλάτους ή της φάσης ακτινοβολιών, κυρίως στην εγγύς περιοχή του υπερύθρου τμήματος του Η/Μ φάσματος. Ανήκει στο κυβικό σύστημα στην ομάδα συμμετρίας $\left(\bar{4}3m\right)$. Όπως μπορούμε να διαπιστώσουμε από την ανάγνωση του (Σχ. Z-3), διαθέτει 4 επίπεδα συμμετρίας, 3 άξονες τέταρτης τάξης, 2 άξονες τρίτης τάξης και 3 άξονες δεύτερης τάξης. Ο κρύσταλλος δεν διαθέτει φυσική διπλοθλαστικότητα. Δηλ. συμπεριφέρεται χωρίς την επίδραση εξωγενών δυνάμεων σαν ισότροπος. Από το (Σχ. Z-3) θα έχουμε για $\lambda = 1.15\mu\text{m}$, $r_{41} = 1.43\times10^{-12}\,\text{m/V}$ και $n_0 = 3.3895$.

α) Κρύσταλλος GaAs *. Πεδίο κατά τη διεύθυνση του άξονα x_3. Η ακτινοβολία διαδίδεται κατά τον άξονα x_1*

Αν εφαρμόσουμε το πεδίο $\mathbf{E} = E_3\mathbf{k}$, τότε το διαταραγμένο ελλειψοειδές των δ.δ. ως προς το σύστημα συντεταγμένων των κυρίων αξόνων x_1, x_2, x_3 θα δίνεται με τη βοήθεια της (σχ. Z-8) από την:

$$\frac{x_1^2}{n_o^2} + \frac{x_2^2}{n_o^2} + \frac{x_3^2}{n_o^2} + 2r_{41}E_3x_1x_2 = 1 \qquad \text{(Z-80)}$$

επειδή $r_{ij} = 0$ εκτός $r_{41} = r_{52} = r_{63}$, τότε με βάση τις (σχ. Z-43,44) θα έχουμε:

$$A = B = C = 1/n_o^2 \ , \ F = G = 0 \ , \ H = r_{41}E_3 \qquad \text{(Z-81)}$$

Ο μετασχηματισμός του συστήματος x_1, x_2, x_3 στο x_1'', x_2'', x_3'' είναι πανομοιότυπος με αυτόν του (Σχ. Z-15) από όπου συμπεραίνουμε ότι $\phi_k = 0^0$ και $\theta_k = 90^0$. Τότε με τη βοήθεια των (σχ. Z-52,81) η (σχ. Z-51) γράφεται: $Cx_1''^2 + Bx_2''^2 - 2Fx_1''x_2'' = 1$, επειδή: $A'' = C$, $B'' = B$, $2H'' = -2F = 0$. Επομένως επειδή με βάση τις (σχ. Z-81) $B = C = 1/n_o^2$ θα έχουμε:

$$\frac{x_1''^2}{n_o^2} + \frac{x_2''^2}{n_o^2} = 1 \qquad \text{(Z-82)}$$

Μπορούμε να καταλήξουμε στο ίδιο αποτέλεσμα με τη βοήθεια της (σχ. Z-55) επειδή:

$$\tan 2\beta = \frac{2H''}{A'' - B''} = -\frac{2F}{C - B} \to \frac{0}{0}$$

δηλ. καταλήγουμε σε απροσδιόριστη μορφή. Επομένως η γωνία στροφής β μπορεί να είναι οποιαδήποτε και για το λόγο αυτό συμπεραίνουμε ότι η διεύθυνση διάδοσης κατά τον άξονα x_1, ταυτίζεται με τον οπτικό άξονα του κρυστάλλου. Πράγματι θ' αποδείξουμε στα επόμενα, ότι κατά την εφαρμογή του ηλεκτ. πεδίου στη διεύθυνση x_3, ο κρύσταλλος μετατρέπεται από ισότροπο σε διάξονα και οι διευθύνσεις των οπτικών του αξόνων ταυτίζονται με τις διευθύνσεις των x_1, x_2. Από τη (σχ. Z-82) ή από τις (σχ. Z-57) βρίσκουμε ότι: $n_1 = n_2 = n_o$. Οι ιδιοκαταστάσεις πόλωσης στην περίπτωση αυτή θα δίνονται από τις (σχ. Z-63) όπου τώρα β μπορεί να είναι οποιαδήποτε γωνία.

Επειδή στη (σχ. Z-80) υπάρχει ο μικτός όρος του γινομένου $x_1 x_2$, τότε μπορούμε με την εκτέλεση μιας μόνο στροφής κατά γωνία θ περί τον άξονα x_3 να την μετατρέψουμε στη μορφή της (σχ. Z-11) δηλ. την $x_1'^2/n_1'^2 + x_2'^2/n_2'^2 + x_3'^2/n_3'^2 = 1$. Οι σχέσεις μετασχηματισμού με τη βοήθεια του (Πίν. Z-5) θα είναι:

$$x_1 = \cos\theta x_1' - \sin\theta x_2' \ , \ x_2 = \sin\theta x_1' + \cos\theta x_2' \ , \ x_3 = x_3' \qquad \text{(Z-83)}$$

Η αντικατάσταση των (σχ. Z-83) στη (σχ. Z-80) και ο μηδενισμός του όρου του γινομένου $x_1'x_2'$ μας οδηγεί στον προσδιορισμό της γωνίας στροφής η οποία είναι $\theta = 45^0$. Επομένως το ελλ. των δ.δ. ως προς τους άξονες x_1', x_2', x_3' θα είναι:

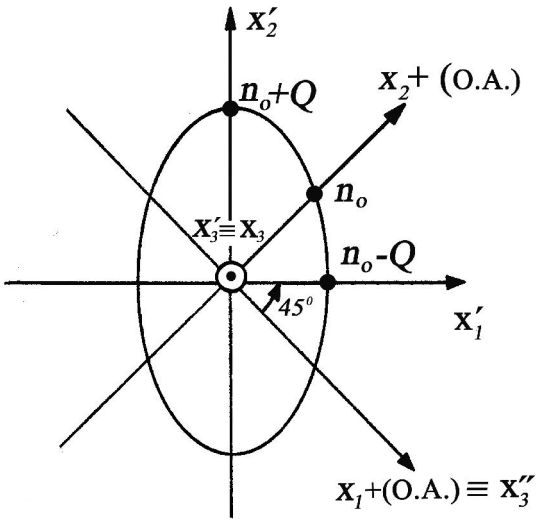
		Παλαιό σύστημα		
		x_1	x_2	x_3
Νέο σύστημα	x_1'	$\cos\theta$	$\sin\theta$	0
	x_2'	$-\sin\theta$	$\cos\theta$	0
	x_3'	0	0	1

$$\left(\frac{1}{n_o^2} + r_{41}E_3\right)x_1'^2 + \left(\frac{1}{n_o^2} - r_{41}E_3\right)x_2'^2 + \frac{x_3'^2}{n_o^2} = 1 \qquad \text{(Z-84)}$$

από την οποία βρίσκουμε τους κύριους δ.δ. n_1', n_2', n_3':

$$n_1' = n_o - \frac{1}{2}n_o^3 r_{41}E_3 \ , \ n_2' = n_o + \frac{1}{2}n_o^3 r_{41}E_3 \ , \ n_3' = n_o \qquad \text{(Z-85)}$$

Επομένως ο κρύσταλλος από ισότροπος, έχει μετατραπεί μετά την εφαρμογή του συγκεκριμένου πεδίου σε διάξονα. Για $r_{41} = 1.43 \times 10^{-12}$ m/V , $n_0 = 3.3895$ και $E_3 = 10^6$ V/m βρίσκουμε: $n_1' = 3.3894805$, $n_2' = 3.3895195$, $n_3' = 3.3895$.



(Σχ. Z-16)

Για τον προσδιορισμό του προσανατολισμού των δύο οπτικών αξόνων του τριαξονικού ελλειψοειδούς στο σύστημα x_1', x_2', x_3', θα έχουμε: $n_1' < n_3' < n_2'$ ή $n_o - Q < n_o < n_o + Q$ όπου $Q = (1/2) n_o^3 r_{41} E_3$. Στο (Σχ. Z-16) βλέπουμε την τομή του τριαξονικού ελλειψοειδούς στο επίπεδο x_1', x_2' καθώς και το σ.σ. x_1, x_2 που είναι στραμμένο σε σχέση με το πρώτο κατά 45^0 περί τον άξονα $x_3 \equiv x_3'$ που για το επίπεδο το κάθετο σ' αυτόν δηλ. το x_1'', x_2'' ισχύει η (σχ. Z-82). Δηλ. η τομή του ελλειψοειδούς στη διεύθυνση $x_3'' \equiv x_1$ είναι κύκλος με ακτίνα n_o. Επομένως η διεύθυνση του x_1 ταυτίζεται με τον ένα από τους οπτικούς άξονες. Ο άλλος βρίσκεται στη διεύθυνση του άξονα x_2.

2) *Μέθοδος Jacobi για τον προσδιορισμό των στοιχείων του διαταραγμένου ελλειψοειδούς των δεικτών διάθλασης (προσδιορισμός των διευθύνσεων των κυρίων αξόνων και των δ.δ. του ελλειψοειδούς)*

Όπως ήδη αναφέραμε, κατά την εφαρμογή σ' ένα κρύσταλλο ηλεκτ. πεδίου (ή άλλης 'εξωγενούς' δύναμης όπως μαγνητικού πεδίου, μηχανικής τάσης κ.τ.λ.) το ελλ. των δ.δ. μεταβάλλει στη γενικότερη περίπτωση το μέγεθός του το σχήμα καθώς και τον προσανατολισμό του ως προς σ.σ. των κυρίων αξόνων x_1, x_2, x_3 . Μας ενδιαφέρει στην προκειμένη περίπτωση: α) Να υπολογίσουμε τους κύριους δ.δ. n_1', n_2', n_3' δηλ. αυτούς ως προς ένα σύστημα συντεταγμένων x_1', x_2', x_3' του οποίου οι άξονες συμπίπτουν με τους κύριους άξονες του διαταραγμένου ελλειψοειδούς. β) Να προσδιορίσουμε τα συνημίτονα κατεύθυνσης (ιδιοδιανύσματα), των αξόνων του x_1', x_2', x_3' ως προς τους άξονες x_1, x_2, x_3 .

Γνωρίζουμε ότι η (σχ. Z-8):

$$\begin{aligned}&\left(1/n_1^2 + r_{1k}E_k\right)x_1^2 + \left(1/n_2^2 + r_{2k}E_k\right)x_2^2 + \left(1/n_3^2 + r_{3k}E_k\right)x_3^2 + \\ &2r_{4k}E_k x_2 x_3 + 2r_{5k}E_k x_1 x_3 + 2r_{6k}E_k x_1 x_2 = 1\end{aligned} \qquad \text{(Z-86)}$$

μας δίνει το διαταραγμένο ελλ. των δ.δ., όταν στη γενικότερη περίπτωση στον κρύσταλλο εφαρμοστεί το ηλεκτ. πεδίο: $\mathbf{E} = E_1\mathbf{i} + E_2\mathbf{j} + E_3\mathbf{k}$. Όπου $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ τα μοναδιαία διανύσματα κατά τους άξονες x_1, x_2, x_3. Τότε οι συντελεστές αυτής της εξίσωσης μπορούν να γραφούν σε μορφή πίνακα ως εξής:

$$\begin{pmatrix} 1/n_1^2 + r_{1k}E_k & r_{6k}E_k & r_{5k}E_k \\ r_{6k}E_k & 1/n_2^2 + r_{2k}E_k & r_{4k}E_k \\ r_{5k}E_k & r_{4k}E_k & 1/n_3^2 + r_{3k}E_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{13} \\ B_{21} & B_{22} & B_{23} \\ B_{31} & B_{32} & B_{33} \end{pmatrix} = [\mathrm{B}] \qquad \text{(Z-87)}$$

που δεν είναι άλλος παρά ο συμμετρικός πίνακας των στοιχείων των αδιαπερατοτήτων του διαταραγμένου από το ηλεκτρ. πεδίο κρυστάλλου. Κατά τα γνωστά, τα $B_1 = 1/n_1^2$, $B_2 = 1/n_2^2, B_3 = 1/n_3^2$, είναι τα διαγώνια στοιχεία του μη διαταραγμένου πίνακα των αδιαπερατοτήτων (σχ. Z-2). r_{ik} $i = 1,2,...,6$ $k = 1,2,3$ οι ηλεκτροοπτικοί συντελεστές.

Η διαδικασία του υπολογισμού των n_1', n_2', n_3' και του προσδιορισμού των διευθύνσεων των x_1', x_2', x_3' συνίσταται ουσιαστικά στο πρόβλημα της διαγωνιοποίη-

σης του πίνακα $[\mathrm{B}]$ που δίνεται από τη (σχ. Z-87). Αν $[\mathrm{B}]^{\mathrm{F}}$ είναι αυτός ο πίνακας, τότε το ελλ. των δ.δ. στο σύστημα συντεταγμένων x_1', x_2', x_3' θα είναι:

$$\begin{pmatrix} x_1' & x_2' & x_3' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{B}_1^{\mathrm{F}} & 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{B}_2^{\mathrm{F}} & 0 \\ 0 & 0 & \mathrm{B}_3^{\mathrm{F}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix} = \mathrm{B}_1^{\mathrm{F}} x_1'^2 + \mathrm{B}_2^{\mathrm{F}} x_2'^2 + \mathrm{B}_3^{\mathrm{F}} x_3'^2 = 1 \qquad \text{(Z-88)}$$

και οι δ.δ. n_1', n_2', n_3' θα δίνονται από τις σχέσεις: $\mathrm{B}_1^{\mathrm{F}} = 1/n_1'^2$, $\mathrm{B}_2^{\mathrm{F}} = 1/n_2'^2$, $\mathrm{B}_3^{\mathrm{F}} = 1/n_3'^2$. Αποδεικνύεται ότι αν κατά τη διαγωνιοποίηση του πίνακα $[\mathrm{B}]$ χρησιμοποιηθούν μετασχηματισμοί ομοιότητας, τότε οι ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματά του (οι διευθύνσεις των κυρίων αξόνων x_1', x_2', x_3'), παραμένουν τα ίδια για οποιοδήποτε πεπερασμένο αριθμό μετασχηματισμών. Άρα τα διαγώνια στοιχεία του πίνακα $[\mathrm{B}]^{\mathrm{F}}$ είναι και οι ιδιοτιμές του πίνακα $[\mathrm{B}]$ από τις οποίες υπολογίζουμε και τους δ.δ. n_1', n_2', n_3'.

Η μέθοδος διαγωνιοποίησης κατά Jacobi, συνίσταται από μια επαναλαμβανόμενη διαδικασία εκτέλεσης μετασχηματισμών ομοιότητας στον πίνακα $[\mathrm{B}]$, προκειμένου να μηδενιστούν σταδιακά τα μη διαγώνια στοιχεία του. Το να μηδενίσουμε ένα διαγώνιο στοιχείο του έστω το B_{ij} $i \neq j$, ισοδυναμεί με μια στροφή κατά μια γωνία q περί τον τρίτο άξονα k. Αν π.χ. θέλουμε να μηδενίσουμε το στοιχείο B_{12}, τότε θα εκτελέσουμε μια στροφή περί τον άξονα x_3 κατά γωνία ϕ. Αν $[\mathrm{a}]_1$ είναι ο ορθογώνιος πίνακας στροφής, τότε ο μετασχηματισμός ομοιότητας στον πίνακα $[\mathrm{B}]$ θα είναι: $[\mathrm{a}]_1 [\mathrm{B}] [\mathrm{a}]_1^{\mathrm{T}} = [\mathrm{B}]'$ ή :

$$\begin{pmatrix} \cos\phi & \sin\phi & 0 \\ -\sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{13} \\ B_{21} & B_{22} & B_{23} \\ B_3 & B_{32} & B_{33} \end{pmatrix} \cdot$$

$$\cdot \begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi & 0 \\ \sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_{11}' & B_{12}' = 0 & B_{13}' \\ B_{21}' = 0 & B_{22}' & B_{23}' \\ B_{31}' & B_{32}' & B_{33}' \end{pmatrix} = [\mathrm{B}]' \qquad \text{(Z-89)}$$

όπου $[\mathrm{a}]_1^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi & 0 \\ \sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ο ανάστροφος του $[\mathrm{a}]_1 = \begin{pmatrix} \cos\phi & \sin\phi & 0 \\ -\sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Η εκτέλεση των πράξεων στη (σχ. Ζ-89) μας οδηγεί στις σχέσεις:

$$\left.\begin{aligned}
B'_{11} &= B_{11}\cos^2\phi + B_{22}\sin^2\phi + 2B_{12}\cos\phi\sin\phi \\
B'_{22} &= B_{11}\sin^2\phi + B_{22}\cos^2\phi - 2B_{12}\cos\phi\sin\phi \\
B'_{33} &= B_{33} \\
B'_{12} &= \left(B_{22} - B_{11}\right)\cos\phi\sin\phi + B_{12}\left(\cos^2\phi - \sin^2\phi\right) = B'_{21} = 0 \\
B'_{13} &= B_{13}\cos\phi + B_{23}\sin\phi = B'_{31} \\
B'_{23} &= -B_{13}\sin\phi + B_{23}\cos\phi = B'_{32}
\end{aligned}\right\} \qquad \text{(Z-90α)}$$

Από την τέταρτη των (σχ. Ζ-90α) βρίσκουμε ότι προκειμένου $B'_{12} = B'_{21} = 0$ θα είναι:

$$\phi = \frac{1}{2}\arctan\frac{2B_{12}}{B_{11} - B_{22}} \qquad \text{(Z-90β)}$$

όπου η στροφή κατά ϕ γίνεται αντίθετα των δεικτών του ρολογιού και το επιλεγόμενο για μηδενισμό στοιχείο του πίνακα έχει το μεγαλύτερο μέτρο.

Με τον πρώτο λοιπόν μετασχηματισμό ομοιότητας έχουμε προσδιορίσει όλα τα στοιχεία του πίνακα $[\mathrm{B}]'$, από τα οποία $B'_{12} = 0$. Στο επόμενο βήμα επιλέγουμε πάλι το – μεγαλύτερο σε μέτρο – από τα μη διαγώνια στοιχεία του $[\mathrm{B}]'$ το οποίο θέλουμε να μηδενίσουμε και εκτελούμε δεύτερο μετασχηματισμό με πίνακα στροφής τον $[\mathrm{a}]_2$. Τότε παίρνουμε τον πίνακα $[\mathrm{B}]''$ όπου:

$$[\mathrm{B}]'' = [\mathrm{a}]_2[\mathrm{B}]'[\mathrm{a}]_2^{\mathrm{T}} = [\mathrm{a}]_2[\mathrm{a}]_1[\mathrm{B}][\mathrm{a}]_1^{\mathrm{T}}[\mathrm{a}]_2^{\mathrm{T}} \qquad \text{(Z-91)}$$

Η διαδικασία συνεχίζεται μέχρις ότου μετά από ένα ορισμένο αριθμό m μετασχηματισμών ομοιότητας, καταλήξουμε στον πίνακα $[\mathrm{B}]^{\mathrm{F}}$ του οποίου όλα τα στοιχεία εκτός διαγωνίου είναι μηδενικά ή τυπικά η τιμή τους είναι μικρότερη του 10^{-10}. Τότε από τα διαγώνια στοιχεία του $[\mathrm{B}]^{\mathrm{F}}$, εξάγουμε τους δ.δ. n'_1, n'_2, n'_3 μέσω των σχέσεων: $\mathrm{B}_1^{\mathrm{F}} = 1/n_1'^2$, $\mathrm{B}_2^{\mathrm{F}} = 1/n_2'^2$, $\mathrm{B}_3^{\mathrm{F}} = 1/n_3'^2$.

Στα επόμενα δίνουμε τους δύο υπολειπόμενους πίνακες μετασχηματισμού, για στροφή κατά θ στο επίπεδο x_1, x_3 περί τον άξονα $-x_2$ και για στροφή κατά ψ στο επίπεδο x_2, x_3 περί τον άξονα $+x_1$. (Η στροφή που εκτελέσαμε μόλις προηγου-

μένως ήταν η κατά γωνία ϕ (σχ. Ζ-91) στο επίπεδο x_1, x_2 περί τον άξονα $+x_3$). Θα είναι:

$$\underset{\substack{\text{περί τον}\\ -x_2}}{[a]} = \begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix} \quad , \quad \underset{\substack{\text{περί τον}\\ +x_1}}{[a]} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\psi & \sin\psi \\ 0 & -\sin\psi & \cos\psi \end{pmatrix}$$

$$\underset{\substack{\text{περί τον}\\ +x_3}}{[a]} = \begin{pmatrix} \cos\phi & \sin\phi & 0 \\ -\sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Τότε οι αντίστοιχες των (σχ. Ζ-90β,90α) θα είναι οι εξής:

β) Στροφή περί τον άξονα $-x_2$ κατά γωνία θ

Για τον μηδενισμό του στοιχείου B_{13} θα έχουμε:

$$\theta = \frac{1}{2}\arctan\frac{2B_{13}}{B_{11} - B_{33}} \qquad \text{(Ζ-92α)}$$

και οι σχέσεις μεταξύ των στοιχείων των πινάκων $[B]$ και $[B]'$:

$$\left.\begin{aligned} B'_{11} &= B_{11}\cos^2\theta + B_{33}\sin^2\theta + 2B_{13}\cos\theta\sin\theta \\ B'_{22} &= B_{22} \\ B'_{33} &= B_{11}\sin^2\theta + B_{33}\cos^2\theta - 2B_{13}\cos\theta\sin\theta \\ B'_{12} &= B_{12}\cos\theta + B_{23}\sin\theta = B'_{21} \\ B'_{13} &= \left(B_{33} - B_{11}\right)\cos\theta\sin\theta + B_{13}\left(\cos^2\theta - \sin^2\theta\right) = B'_{31} = 0 \\ B'_{23} &= -B_{12}\sin\theta + B_{23}\cos\theta = B'_{32} \end{aligned}\right\} \qquad \text{(Ζ-92β)}$$

γ) Στροφή περί τον άξονα $+x_1$ κατά γωνία ψ

Για τον μηδενισμό του στοιχείου B_{23} θα είναι αντιστοίχως:

$$\psi = \frac{1}{2}\arctan\frac{2B_{23}}{B_{22} - B_{33}} \qquad \text{(Ζ-93α)}$$

και οι σχέσεις μεταξύ των στοιχείων των πινάκων $[\mathrm{B}]$ και $[\mathrm{B}]'$:

$$\left.\begin{aligned}
B'_{11} &= B_{11} \\
B'_{22} &= B_{22}\cos^2\psi + B_{33}\sin^2\psi + 2B_{23}\cos\psi\sin\psi \\
B'_{33} &= B_{22}\sin^2\psi + B_{33}\cos^2\psi - 2B_{23}\cos\psi\sin\psi \\
B'_{12} &= B_{12}\cos\psi + B_{13}\sin\psi = B'_{21} \\
B'_{13} &= -B_{12}\sin\psi + B_{13}\cos\psi = B'_{31} \\
B'_{23} &= \left(B_{33} - B_{22}\right)\cos\psi\sin\psi + B_{23}\left(\cos^2\psi - \sin^2\psi\right) = B'_{32} = 0
\end{aligned}\right\} \qquad \text{(Z-93β)}$$

Ο προσδιορισμός των διευθύνσεων των αξόνων x'_1, x'_2, x'_3 (δηλ. των ιδιο-διανυσμάτων τους), γίνεται με την βοήθεια της συνολικής σχέσης των διαδοχικών μετασχηματισμών ομοιότητας, που έχει σαν συνέπεια την διαγωνιοποίηση του διαταραγμένου πίνακα της αδιαπερατότητας $[\mathrm{B}]$ μετά την εφαρμογή του πεδίου στον κρύσταλλο. Αν $[\mathrm{a}] = [\mathrm{a}]_m [\mathrm{a}]_{m-1} \cdots [\mathrm{a}]_2 [\mathrm{a}]_1$ είναι το γινόμενο του συνολικού αριθμού πινάκων στροφής και $[\mathrm{a}]^{\mathrm{T}} = [\mathrm{a}]_1^{\mathrm{T}} [\mathrm{a}]_2^{\mathrm{T}} \cdots [\mathrm{a}]_{m-1}^{\mathrm{T}} [\mathrm{a}]_m^{\mathrm{T}}$ το γινόμενο του συνολικού αριθμού των αναστρόφων τους, τότε θα ισχύει:

$$[\mathrm{a}][\mathrm{B}][\mathrm{a}]^{\mathrm{T}} = [\lambda] \qquad \text{(Z-94)}$$

όπου $[\lambda]$ αυτός που προέκυψε από τη διαγωνιοποίηση του πίνακα $[\mathrm{B}]$. Επομένως: $[\mathrm{a}]^{\mathrm{T}}[\mathrm{a}][\mathrm{B}][\mathrm{a}]^{\mathrm{T}} = [\mathrm{a}]^{\mathrm{T}}[\lambda]$ και επειδή $[\mathrm{a}]^{\mathrm{T}}[\mathrm{a}] = [\mathrm{a}]^{-1}[\mathrm{a}] = [\mathrm{I}]$ όπου $[\mathrm{I}]$ ο μοναδιαίος πίνακας θα έχουμε: $[\mathrm{B}][\mathrm{a}]^{\mathrm{T}} = [\mathrm{a}]^{\mathrm{T}}[\lambda]$ ή σε ανεπτυγμένη μορφή:

$$\begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{13} \\ B_{21} & B_{22} & B_{23} \\ B_{3} & B_{32} & B_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \lambda_1 a_{11} & \lambda_2 a_{21} & \lambda_3 a_{31} \\ \lambda_1 a_{12} & \lambda_2 a_{22} & \lambda_3 a_{32} \\ \lambda_1 a_{13} & \lambda_2 a_{23} & \lambda_3 a_{33} \end{pmatrix} = \qquad \text{(Z-95)}$$

$$= \lambda_1 \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a_{12} & 0 & 0 \\ a_{13} & 0 & 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 & a_{21} & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & a_{23} & 0 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 0 & 0 & a_{31} \\ 0 & 0 & a_{32} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix}$$

όπου $\lambda_1 = 1/n_1'^2, \lambda_2 = 1/n_2'^2, \lambda_3 = 1/n_3'^2$ οι ιδιοτιμές και:

$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{12} \\ a_{13} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_{21} \\ a_{22} \\ a_{23} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_{31} \\ a_{32} \\ a_{33} \end{pmatrix} \tag{Z-96}$$

τα ιδιοδιανύσματα που είναι οι στήλες του πίνακα $[\mathrm{a}]^{\mathrm{T}}$. Επειδή οι πίνακες στροφής $[\mathrm{a}]$ είναι ορθογώνιοι, τα τρία ιδιοδιανύσματα της (σχ. Z-96) είναι στην κανονικοποιημένη τους μορφή. Δηλ. τα στοιχειά τους, είναι τα συνημίτονα κατεύθυνσης των αξόνων x_1', x_2', x_3' αντίστοιχα. Στο επόμενο παράδειγμα εφαρμόζουμε τα προαναφερόμενα.

α) *Κρύσταλλος* GaAs . *Πεδίο κατά τη διεύθυνση* [111]

Αν το πεδίο $\mathbf{E} = E_1\mathbf{i} + E_2\mathbf{j} + E_3\mathbf{k}$ εφαρμοστεί 'διαγώνια' των κυρίων αξόνων $+x_1, +x_2, +x_3$ τότε θα έχουμε: $E_1 = E_2 = E_3 = E/\sqrt{3}$. Επομένως με δεδομένη τη μορφή του πίνακα των ηλεκτροοπτικών συντελεστών του GaAs (Σχ. Z-3), ο διαταραγμένος πίνακας $[\mathrm{B}]$ της αδιαπερατότητας (σχ. Z-87) παίρνει τη μορφή:

$$\begin{pmatrix} 1/n_o^2 & r_{41}E/\sqrt{3} & r_{41}E/\sqrt{3} \\ r_{41}E/\sqrt{3} & 1/n_o^2 & r_{41}E/\sqrt{3} \\ r_{41}E/\sqrt{3} & r_{41}E/\sqrt{3} & 1/n_o^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.087041972 & 8.25610\times10^{-7} & 8.25610\times10^{-7} \\ 8.25610\times10^{-7} & 0.087041972 & 8.25610\times10^{-7} \\ 8.25610\times10^{-7} & 8.25610\times10^{-7} & 0.087041972 \end{pmatrix}$$

Δεδομένου ότι: $r_{41} = 1.43\times10^{-12}\,\mathrm{m/V}$, $E = 10^6\,\mathrm{V/m}$ και $n_o = 3.3895$ για $\lambda = 1.15\mu\mathrm{m}$. Βλέπουμε δηλ. ότι τα διαγώνια στοιχεία πίνακα $[\mathrm{B}]$ δεν διαταραχτήκαν, ενώ τα μη διαγώνια διαταραχτήκαν με τον ίδιο ακριβώς τρόπο.

Για τη διαγωνιοποίηση του πίνακα αυτού, εφαρμόζουμε τη γνωστή μας ήδη μέθοδο του Jacobi με απαρχή την προσπάθεια μηδενισμού του στοιχείου B_{12}. Επομένως κατά τα γνωστά η πρώτη στροφή θα γίνει περί τον άξονα $+x_3$ στο επίπεδο x_1, x_2. Επομένως η γωνία στροφής για το μηδενισμό του θα δίνεται από τη (σχ. Z-90β) και επειδή $B_{11} = B_{22}$ και $B_{12} \neq 0$ θα έχουμε $\phi = 45^0$. Τότε με τη βοήθεια των (σχ. Z-90α) τα στοιχεία του νέου πίνακα $[\mathrm{B}]'$ για τον οποίο $B_{12}' = B_{21}' = 0$ θα είναι:

$$\begin{pmatrix} B'_{11} & B'_{12} & B'_{13} \\ B'_{21} & B'_{22} & B'_{23} \\ B'_{31} & B'_{32} & B'_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.087042797 & 0 & 1.16759\times10^{-6} \\ 0 & 0.087041147 & 0 \\ 1.16759\times10^{-6} & 0 & 0.087041972 \end{pmatrix}$$

Επομένως βλέπουμε ότι απαιτείται και ο μηδενισμός των στοιχείων $B'_{13} = B'_{31}$ προκειμένου να διαγωνιοποιηθεί ο πίνακας $[\mathrm{B}]$. Τώρα η στροφή θα γίνει στο επίπεδο x_1, x_3 περί τον άξονα $-x_2$ και από τη (σχ. Z-92α) βρίσκουμε: $\theta = 35.26650213^0$ με αντικατάσταση των $B'_{11}, B'_{33}, B'_{13}$ από τις προηγουμένως υπολογισθείσες τιμές τους. Τότε τα στοιχειά του νέου (διαγωνιοποιημένου πλέον) πίνακα $[\mathrm{B}]''$ (σχ. Z-92β) θα είναι:

$$\begin{pmatrix} B''_{11} & B''_{12} & B''_{13} \\ B''_{21} & B''_{22} & B''_{23} \\ B''_{31} & B''_{32} & B''_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8.7043621\times10^{-2} & 0 & 0 \\ 0 & 8.7041145\times10^{-2} & 0 \\ 0 & 0 & 8.7041145\times10^{-2} \end{pmatrix}$$

Επομένως: $n'_1 = 1/\sqrt{B''_{11}} = 3.3894679$, $n'_2 = n'_3 = 1/\sqrt{B''_{22}} = 3.3895161$ ($B''_{22} = B''_{33}$). Άρα ο κρύσταλλος καθίσταται αρνητικός μονοάξονας και όπως θα διαπιστώσουμε στα επόμενα ο οπτικός του άξονας είναι η διεύθυνση $[111]$.

Προκειμένου να υπολογίσουμε τα ιδιοδιανύσματα των x'_1, x'_2, x'_3 (δηλ. τις διευθύνσεις τους ως προς τους άξονες x_1, x_2, x_3), θ' αναφερθούμε στις (σχ. Z-95,96). Επομένως θα πρέπει να υπολογίσουμε τον συνολικό πίνακα μετασχηματισμού $[\mathrm{a}]^{\mathrm{T}}$, του οποίου οι στήλες θα είναι τα ζητούμενα ιδιοδιανύσματα. Αλλά:

$$[\mathrm{a}]^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi & 0 \\ \sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & -\sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \cos\phi\cos\theta & -\sin\phi & -\cos\phi\sin\theta \\ \sin\phi\cos\theta & \cos\phi & -\sin\phi\sin\theta \\ \sin\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.5773503 & -0.7071068 & -0.4082483 \\ 0.5773503 & 0.7071068 & -0.4082483 \\ 0.5773503 & 0 & 0.8164966 \end{pmatrix}$$

Επομένως:

$$\mathbf{x}_1' = \begin{pmatrix} 0.5773503 \\ 0.5773503 \\ 0.5773503 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{pmatrix} \ , \ \mathbf{x}_2' = \begin{pmatrix} -0.7071068 \\ 0.7071068 \\ 0 \end{pmatrix} \ , \ \mathbf{x}_3' = \begin{pmatrix} -0.4082483 \\ -0.4082483 \\ 0.8164966 \end{pmatrix}$$

Παρατηρούμε ότι το ιδιοδιάνυσμα $\mathbf{x}_1'$ έχει διεύθυνση 'διαγώνια' ως προς τους άξονες $+x_1, +x_2, +x_3$, ιδιοτιμή $B_{11}'' = 1/n_1'^2 = 8.7043621 \times 10^{-2}$ και δ.δ. για διάδοση στη διεύθυνση αυτή $n_1' = 3.3894679$. Η τομή του ελλειψοειδούς ως προς x_1', x_2', x_3' από επίπεδο κάθετο προς τη διεύθυνση αυτή είναι κύκλος επειδή $n_2' = n_3' = 1/\sqrt{B_{22}''} = 3.3895161$ ($B_{22}'' = B_{33}''$). Άρα το $\mathbf{x}_1'$ ταυτίζεται με τον οπτικό του άξονα. Επομένως ο κρύσταλλος του GaAs με την εφαρμογή του πεδίου κατά την κρυσταλλογραφική διεύθυνση $[111]$, καθίσταται αρνητικός μονοάξονας ($n_1' < n_2' = n_3'$).

Τετραγωνικό ηλεκτροοπτικό φαινόμενο (Kerr effect)

Για την ανάδειξη του γραμμικού (πρωτεύοντος*) ηλεκτροοπτικού φαινομένου, εφαρμόσαμε τυπικά στον κρύσταλλο πεδία της τάξης των 10^6 V/m. Κάτω από αυτές τις συνθήκες τα στοιχεία $B_{ij}(\mathbf{E})$ του πίνακα των αδιαπερατοτήτων δίνονται (σχ. Ζ-3) από την:

$$B_{ij}(\mathbf{E}) = B_{ij}(0) + r_{ijk} E_k \quad i, j, k = 1, 2, 3 \tag{Z-97}$$

με την προϋπόθεση ότι ο κρύσταλλος δεν είναι κεντροσυμμετρικός. Όπου r_{ijk} οι γραμμικοί ηλεκτροοπτικοί συντελεστές. Αν όμως ο κρύσταλλος έχει κέντρο συμμετρίας τότε αποδεικνύεται ότι $r_{ijk} = 0$. Πράγματι θεωρούμε ότι σ' ένα τέτοιου είδους κρύσταλλο, εφαρμόζουμε ένα πεδίο $\mathbf{E}$ προς μια ορισμένη διεύθυνση. Η δράση αυτού του πεδίου (εξετάζοντας το πρόβλημα σε μία έστω διάσταση), θα μας δώσει μια μεταβολή στην αδιαπερατότητα ΔB_1 ίση με:

$$\Delta B_1 = rE \tag{Z-98}$$

* Οι έννοιες του ***πρωτεύοντος*** και του ***δευτερεύοντος*** γραμμικού και τετραγωνικού ηλεκτροοπτικού φαινομένου θα παρατεθούν στα επόμενα.

όπου r ο ηλεκτροοπτικός συντελεστής. Έστω ότι κατόπιν εφαρμόζουμε το πεδίο $\mathbf{E}$ στην αντίθετη με την πρώτη διεύθυνση οπότε: $\mathbf{E}' = -\mathbf{E}$. Άρα η μεταβολή ΔB_2 στην αδιαπερατότητα θα δίνεται από τη σχέση:

$$\Delta B_2 = -rE \qquad \text{(Z-99)}$$

Επειδή όμως ο κρύσταλλος έχει συμμετρία ως προς το κέντρο του, δεν έχουμε κανένα λόγο να μην δεχτούμε ότι $\Delta B_1 = \Delta B_2$. Επομένως από τις (σχ. Z-98,99) $r = -r$ και η τελευταία ισχύει μόνον όταν $r = 0$. Το γεγονός αυτό μας οδηγεί στο συμπέρασμα ότι στους κεντροσυμμετρικούς κρυστάλλους καθώς και στα ισότροπα υλικά (στερεά, υγρά και αέρια) δεν υφίσταται πρωτεύον γραμμικό ηλεκτροοπτικό φαινόμενο.

Η εφαρμογή όμως σε τέτοιου είδους υλικά σχετικά ισχυρότερων πεδίων, ακόμα και σε κεντροσυμμετρικούς κρυστάλλους, αναδεικνύει επαγόμενη διπλοθλαστικότητα. Το γεγονός αυτό είναι γνωστό σαν ***φαινόμενο Kerr (Kerr effect)*** από το όνομα αυτού που το ανακάλυψε το 1877. Είναι φαινόμενο τετραγωνικό. Δηλ. εξαρτάται από τους όρους των γινομένων ανά δύο των συνιστωσών του εφαρμοζόμενου ηλεκτρικού πεδίου. Κάτω από αυτές τις συνθήκες (και για τις περιπτώσεις μη ύπαρξης γραμμικού ηλεκτροοπτικού φαινομένου δηλ. $r_{ijk} = 0$) η (σχ. Z-97) γίνεται:

$$B_{ij}(\mathbf{E}) = B_{ij}(0) + s_{ijkl}E_kE_l \quad i,j,k,l = 1,2,3 \qquad \text{(Z-100)}$$

όπου E_k, E_l $k,l = 1,2,3$ οι συνιστώσες του πεδίου και s_{ijkl} οι ***τετραγωνικοί (quadratic)*** ή ***Kerr ηλεκτροοπτικοί συντελεστές***, με διαστάσεις $\left(\mathrm{m}^2/\mathrm{V}^2\right)$ και τάξη μεγέθους $\left(10^{-18}\right)$. Τα s_{ijkl} είναι τα στοιχεία ενός τανυστή τέταρτης τάξης και ο αριθμός τους για την πλήρη του περιγραφή είναι $\left(3^4 = 81\right)$. Οι τιμές αυτών των στοιχείων έχουν σχέση με την κρυσταλλική συμμετρία και το συγκεκριμένο εκάστοτε υλικό. Διευθετημένα σε 'πίνακες' καθορισμένης συμμετρίας, θα μας χρησιμεύσουν (σχ. Z-100), για τον υπολογισμό των στοιχείων $B_{ij}(\mathbf{E})$ της αδιαπερατότητας, που περιγράφουν το διαταραγμένο ελλ. των δ.δ. υπό την επίδραση του τετραγωνικού ηλεκτροοπτικού φαινομένου.

Ένα οποιοδήποτε στοιχείο του πίνακα της αδιαπερατότητας (έστω το B_{12}) εκφράζεται ως εξής:

$$
\begin{aligned}
B_{12}(\mathbf{E}) = B_{12}(0) + s_{12kl}E_kE_l = s_{121l}E_1E_l + s_{122l}E_2E_l + s_{123l}E_3E_l = \\
= s_{1211}E_1E_1 + s_{1212}E_1E_2 + s_{1213}E_1E_3 + \\
+ s_{1221}E_2E_1 + s_{1222}E_2E_2 + s_{1223}E_2E_3 + \\
+ s_{1231}E_3E_1 + s_{1232}E_3E_2 + s_{1233}E_3E_3
\end{aligned}
$$

επειδή $B_{12}(0) = 0$ σαν στοιχείο του διαγώνιου πίνακα $B_{ij}(0)$. Δηλ. το στοιχείο $B_{12}(\mathbf{E})$ εκφράζεται σαν ένας γραμμικός συνδυασμός (εννέα προσθετέων) των γινομένων των συνιστωσών του εφαρμοζόμενου ηλεκτρικού πεδίου ανά δύο. Κάτω από αυτές τις συνθήκες στη γενικότερη περίπτωση, τα στοιχεία των συντελεστών του τετραγωνικού ηλεκτροοπτικού φαινομένου – όπως ήδη αναφέραμε – είναι 81 τον αριθμό. Αποδεικνύεται όμως με τη βοήθεια της θερμοδυναμικής και με βάση την γενικότερη συμμετρία των κρυστάλλων ότι:

$$s_{ijkl} = s_{jikl} \quad \text{και} \quad s_{ijkl} = s_{ijlk} \tag{Z-101}$$

Τότε τα στοιχεία s_{ijkl} περιορίζονται σε 36 τον αριθμό, τα οποία ανάλογα με την κρυσταλλική τάξη στην οποία ανήκει το υλικό, έχουν ορισμένες τιμές ή είναι μηδενικά. Με βάση αυτά τα δεδομένα και χρησιμοποιώντας μια συντομογραφία, οι τέσσερεις δείκτες των τετραγωνικών ηλεκτροοπτικών συντελεστών γίνονται δύο. Η συντομογραφία είναι η εξής:

$$(11)\to 1, (22)\to 2, (33)\to 3, (23) = (32)\to 4, (13) = (31)\to 5, (12) = (21)\to 6$$

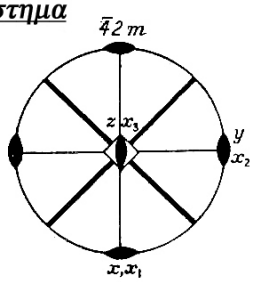
Οπότε μπορούμε να γράφουμε:

$$s_{ijkl} \to s_{pq} \quad p,q = 1,2,3,\cdots,6 \tag{Z-102}$$

KH_2PO_4 (KDP) ***Τετραγωνικό σύστημα***

422, 4mm, $\bar{4}$2m, 4/mm

$$
\mathbf{S}_{ij} = \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} & 0 & 0 & 0 \\ s_{12} & s_{11} & s_{13} & 0 & 0 & 0 \\ s_{31} & s_{31} & s_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & s_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & s_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & s_{66} \end{pmatrix}
\quad i = 1,2,..,6 \quad j = 1,2,..,6
$$



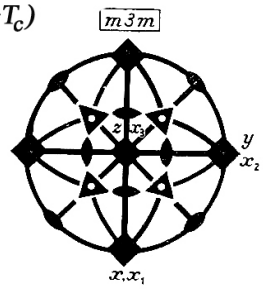
$n_e^3(s_{33} - s_{13}) = 31 \times 10^{-18}\ m^2/V^2$
$n_o^3(s_{31} - s_{11}) = 13.5$ -//-
$n_o^3(s_{12} - s_{11}) = 8.9$ -//-
$n_o^3 s_{66} = 3.0$ -//-
$\lambda = 0.546\ \mu m$
$n_o = 1.5115$
$n_e = 1.4698$

(Σχ. Z-17)

$BaTiO_3$ ***Κυβικό σύστημα*** *($T>T_c$)*

432, m3m, $\bar{4}$3m

$$S_{ij}=\begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{12} & 0 & 0 & 0 \\ s_{12} & s_{11} & s_{12} & 0 & 0 & 0 \\ s_{12} & s_{12} & s_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & s_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & s_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & s_{44} \end{pmatrix}_{\substack{i=1,2,..,6 \\ j=1,2,..,6}}$$



$s_{11}- s_{12}= 2290 \times 10^{-18}\ m^2/V^2$
$\lambda = 0.6328$ mμ
$n = 2.42$

(Σχ. Z-18)

Συντελεστές S_{ij} για ισότροπα υλικά

$$S_{ij}=\begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{12} & 0 & 0 & 0 \\ s_{12} & s_{11} & s_{12} & 0 & 0 & 0 \\ s_{12} & s_{12} & s_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(s_{11}-s_{12}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(s_{11}-s_{12}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(s_{11}-s_{12}) \end{pmatrix}_{\substack{i=1,2,..,6 \\ j=1,2,..,6}}$$

(Σχ. Z-19)

Έχουμε λοιπόν τη δυνατότητα οι συντελεστές του τετραγωνικού ηλεκτροοπτικού φαινομένου ενός υλικού που ανήκει σε μια από τις κρυσταλλικές τάξεις, να γραφούν με τη μορφή πινάκων (6×6). Στα (Σχ. Z-17,18,19) παραθέτουμε τη μορφή αυτών των πινάκων για δύο κρυστάλλους που ανήκουν σε αντίστοιχα κρυσταλλογραφικά συστήματα καθώς και τη μορφή του πίνακα που αντιστοιχεί στα ισότροπα υλικά δεδομένου ότι τα τελευταία εμφανίζουν τετραγωνικό ηλεκτροοπτικό φαινόμενο.

Η εξίσωση τελικά που θα περιγράφει το νέο ελλειψοειδές των δ.δ. (απουσία του γραμμικού ηλεκτροοπτικού φαινομένου) θα είναι:

$$B_{ij}(\mathbf{E})x_i x_j = \left[B_{ij}(0)+s_{ijkl}E_k E_l\right]x_i x_j = 1 \qquad \text{(Z-103)}$$

όπου $B_{ij}(0)$ τα στοιχεία του διαγώνιου πίνακα της (σχ. Z-2). Η ανάπτυξη της (σχ. Z-103) κατ' αρχή ως προς $j=1,2,3$ θα μας δώσει:

$$\left[B_{i1}(0)+s_{i1kl}E_k E_l\right]x_i x_1 + \left[B_{i2}(0)+s_{i2kl}E_k E_l\right]x_i x_2 + \left[B_{i3}(0)+s_{i3kl}E_k E_l\right]x_i x_3 = 1$$

Κατόπιν η ανάπτυξή της ως προς $i = 1,2,3$ δίνει:

$$\begin{aligned}
&\left[B_{11}(0) + s_{11kl}E_kE_l\right]x_1x_1 + \left[B_{21}(0) + s_{21kl}E_kE_l\right]x_2x_1 + \left[B_{31}(0) + s_{31kl}E_kE_l\right]x_3x_1 + \\
&\left[B_{12}(0) + s_{12kl}E_kE_l\right]x_1x_2 + \left[B_{22}(0) + s_{22kl}E_kE_l\right]x_2x_2 + \left[B_{32}(0) + s_{32kl}E_kE_l\right]x_3x_2 + \\
&\left[B_{13}(0) + s_{13kl}E_kE_l\right]x_1x_3 + \left[B_{23}(0) + s_{23kl}E_kE_l\right]x_2x_3 + \left[B_{33}(0) + s_{33kl}E_kE_l\right]x_3x_3 = 1
\end{aligned}$$

Κατόπιν εξαλείφοντας τους μηδενικούς όρους:

$$\begin{aligned}
&\left[B_{11}(0) + s_{11kl}E_kE_l\right]x_1^2 + \left[B_{22}(0) + s_{22kl}E_kE_l\right]x_2^2 + \left[B_{33}(0) + s_{33kl}E_kE_l\right]x_3^2 + \\
&\quad + 2s_{23kl}E_kE_lx_2x_3 + 2s_{13kl}E_kE_lx_1x_3 + 2s_{12kl}E_kE_lx_1x_2 = 1
\end{aligned} \qquad \text{(Z-104)}$$

Ο όρος $s_{11kl}E_kE_l$ του x_1^2 αναπτύσσεται για $k,l = 1,2,3$ ως εξής:

$$\begin{aligned}
&s_{11kl}E_kE_l = s_{111l}E_1E_l + s_{112l}E_2E_l + s_{113l}E_3E_l = \\
&= s_{1111}E_1^2 + s_{1112}E_1E_2 + s_{1113}E_1E_3 + \\
&\quad s_{1121}E_1E_2 + s_{1122}E_2^2 + s_{1123}E_2E_3 + \\
&\quad s_{1131}E_1E_3 + s_{1132}E_2E_3 + s_{1133}E_3^2
\end{aligned}$$

και εφαρμόζοντας την προαναφερθείσα συντομογραφία όσον αφορά τους δείκτες, επειδή ισχύουν οι (σχ. Z-101) θα έχουμε:

$$s_{11kl}E_kE_l = s_{11}E_1^2 + s_{12}E_2^2 + s_{13}E_3^2 + 2s_{14}E_2E_3 + 2s_{15}E_1E_3 + 2s_{16}E_1E_2$$

Και με παρόμοιο τρόπο:

$$\begin{aligned}
s_{22kl}E_kE_l &= s_{21}E_1^2 + s_{22}E_2^2 + s_{23}E_3^2 + 2s_{24}E_2E_3 + 2s_{25}E_1E_3 + 2s_{26}E_1E_2 \\
s_{33kl}E_kE_l &= s_{31}E_1^2 + s_{32}E_2^2 + s_{33}E_3^2 + 2s_{34}E_2E_3 + 2s_{35}E_1E_3 + 2s_{36}E_1E_2 \\
s_{23kl}E_kE_l &= s_{41}E_1^2 + s_{42}E_2^2 + s_{43}E_3^2 + 2s_{44}E_2E_3 + 2s_{45}E_1E_3 + 2s_{46}E_1E_2 \\
s_{13kl}E_kE_l &= s_{51}E_1^2 + s_{52}E_2^2 + s_{53}E_3^2 + 2s_{54}E_2E_3 + 2s_{55}E_1E_3 + 2s_{56}E_1E_2 \\
s_{12kl}E_kE_l &= s_{61}E_1^2 + s_{62}E_2^2 + s_{63}E_3^2 + 2s_{64}E_2E_3 + 2s_{65}E_1E_3 + 2s_{66}E_1E_2
\end{aligned}$$

Αν αντικαταστήσουμε αυτές στη (σχ. Z-104) θα έχουμε τελικά την εξίσωση που μας περιγράφει το ελλ. των δ.δ. σε συνθήκες δράσης του τετραγωνικού μόνον ηλεκτροοπτικού φαινομένου:

$$
\begin{aligned}
&\left(1/n_1^2 + s_{11}E_1^2 + s_{12}E_2^2 + s_{13}E_3^2 + 2s_{14}E_2E_3 + 2s_{15}E_1E_3 + 2s_{16}E_1E_2\right)x_1^2 + \\
&\left(1/n_2^2 + s_{21}E_1^2 + s_{22}E_2^2 + s_{23}E_3^2 + 2s_{24}E_2E_3 + 2s_{25}E_1E_3 + 2s_{26}E_1E_2\right)x_2^2 + \\
&\left(1/n_3^2 + s_{31}E_1^2 + s_{32}E_2^2 + s_{33}E_3^2 + 2s_{34}E_2E_3 + 2s_{35}E_1E_3 + 2s_{36}E_1E_2\right)x_3^2 + \\
&2\left(s_{41}E_1^2 + s_{42}E_2^2 + s_{43}E_3^2 + 2s_{44}E_2E_3 + 2s_{45}E_1E_3 + 2s_{46}E_1E_2\right)x_2x_3 + \\
&2\left(s_{51}E_1^2 + s_{52}E_2^2 + s_{53}E_3^2 + 2s_{54}E_2E_3 + 2s_{55}E_1E_3 + 2s_{56}E_1E_2\right)x_1x_3 + \\
&2\left(s_{61}E_1^2 + s_{62}E_2^2 + s_{63}E_3^2 + 2s_{64}E_2E_3 + 2s_{65}E_1E_3 + 2s_{66}E_1E_2\right)x_1x_2 = 1
\end{aligned}
\qquad \text{(Z-105)}
$$

Υλικό	Συμμετρία	Μήκος κύματος (μm)	Ηλεκτροοπτικοί συντελεστές $s_{ij}\left(10^{-18}\,\text{m}^2/\text{V}^2\right)$	Δείκτης διάθλασης
KH_2PO_4 (KDP)	$\bar{4}2m$	0.540	$n_e^3\left(s_{33}-s_{13}\right)=31$	$n_0=1.5115$ $n_e=1.4698$ $(\theta\varepsilon\rho\mu.\ \delta\omega\mu.)$ $\lambda=546\,\text{nm}$
			$n_o^3\left(s_{31}-s_{11}\right)=13.5$	
			$n_o^3\left(s_{21}-s_{11}\right)=8.9$	
			$n_o^3 s_{66}=3.0$	
$(NH_4)H_2PO_4$ (ADP)	$\bar{4}2m$	0.540	$n_e^3\left(s_{33}-s_{13}\right)=24$	$n_0=1.5266$ $n_e=1.4808$ $(\theta\varepsilon\rho\mu.\ \delta\omega\mu.)$ $\lambda=546\,\text{nm}$
			$n_o^3\left(s_{31}-s_{11}\right)=16.5$	
			$n_o^3\left(s_{21}-s_{11}\right)=5.8$	
			$n_o^3 s_{66}=2.0$	
$BaTiO_3$ $\left(T_C=120^0\text{C}\right)$	m3m	0.633	$s_{11}-s_{12}=2290\ T>T_C$	$n=2.42$
		0.500	$n_o^3\left(s_{11}-s_{12}\right)=72,000\ T\simeq T_C$	
			$n_o^3 s_{44}=44,000$	

(Πίν. Z-20)

Γνωρίζοντας λοιπόν: α) Τα στοιχεία του μη διαταραγμένου πίνακα $B_{ij}(0)$ των αδιαπερατοτήτων, β) τον (6×6) πίνακα $s_{ij}\ i,j=1,2,\cdots,6$ των τετραγωνικών ηλεκτροοπτικών συντελεστών και γ) Τη διεύθυνση εφαρμογής του ηλεκτρικού πεδίου $\mathbf{E}=E_1\mathbf{i}+E_2\mathbf{j}+E_3\mathbf{k}$, μέσω της (σχ. Z-105) προσδιορίζουμε το ελλ. των δ.δ. του κρυστάλλου. Για $\mathbf{E}=0$ η (σχ. Z-105) καταλήγει στην (σχ. Z-1). Για την περίπτωση που ο κρύσταλλος δεν είναι κεντροσυμμετρικός, τότε στη (σχ. Z-105) θα πρέπει να περιλάβουμε και τους όρους που συνεισφέρει το γραμμικό ηλεκτροοπτικό φαινόμε-

νο όπως δίνονται από τη (σχ. Ζ-8). Στον (Πίν. Ζ-20) παρατίθενται οι συντελεστές s_{ij} (ή μάλλον οι διαφορές τους όπως εμφανίζονται στα πρακτικά προβλήματα), ενός ορισμένου αριθμού κρυστάλλων στους οποίους επάγεται το τετραγωνικό ηλεκτροοπτικό φαινόμενο.

Θα πρέπει τέλος ν' αναφέρουμε: α) Η διαδικασία των υπολογισμών των ιδιοκαταστάσεων (δηλ. προσδιορισμού των διευθύνσεων των αξόνων $\mathbf{x}'_1, \mathbf{x}'_2, \mathbf{x}'_3$ του διαταραγμένου λόγω του τετραγωνικού ηλεκτροοπτικού φαινομένου ελλ. των δ.δ. ως προς το σύστημα συντεταγμένων των κυρίων αξόνων x_1, x_2, x_3) και των δ.δ. n'_1, n'_2, n'_3 (κυρίων δ.δ.) και β) Η διαδικασία των υπολογισμών των ιδιοκαταστάσεων $\mathbf{D}_1, \mathbf{D}_2$ και των δ.δ. n_1, n_2 για διάδοση κατά τη διεύθυνση μιας κυματοκαθέτου $\mathbf{k}$ στο εσωτερικό ενός κρυστάλλου, είναι πανομοιότυπη με αυτήν που ακολουθήσαμε στα παραδείγματα που αφορούσαν το γραμμικό ηλεκτροοπτικό φαινόμενο. Τα ίδια ακριβώς ισχύουν και για την περίπτωση συνύπαρξης του γραμμικού και του τετραγωνικού ηλεκτροοπτικού φαινομένου.

Παραδείγματα

α) Τετραγωνικό ηλεκτροοπτικό φαινόμενο στα ισότροπα υλικά

Τα ισότροπα υλικά κατά τα γνωστά εμφανίζουν μόνο τετραγωνικό Η/Ο φαινόμενο υπό την επίδραση ηλεκτρικού πεδίου. Τουλάχιστον για τα υγρά και τα αέρια, το γεγονός αυτό οφείλεται στον προσανατολισμό των ανισοτρόπων μορίων (από πόλωση) λόγω της εφαρμογής του ηλεκτ. πεδίου, ενώ για τα στερεά η ερμηνεία είναι πιο περίπλοκη. Το υλικό τελικά αποδεικνύεται ότι συμπεριφέρεται σαν μονοάξον, με τον οπτικό του άξονα στη διεύθυνση της εφαρμογής του πεδίου.

Υποθέτουμε τώρα ότι το πεδίο είναι το $\mathbf{E} = E\mathbf{k}$. Δηλ. εφαρμόζεται κατά τη διεύθυνση του άξονα x_3, αν και λόγω ισοτροπίας του υλικού η ανάλυση δεν θα διέφερε αν το πεδίο εφαρμοζόταν κατά τους x_1 ή x_2. Τότε με βάση τα στοιχεία του πίνακα των s_{ij} από το (Σχ. Ζ-19) και τη (σχ. Ζ-105) βρίσκουμε τελικά την εξίσωση:

$$\left(\frac{1}{n^2} + s_{12}E^2\right)x_1^2 + \left(\frac{1}{n^2} + s_{12}E^2\right)x_2^2 + \left(\frac{1}{n^2} + s_{11}E^2\right)x_3^2 = 1 \qquad \text{(Ζ-106)}$$

όπου: $E = E_3$, $s_{13} = s_{23} = s_{12}$, και $s_{33} = s_{11}$, λόγω των συμμετριών που εμφανίζουν τα στοιχεία s_{ij} για ισότροπο υλικό. Από τη (σχ. Ζ-106) διαπιστώνουμε ότι το νέο ελλ. των δ.δ. άλλαξε σχήμα και από σφαίρα έγινε ελλειψοειδές εκ περιστροφής περί

τον άξονα x_3, ενώ ο προσανατολισμός των αξόνων του παρέμεινε ο ίδιος. Δηλ. $x_1' \equiv x_1, x_2' \equiv x_2, x_3' \equiv x_3$. Επομένως οι κύριοι δ.δ. θα δίνονται από τις σχέσεις:

$$\frac{1}{n_1'^2} = \frac{1}{n_2'^2} = \frac{1}{n^2} + s_{12}E^2 \quad , \quad \frac{1}{n_3'^2} = \frac{1}{n^2} + s_{11}E^2$$

Από τις οποίες προκύπτει ότι για: $n_1' = n_2' \simeq n$, $n_3' \simeq n$

$$n_1' = n_2' = n - \frac{1}{2}n^3 s_{12}E^2 \quad , \quad n_3' = n - \frac{1}{2}n^3 s_{11}E^2 \qquad \text{(Z-107)}$$

Επομένως η διπλοθλαστικότητα Δn θα είναι:

$$\Delta n = n_3' - n_1' = \frac{1}{2}n^3\left(s_{12} - s_{11}\right)E^2 = -n^3 s_{44}E^2 \qquad \text{(Z-108)}$$

όπου χρησιμοποιήσαμε τη σχέση: $s_{44} = (1/2)(s_{11} - s_{12})$ από τον πίνακα των Η/Ο συντελεστών για τα ισότροπα υλικά. Η (σχ. Z-108) μπορεί να γραφεί ως εξής:

$$\Delta n = K\lambda E^2 \qquad \text{(Z-109)}$$

όπου η K ονομάζεται ***σταθερή Kerr (Kerr constant)***. λ είναι το μ.κ. στο κενό, στο οποίο μετρούνται οι συντελεστές s_{ij} και n ο δ.δ. Οπότε $n^3 s_{44} = -K\lambda$. Στον (Πίν. Z-21) παραθέτουμε τις τιμές των K για ορισμένα υγρά τα οποία χρησιμοποιούνται στην πράξη.

Υλικό	$\lambda(\text{nm})$	n	$K\left(\text{m/V}^2\right)$
Νερό	589	1.33	5.1×10^{-14}
Nitro toluene	589		1.37×10^{-12}
Nitrobenzene	589		2.44×10^{-12}
Benzene	546	1.503	4.9×10^{-15}
CS_2	546	1.633	3.88×10^{-14}
	633	1.619	3.18×10^{-14}
CCl_4	546	1.460	8.6×10^{-16}
	633	1.456	7.4×10^{-16}

(Πίν. Z-21)

Έστω ότι διαθέτουμε ένα δοχείο από γυαλί σχήματος ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου που περιέχει νερό. Με τη βοήθεια μεταλλικών επιφανειών που βρίσκονται σε επαφή με δύο απέναντι έδρες του δοχείου, εφαρμόζουμε μια διαφορά δυναμικού έτσι ώστε στο εσωτερικό του να υφίσταται πεδίο $E = 10^6\ \mathrm{V/m}$. Κάθετα σ' αυτή τη διεύθυνση διαδίδεται επίπεδο μέτωπο κύματος που προέρχεται από λυχνία Na με $\lambda = 589\mathrm{nm}$. Θα προσπαθήσουμε να υπολογίσουμε το πάχος d του δοχείου κατά τη διεύθυνση της διάδοσης, έτσι ώστε το τελευταίο ν' αποτελεί πλακίδιο καθυστέρησης $\lambda/4$.

- Με τη βοήθεια της (σχ. Ζ-109) θα έχουμε: $(\Delta n)d = K\lambda E^2 d = \lambda/4 \Rightarrow$ $\Rightarrow d = 1/4KE^2$ και επειδή $K = 5.1\times10^{-14}\ \mathrm{m/V^2}$ και $E^2 = 10^{12}(\mathrm{V/m})^2$ βρίσκουμε: $d \simeq 4.9\mathrm{m}$ το οποίο δεν συνίσταται από πρακτική άποψη. Αν όμως το νερό αντικατασταθεί από Νιτροβενζένιο για το οποίο όπως βλέπουμε από τον (Πίν. Ζ-21) η τιμή της σταθερής Kerr είναι $K = 2.44\times10^{-12}\ \mathrm{m/V^2}$ βρίσκουμε $d \simeq 0.1\mathrm{m}$. Τα υλικά όμως Νιτροβενζένιο όπως και το Νιτροτουλουένιο παρά το ότι έχουν σταθερές Kerr δύο τάξεις μεγέθους μεγαλύτερες του νερού, είναι τοξικά και εύφλεκτα.

β) *Τετραγωνικό ηλεκτροοπτικό φαινόμενο στον κρύσταλλο* $\mathbf{KH_2PO_4}$ **(KDP)**. *Πεδίο κατά τη διεύθυνση του άξονα* x_3

Επειδή ο κρύσταλλος δεν είναι κεντροσυμμετρικός, θα πρέπει να εμφανίζει ταυτόχρονα γραμμικό και τετραγωνικό Η/Ο φαινόμενο. Για μικρές βέβαια τιμές του εφαρμοζόμενου ηλεκτρικού πεδίου, λόγω των ιδιαίτερα μικρών τιμών των συντελεστών s σε σχέση με τους r το φαινόμενο Kerr είναι δύσκολα μετρήσιμο. Στη γενικότερη λοιπόν περίπτωση μετά την επίδραση του ηλ. πεδίου το ελλ. των δ.δ. θα περιγράφεται από τη σχέση:

$$\left[B_{ij}(0) + r_{ijk}E_k + s_{ijkl}E_kE_l\right]x_ix_j = 1 \qquad \text{(Ζ-110)}$$

Με τη βοήθεια των συντομογραφιών όσον αφορά τους συντελεστές d_{ijk}, s_{ijkl} και των (σχ. Ζ-8) , (σχ. Ζ-105) και επειδή $\mathbf{E} = E_3\mathbf{k}$ το ελλ. των δ.δ. θα πάρει τη μορφή:

$$\left(\frac{1}{n_o^2} + s_{13}E_3^2\right)x_1^2 + \left(\frac{1}{n_o^2} + s_{13}E_3^2\right)x_2^2 + \left(\frac{1}{n_e^2} + s_{33}E_3^2\right)x_3^2 + \\ +2r_{63}E_3x_1x_2 = 1 \qquad \text{(Ζ-111)}$$

Προκειμένου τώρα με την κλασσική μέθοδο να περιγράψουμε το ελλ. των δ.δ. ως προς τους κύριους άξονές του x_1', x_2', x_3' το σύστημα συντεταγμένων x_1, x_2, x_3 θα στραφεί κατά γωνία θ ως προς τον άξονα $x_3 \equiv x_3''$. Οι σχέσεις μετασχηματισμού θα είναι:

$$x_1 = \cos\theta x_1' - \sin\theta x_2' \ , \ x_2 = \sin\theta x_1' + \cos\theta x_2' \ , \ x_3 = x_3'$$

Η αντικατάστασή τους στη (σχ. Ζ-111) και ο μηδενισμός του γινομένου $x_1' x_2'$ μας δίνει: $\theta = 45^0$. Τότε το ελλ. των δ.δ ως προς το σύστημα x_1', x_2', x_3' θα έχει τη μορφή:

$$\left[\frac{1}{n_o^2} + s_{13}E_3^2 + r_{63}E_3\right]x_1'^2 + \left[\frac{1}{n_o^2} + s_{13}E_3^2 - r_{63}E_3\right]x_2'^2 + \left[\frac{1}{n_e^2} + s_{32}E_3^2\right]x_3'^2 = 1 \quad \text{(Z-112)}$$

και οι κύριοι δ.δ. θα δίνονται από τις σχέσεις:

$$\left.\begin{aligned} n_1' &= n_o - \frac{1}{2}n_o^3\left(s_{13}E_3^2 + r_{63}E_3\right) \\ n_2' &= n_o - \frac{1}{2}n_o^3\left(s_{13}E_3^2 - r_{63}E_3\right) \\ n_3' &= n_e - \frac{1}{2}n_e^3 s_{32}E_3^2 \end{aligned}\right\}$$

γ) *Τετραγωνικό ηλεκτροοπτικό φαινόμενο στον κρύσταλλο* **$BaTiO_3$**

Το $BaTiO_3$ είναι γνωστός σιδηροηλεκτρικός κρύσταλλος. Μεταξύ των θερμοκρασιών $5\,^0\text{C} < \theta_c < 120\,^0\text{C}$ (όπου θ_c η ***θερμοκρασία μετάβασης (transition temperature)***, κρυσταλλώνεται στην τάξη (4mm) στην οποία και εμφανίζει έντονο Η/Ο φαινόμενο. Για θερμοκρασίες όμως $\theta_c > 120\,^0\text{C}$ μετατρέπεται σε κυβικό κρύσταλλο της τάξης (m3m). Δεδομένου ότι στην τάξη αυτή υφίσταται κέντρο συμμετρίας, δεν εμφανίζει γραμμικό αλλά μόνο τετραγωνικό Η/Ο φαινόμενο. Αν στην συγκεκριμένη περίπτωση εφαρμόσουμε ηλεκτρικό πεδίο στη διεύθυνση που είναι διαγώνια των κυρίων αξόνων $+x_1, +x_2$, δηλ. κατά την $\langle 110 \rangle$ τότε:

$\mathbf{E} = E_1\mathbf{i} + E_2\mathbf{j} = \left(E/\sqrt{2}\right)\mathbf{i} + \left(E/\sqrt{2}\right)\mathbf{j}$. Κατόπιν με τη βοήθεια των στοιχείων του (Σχ. Ζ-18) και της (σχ. Ζ-105), το ελλ. των δ.δ. στο σύστημα x_1, x_2, x_3 θα περιγράφεται

από τη σχέση:

$$\left(\frac{1}{n^2}+\frac{1}{2}s_{11}E^2+\frac{1}{2}s_{12}E^2\right)x_1^2+\left(\frac{1}{n^2}+\frac{1}{2}s_{11}E^2+\frac{1}{2}s_{12}E^2\right)x_2^2+ \\ +\left(\frac{1}{n^2}+s_{12}E^2\right)x_3^2+2s_{44}E^2x_1x_2=1 \qquad \text{(Z-113)}$$

Για την περιγραφή του ελλειψοειδούς ως προς τους κύριους άξονες x_1', x_2', x_3' οι μετασχηματισμοί είναι πανομοιότυποι με αυτούς του προηγουμένου παραδείγματος. Επομένως θα πρέπει να στρέψουμε το σύστημα x_1, x_2, x_3 περί τον $x_3 \equiv x_3''$ κατά $\theta = 45^0$. Τότε θα έχουμε:

$$\left[\frac{1}{n^2}+\frac{1}{2}\left(s_{11}+s_{12}\right)E^2+s_{44}E^2\right]x_1'^2+\left[\frac{1}{n^2}+\frac{1}{2}\left(s_{11}+s_{12}\right)E^2-s_{44}E^2\right]x_2'^2+ \\ +\left[\frac{1}{n^2}+s_{12}E^2\right]x_3'^2=1 \qquad \text{(Z-114)}$$

και οι κύριοι δ.δ. θα δίνονται από τις σχέσεις:

$$\left.\begin{aligned} n_1' &= n-\frac{1}{2}n^3s_{44}E^2-\frac{1}{4}n^3\left(s_{11}+s_{12}\right)E^2 \\ n_2' &= n+\frac{1}{2}n^3s_{44}E^2-\frac{1}{4}n^3\left(s_{11}+s_{12}\right)E^2 \\ n_3' &= n-\frac{1}{2}n^3s_{12}E^2 \end{aligned}\right\}$$

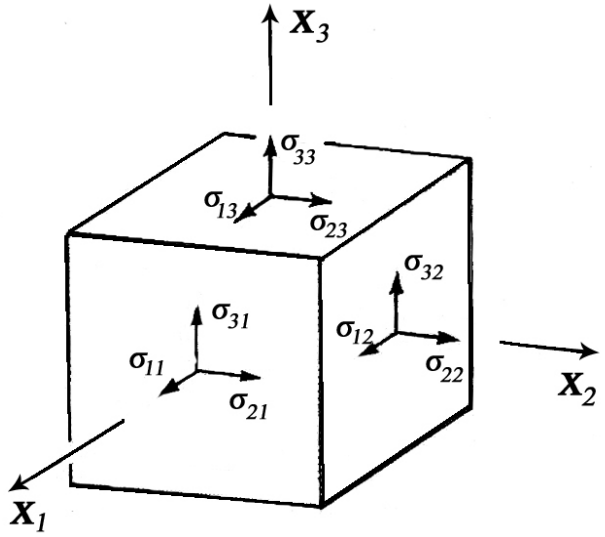
Επίσης με τις μεθόδους που περιγράψαμε στα προηγούμενα, μπορούμε να προσδιορίσουμε τις διευθύνσεις των αξόνων x_1', x_2', x_3' ως προς το σύστημα των κυρίων αξόνων x_1, x_2, x_3.

Ελαστικότητα και φωτοελαστικό φαινόμενο

Η έννοια της τάσης

Σώμα στο οποίο ασκούνται δυνάμεις ή γενικότερα σώμα του οποίου ένα τμήμα του ασκεί δυνάμεις σε γειτονικά του μέρη, λέμε ότι βρίσκεται σε κατάσταση τάσης. Θεωρούμε ένα στοιχειώδη όγκο (Σχ. Z-22) στο εσωτερικό ενός σώματος το οποίο υφίσταται τάσεις. Εδώ μας ενδιαφέρουν βασικά οι δυνάμεις που ασκούνται

στις επιφάνειες του στοιχειώδους όγκου και όχι οι δυνάμεις κατ' όγκο (όπως π.χ. οι δυνάμεις βαρύτητας). Μια τέτοια δύναμη ανά μονάδα επιφάνειας είναι αυτή που ονομάζεται ***τάση (stress)***. Οι τάσεις θα είναι ομογενείς, όταν δεν εξαρτώνται από τη θέση στο σώμα, του κατά τα άλλα σταθερού σχήματος και προσανατολισμού προαναφερόμενου στοιχειώδους τμήματος. Έστω ότι ο στοιχειώδης όγκος είναι κυβικού σχήματος και σ_{ij} είναι οι εφαρμοζόμενες τάσεις από το υπόλοιπο του σώματος σε



(Σχ. Ζ-22)

κάθε επιφάνειά του. σ_{ij} είναι η δύναμη ανά μονάδα επιφάνειας που εφαρμόζεται κατά τη διεύθυνση του $+Ox_i$ άξονα και ενεργεί στην επιφάνεια που είμαι κάθετη στην διεύθυνση του $+Ox_j$. Τα στοιχεία σ_{ij} αποδεικνύεται ότι συνιστούν τανυστή δεύτερης τάξης.

Λόγω του ότι η εφαρμοζόμενη τάση στον στοιχειώδη όγκο είναι ομογενής, οι εφαρμοζόμενες τάσεις σε δύο απέναντι έδρες του είναι ίσες κατά μέτρο και αντίθετης φοράς. Οι σ_{ij} με $i = j$ είναι οι ***κάθετες συνιστώσες (normal components)*** ενώ οι σ_{ij} με $i \neq j$ οι ***διατμητικές συνιστώσες (shear components)***. Υποθέτουμε επίσης ότι όλα τα τμήματα του σώματος βρίσκονται σε στατική ισορροπία και ότι δεν ασκούνται ροπές. Κάτω από αυτές τις συνθήκες αποδεικνύεται ότι:

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji} \qquad \text{(Ζ-115)}$$

το οποίο σημαίνει ότι ο πίνακας των στοιχείων σ_{ij} των τάσεων είναι συμμετρικός και μπορεί να τεθεί σε διαγώνια μορφή. Τότε τα στοιχεία $\sigma_{11} = \sigma_1$, $\sigma_{22} = \sigma_2$ και

$\sigma_{33} = \sigma_3$ ονομάζονται ***κύριες τάσεις (principal stresses)***. Στη γενικότερη περίπτωση και με τη βοήθεια των γνωστών συντομογραφιών:

$$(11)\to 1,(22)\to 2,(33)\to 3,(23)=(32)\to 4,(13)=(31)\to 5,(12)=(21)\to 6$$

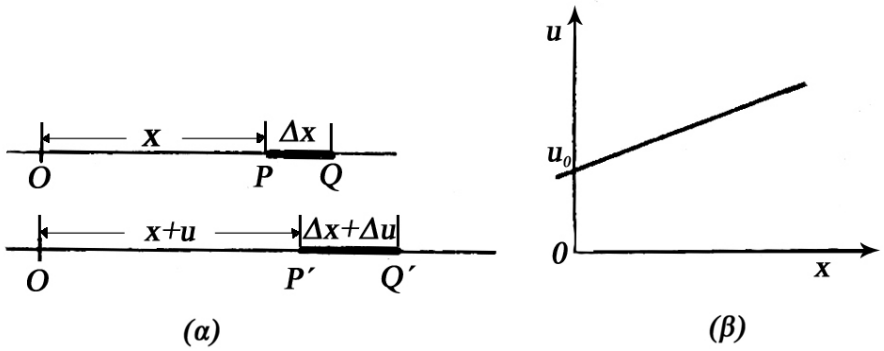
τα στοιχεία σ_{ij} του πίνακα των τάσεων μπορούν να γραφούν:

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \sigma_1 & \sigma_6 & \sigma_5 \\ \sigma_6 & \sigma_2 & \sigma_4 \\ \sigma_5 & \sigma_4 & \sigma_3 \end{pmatrix} \qquad \text{(Z-116)}$$

Η έννοια της σχετικής παραμόρφωσης

Ένα κλασσικό παράδειγμα ορισμού της σχετικής παραμόρφωσης (π.χ. κατ' όγκο ενός ομογενούς στερεού) δηλ. η ποσότητα $\Delta V/V$ (όπου ΔV η μεταβολή του όγκου του και V ο αρχικός του όγκος), είναι λόγω της διαστολής ή συστολής του εξαιτίας θερμοκρασιακής μεταβολής. Όπως θα δούμε όμως στα επόμενα, σχετική παραμόρφωση σ' ένα σώμα μπορεί να προκύψει και κάτω από την επίδραση μηχανικής τάσης (νόμος του Hooke) ή με την εφαρμογή ηλεκτρικού πεδίου (αντίστροφο πιεζοηλεκτρικό φαινόμενο).

Θ' αναφερθούμε κατ' αρχή για λόγους κατανόησης, στην έννοια της σχετικής παραμόρφωσης σε μία διάσταση. Έστω λοιπόν ότι διαθέτουμε μια εκτατή χορδή (Σχ. Z-23α) με αρχή το σταθερό σημείο O και σημειώνουμε κατά μήκος της



(Σχ. Z-23)

ένα σημείο P για το οποίο $OP = x$. Κατόπιν τανύουμε τη χορδή και η νέα θέση του P δηλ. το P' θα δίνεται από τη σχέση $OP' = x + u$. Θεωρούμε ότι η τάνυση

αυτή είναι ομογενής. Δηλ. $\Delta u/\Delta x = \text{σταθ.}$ που σημαίνει ότι το u συναρτήσει του x μεταβάλλεται γραμμικά. Έστω τώρα ότι πολύ κοντά στο σημείο P βρίσκεται το Q έτσι ώστε $PQ = \Delta x$. Τότε μετά την τάνυση της χορδής το Q καταλαμβάνει τη θέση Q' έτσι ώστε $P'Q' = \Delta x + \Delta u$. Κατά τη μελέτη της παραμόρφωσης, δεν μας ενδιαφέρει η πραγματική μετατόπιση μεταξύ των σημείων αλλά η σχετική τους, που ορίζεται από τη σχέση:

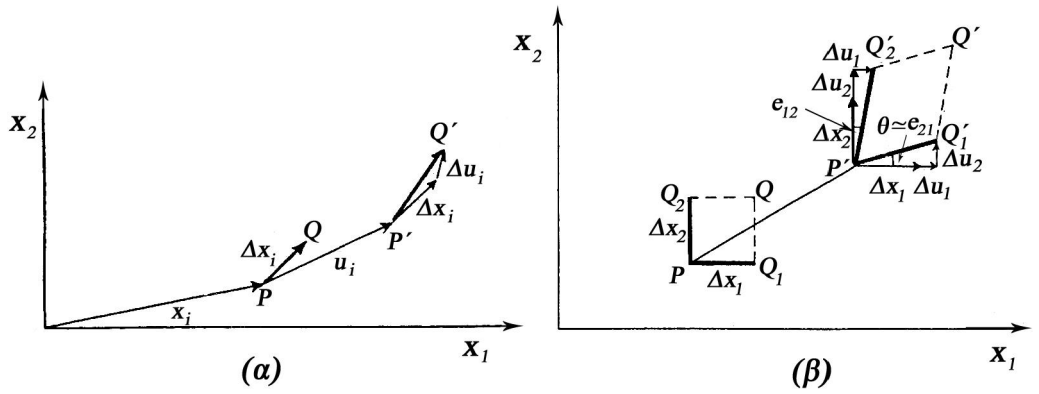
$$\frac{\text{μεταβολή του μήκους}}{\text{αρχικό μήκος}} = \frac{P'Q' - PQ}{PQ} = \frac{\Delta u}{\Delta x}$$

και η ***σχετική παραμόρφωση (strain)*** στο σημείο P θα ορίζεται από τη σχέση:

$$e = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = \frac{du}{dx} \qquad \text{(Z-117)}$$

Δηλ. η e θα είναι η κλίση της ευθείας $u(x)$ (Σχ. Z-23β). Τότε από τη (σχ. Z-117) θα έχουμε: $u = u_o + ex$.

Στο (Σχ. Z-24) δίνεται το διάγραμμα για την περιγραφή της σχετικής παραμόρφωσης (μικρής κλίμακας) σε δύο διαστάσεις. Όπου $(\Delta x_1, \Delta x_2)$ είναι οι συν-



(Σχ. Z-24)

ιστώσες του διανύσματος $\mathbf{PQ}$. $\mathbf{u}(u_1, u_2)$ το διάνυσμα της μετατόπισης και $(\Delta x_1 + \Delta u_1, \Delta x_2 + \Delta u_2)$ οι συνιστώσες του $\mathbf{P'Q'}$ μετά την παραμόρφωση του $\mathbf{PQ}$. Τότε επειδή οι συνιστώσες του $\mathbf{u}(u_1, u_2)$ είναι συναρτήσεις της θέσης μπορούμε να γράψουμε:

$$\left.\begin{aligned}\Delta u_1 &= \frac{\partial u_1}{\partial x_1}\Delta x_1 + \frac{\partial u_1}{\partial x_2}\Delta x_2 \\ \Delta u_2 &= \frac{\partial u_2}{\partial x_1}\Delta x_1 + \frac{\partial u_2}{\partial x_2}\Delta x_2\end{aligned}\right\} \qquad \text{(Z-118)}$$

Από φυσική άποψη η γεωμετρική παράσταση των (σχ. Z-118) μας περιγράφει τα εξής: Αν αρχικά θέσουμε $\Delta x_2 = 0$ τότε:

$$\Delta u_1 = \frac{\partial u_1}{\partial x_1}\Delta x_1 = e_{11}\Delta x_1 \ , \ \Delta u_2 = \frac{\partial u_2}{\partial x_1}\Delta x_1 = e_{21}\Delta x_1$$

Δηλ. $\Delta u_1 / \Delta x_1 = \partial u_1 / \partial x_1 = e_{11}$ είναι η σχετική παραμόρφωση του PQ_1 κατά μήκος του Ox_1. Επίσης επειδή $\tan\theta = \Delta u_2 / (\Delta x_1 + \Delta u_1)$ και $\Delta u_1 \ll$, τότε $\tan\theta \simeq \theta = \Delta u_2 / \Delta x_1 = e_{21}$. Άρα η σχετική παραμόρφωση του PQ_1 κατά μήκος του Ox_2 μας δίνει την αντίθετη των δεικτών του ρολογιού γωνία στροφής του PQ_1. Με τον ίδιο τρόπο ο e_{22} παριστάνει τη σχετική παραμόρφωση του PQ_2 κατά μήκος του Ox_2 και ο e_{12} την κατά τη φορά των δεικτών του ρολογιού στροφή του PQ_2. Επομένως το αποτέλεσμα της παραμόρφωσης του ορθογωνίου PQ_1QQ_2, είναι το πλάγιο παραλληλόγραμμο $P'Q_1'Q'Q_2'$.

Αποδεικνύεται* ότι η προαναφερόμενη διαδικασία της παραμόρφωσης που περιγράφεται από τα στοιχεία e_{ij}, ενέχει και το γεγονός της στροφής κατά μία ορισμένη γωνία ϕ (σαν όλο), του παραλληλογράμμου $P'Q_1'Q'Q_2'$. Η μαθηματική περιγραφή αυτού του γεγονότος, εκφράζεται από ένα αντισυμμετρικό πίνακα της μορφής $\begin{pmatrix} 0 & -\phi \\ \phi & 0 \end{pmatrix}$. Προκειμένου λοιπόν ν' αναδείξουμε καθαρά τα στοιχεία της σχετικής παραμόρφωσης, θα πρέπει από κάθε στοιχείο e_{ij} ν' αφαιρέσουμε το τμήμα που αφορά τη στροφή. Το τελευταίο επιτυγχάνεται αναλύοντας τον e_{ij} στο συμμετρικό του μέρος (καθαρή σχετική παραμόρφωση) και το αντισυμμετρικό του (καθαρή στροφή). Οπότε:

$$e_{ij} = \varepsilon_{ij} + \pi_{ij} \quad \text{όπου} \quad \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(e_{ij} + e_{ji}\right) \quad \text{και} \quad \pi_{ij} = \frac{1}{2}\left(e_{ij} - e_{ji}\right)$$

Επομένως ο πίνακας των στοιχείων του τανυστή της σχετ. παραμόρφωσης (σε δύο διαστάσεις) μπορεί να γραφεί:

---

* J.F. Nye: 'Physical Properties of crystals' OXFORD First Pub. 1957 Ch. VI,VII. (Στην αναφορά αυτή προσβλέπουμε και για τα φαινόμενα: Πιεζοηλεκτρικό, Αντίστροφο πιεζοηλεκτρικό και Φωτοελαστικό).

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} e_{11} & (1/2)(e_{12}+e_{21}) \\ (1/2)(e_{12}+e_{21}) & e_{22} \end{pmatrix}$$

Με παρόμοιους συλλογισμούς ο πίνακας των στοιχείων της σχετικής παραμόρφωσης, για παραμόρφωση ενός σώματος σε τρεις διαστάσεις είναι ο εξής:

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} e_{11} & \frac{1}{2}(e_{12}+e_{21}) & \frac{1}{2}(e_{13}+e_{31}) \\ \frac{1}{2}(e_{12}+e_{21}) & e_{22} & \frac{1}{2}(e_{23}+e_{32}) \\ \frac{1}{2}(e_{13}+e_{31}) & \frac{1}{2}(e_{23}+e_{32}) & e_{33} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & \frac{1}{2}\varepsilon_6 & \frac{1}{2}\varepsilon_5 \\ \frac{1}{2}\varepsilon_6 & \varepsilon_2 & \frac{1}{2}\varepsilon_4 \\ \frac{1}{2}\varepsilon_5 & \frac{1}{2}\varepsilon_4 & \varepsilon_3 \end{pmatrix} \quad \text{(Z-119)}$$

όπου τα στοιχεία του τελευταίου πίνακα αφορούν τη γραφή τους σε συντομογραφία λόγω της συμμετρίας του. Τα διαγώνια στοιχεία αφορούν διασταλτικές ή συσταλτικές σχετικές παραμορφώσεις ενώ τα υπόλοιπα διατμητικές.

Γενικά τα στοιχεία των πινάκων των εφαρμοζόμενων τάσεων σ' ένα στερεό καθώς και των σχετικών τους παραμορφώσεων, είναι στοιχεία τανυστών δεύτερης τάξης σε σύστημα συντεταγμένων που μπορεί να λάβει οποιοδήποτε προσανατολισμό στο εσωτερικό τους. Τέτοιου είδους τανυστές ονομάζονται ***τανυστές πεδίου (field tensors)***. Τανυστές όμως που αφορούν φυσικές ιδιότητες των κρυστάλλων (όπως αναφέραμε στο ΠΑΡ/ΜΑ Α), αναφέρονται σε συγκεκριμένο σύστημα συντεταγμένων στο εσωτερικό τους (σ.σ. των αξόνων συμμετρίας $X_i \; i = 1,2,3$), που εξαρτώνται από τα στοιχεία συμμετρίας τους. Τέτοιοι είναι π.χ. οι τανυστές της ηλεκτρικής διαπερατότητας, της μαγνητικής διαπερατότητας, της αγωγιμότητας και πλείστοι άλλοι. Οι τελευταίοι ονομάζονται ***τανυστές ύλης (matter tensors)***.

Νόμος του Hooke

Έστω ότι σ' ένα στερεό εφαρμόζουμε μια ομογενή τάση. Τότε το τελευταίο θα υποστεί μια σχετική παραμόρφωση. Αν η διαδικασία εκτελεστεί μέσα στα όρια ελαστικότητας του υλικού, τότε η απαλοιφή της δρώσας δύναμης θα έχει σαν αποτέλεσμα την επαναφορά στην αρχική του κατάσταση. Σε μία διάσταση, αν σ είναι η εφαρμοζόμενη τάση στα άκρα μιας ομογενούς ράβδου (ισότροπο υλικό), τότε αυτή θα υποστεί μια σχετική παραμόρφωση ε που περιγράφεται από το νόμο του Hooke:

$$\varepsilon = s\sigma \quad \text{(Z-120)}$$

όπου s η ***σταθερή υποχωρητικότητας (compliance)***. Η (σχ. Ζ-120) μπορεί να γραφεί ως εξής:

$$\sigma = c\varepsilon \quad \left(c = 1/s\right) \tag{Z-121}$$

όπου c η ***σταθερή ακαμψίας ή μέτρο του Young (stiffness, Young modulus)***. Στην περίπτωση όμως εφαρμογής σ' ένα κρύσταλλο (ανισότροπο υλικό) της τάσης σ_{ij} – όπου σ_{ij} τα στοιχεία του πίνακα της (σχ. Ζ-116) – εμφανίζεται μια γενικευμένη παραμόρφωση, όπου το κάθε στοιχείο της σχετικής παραμόρφωσης ε_{ij} δίνεται σαν γραμμικός συνδυασμός όλων των στοιχείων σ_{ij} της τάσης. Π.χ. το στοιχείο ε_{11} εκφράζεται ως εξής:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{11} = {} & s_{1111}\sigma_{11} + s_{1112}\sigma_{12} + s_{1113}\sigma_{13} + \\ & s_{1121}\sigma_{21} + s_{1122}\sigma_{22} + s_{1123}\sigma_{23} + \\ & s_{1131}\sigma_{31} + s_{1132}\sigma_{32} + s_{1133}\sigma_{33}\end{aligned}$$

Και στη γενικότερη περίπτωση:

$$\varepsilon_{ij} = s_{ijkl}\sigma_{kl} \quad \text{ή} \quad \sigma_{ij} = c_{ijkl}\varepsilon_{kl} \tag{Z-122}$$

Οι πίνακες $[\mathrm{s}]$ και $[\mathrm{c}]$ είναι συμμετρικοί επειδή όπως αποδεικνύεται $s_{ijkl} = s_{jikl}$ και $s_{ijkl} = s_{jilk}$. Κατόπιν τούτου τα στοιχεία τους (που για τον καθένα είναι 81), μπορούν σε συντομογραφία να γραφούν με τη μορφή: s_{ij} και c_{ij} όπου $i, j = 1, 2, \cdots, 6$. Τότε οι (σχ. Ζ-122) γράφονται:

$$\varepsilon_i = s_{ij}\sigma_j \quad \text{και} \quad \sigma_i = c_{ij}\varepsilon_j \quad (i, j = 1, 2, \cdots, 6) \tag{Z-123}$$

Δηλ. τα στοιχεία των $[\mathrm{s}]$ και $[\mathrm{c}]$ από 81 γίνονται 36. Ο αριθμός των στοιχείων τους που είναι διάφορα του μηδενός καθώς και οι σχέσεις μεταξύ τους εξαρτώνται από το εκάστοτε κρυσταλλικό σύστημα στο οποίο αντιπροσωπεύονται. Η τάξη μεγέθους των s είναι: $\sim 10^{-11}\ \mathrm{m}^2/\mathrm{Nt}$ και των c $\sim 10^{11}\ \mathrm{Nt}/\mathrm{m}^2$.

Πιεζοηλεκτρικό φαινόμενο

Αν σε ένα κρύσταλλο εφαρμόσουμε μηχανική τάση, τότε στο εσωτερικό του θ' αναπτυχθεί ηλεκτρική πόλωση που το μέγεθός της θα είναι ανάλογο της τά-

σης. Το γεγονός αυτό ονομάζεται ***ευθύ πιεζοηλεκτρικό φαινόμενο (direct piezoelectric effect)***. Σε μία διάσταση ο νόμος γράφεται:

$$P = d\sigma \tag{Z-124}$$

όπου P η πόλωση του διηλεκτρικού $\left(\mathrm{C/m^2}\right)$, σ η μηχανική τάση $\left(\mathrm{Nt/m^2}\right)$ και d το λεγόμενο ***πιεζοηλεκτρικό μέτρο (piezoelectric modulus)*** με διαστάσεις $\left(\mathrm{C/Nt}\right)$. Στη γενικότερη όμως περίπτωση της εφαρμογής σ' ένα κρύσταλλο της τάσης σ_{ij} – όπου σ_{ij} τα στοιχεία του πίνακα της (σχ. Z-116) – εμφανίζεται μια πόλωση **P** της οποίας το κάθε στοιχείο (κάθε συνιστώσα, δεδομένου ότι η πόλωση του διηλεκτρικού είναι διάνυσμα) P_i $i = 1,2,3$ δίνεται σαν γραμμικός συνδυασμός όλων των στοιχείων σ_{ij} της τάσης. Π.χ. η συνιστώσα P_1 της ηλεκτρικής πόλωσης εκφράζεται ως εξής:

$$\begin{aligned} P_1 = {} & d_{111}\sigma_{11} + d_{112}\sigma_{12} + d_{113}\sigma_{13} + \\ & d_{121}\sigma_{21} + d_{122}\sigma_{22} + d_{123}\sigma_{23} + d_{131}\sigma_{31} + d_{132}\sigma_{32} + d_{133}\sigma_{33} \end{aligned}$$

Με τον ίδιο τρόπο $P_2 = d_{2jk}\sigma_{jk}$ και $P_3 = d_{3jk}\sigma_{jk}$. Οπότε στη γενικότερη περίπτωση:

$$P_i = d_{ijk}\sigma_{jk} \qquad i,j,k = 1,2,3 \tag{Z-125}$$

Επομένως οι συντελεστές d είναι 27 τον αριθμό και αποδεικνύεται ότι ο d_{ijk} είναι τανυστής τρίτης τάξης. Επίσης από φυσική άποψη αποδεικνύεται ότι για τους συντελεστές d_{ijk} υφίσταται η σχέση συμμετρίας $d_{ijk} = d_{ikj}$.

Τότε τα στοιχεία του d_{ijk} σε μορφή πίνακα, γράφονται μέσω της εξής διαδικασίας:

$$\begin{array}{ccc} d_{111} & d_{112} & d_{113} \\ (d_{121}) & d_{122} & d_{123} \\ (d_{131}) & (d_{132}) & d_{133} \\ & \downarrow & \\ d_{11} & (1/2)d_{16} & (1/2)d_{15} \\ & d_{12} & (1/2)d_{14} \\ & & d_{13} \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} d_{211} & d_{212} & d_{213} \\ (d_{221}) & d_{222} & d_{223} \\ (d_{231}) & (d_{232}) & d_{233} \\ & \downarrow & \\ d_{21} & (1/2)d_{26} & (1/2)d_{25} \\ & d_{22} & (1/2)d_{24} \\ & & d_{23} \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} d_{311} & d_{312} & d_{313} \\ (d_{321}) & d_{322} & d_{323} \\ (d_{331}) & (d_{332}) & d_{333} \\ & \downarrow & \\ d_{31} & (1/2)d_{36} & (1/2)d_{35} \\ & d_{32} & (1/2)d_{34} \\ & & d_{33} \end{array} \tag{Z-126}$$

όπου π.χ. $d_{21} = d_{211}$, $d_{14} = d_{123}$ … με βάση τη γνωστή σχέση μετασχηματισμού:

$$(11)\to 1,(22)\to 2,(33)\to 3,(23)=(32)\to 4,(13)=(31)\to 5,(12)=(21)\to 6$$

Έστω τώρα ότι υιοθετούμε τη συντομογραφία της (σχ. Z-116) για τα στοιχεία του πίνακα των τάσεων όπως και τις συντομογραφίες των (σχ. Z-126) για τα στοιχεία των πιεζοηλεκτρικών συντελεστών. Τότε η συνιστώσα P_1 της πόλωσης μπορεί να γραφεί:

$$P_1 = d_{1jk}\sigma_{jk} = d_{11k}\sigma_{1k} + d_{12k}\sigma_{2k} + d_{13k}\sigma_{3k} =$$

$$\begin{aligned}
&= d_{111}\sigma_{11} + d_{112}\sigma_{12} + d_{113}\sigma_{13} + d_{121}\sigma_{21} + d_{122}\sigma_{22} + d_{123}\sigma_{23} + \\
&+ d_{131}\sigma_{31} + d_{132}\sigma_{32} + d_{133}\sigma_{33} \\
&= d_{11}\sigma_1 + \frac{1}{2}d_{16}\sigma_6 + \frac{1}{2}d_{15}\sigma_5 + \frac{1}{2}d_{16}\sigma_6 + d_{12}\sigma_2 + \frac{1}{2}d_{14}\sigma_4 + \\
&+ \frac{1}{2}d_{15}\sigma_5 + \frac{1}{2}d_{14}\sigma_4 + d_{13}\sigma_3
\end{aligned}$$

$$P_i = d_{ij}\sigma_j \quad i = 1,2,3 \quad j = 1,2,3, \ ,6 \qquad \text{(Z-127)}$$

Δηλ. τα στοιχεία του d_{ijk} λόγω συμμετρίας από 27 γίνονται 18. Ο αριθμός των στοιχείων τους που είναι διάφορος του μηδενός καθώς και οι σχέσεις μεταξύ τους εξαρτώνται από το εκάστοτε κρυσταλλικό σύστημα στο οποίο αντιπροσωπεύονται. Η τάξη μεγέθους των d είναι $\sim 3\times 10^{-12}\,\mathrm{C/Nt}$ και η (σχ. 127) σε μορφή πινάκων γράφεται ως εξής:

$$\begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} & d_{14} & d_{15} & d_{16} \\ d_{21} & d_{22} & d_{23} & d_{24} & d_{25} & d_{26} \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} & d_{34} & d_{35} & d_{36} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{pmatrix} \qquad \text{(Z-128)}$$

Αντίστροφο πιεζοηλεκτρικό φαινόμενο

Όταν σ' έναν πιεζοηλεκτρικό κρύσταλλο εφαρμόσουμε ένα ηλεκτρικό πεδίο, τότε στοιχειωδώς μεταβάλλονται οι διαστάσεις του. Το γεγονός ονομάζεται ***αντίστροφο πιεζοηλεκτρικό φαινόμενο (converse piezoelectric effect)*** και ερμηνεύεται με τη βοήθεια της θερμοδυναμικής. Πράγματι για σταθερό εφαρμοζόμενο ηλεκτρικό πεδίο αποδεικνύεται ότι :

$$\frac{\partial D}{\partial \sigma} = \frac{\partial P}{\partial \sigma} = \frac{\partial \varepsilon}{\partial E} = d \qquad \text{(Z-129)}$$

όπου D η ηλεκτρική μετατόπιση, P η πόλωση του διηλεκτρικού, σ η τάση , ε η σχετική παραμόρφωση και E το ηλεκτρικό πεδίο. Από τη (σχ. Z-129) βρίσκουμε κατ' αρχή ότι: $P = d\sigma$, που εκφράζει τη γνωστή σχέση που περιγράφει το ευθύ πιεζοηλεκτρικό φαινόμενο. Επίσης:

$$\varepsilon = dE \qquad \text{(Z-130)}$$

που αποτελεί την έκφραση του αντιστρόφου πιεζοηλεκτρικού φαινομένου. Δηλ. η εφαρμογή του ηλεκτρικού πεδίου, έχει σαν συνέπεια την παραμόρφωση του σώματος. Η σταθερή d που συνδέει τα δύο φαινόμενα, ευθύ και αντίστροφο πιεζοηλεκτρικό, είναι το γνωστό πιεζοηλεκτρικό μέτρο σε μονάδες $(\mathrm{C/Nt})$. Πράγματι με βάση τη σχέση $F = qE$, $(\mathrm{C/Nt}) = (\mathrm{m}/V)$ και η ε είναι αδιάστατο μέγεθος.

Στην περίπτωση όμως της εφαρμογής σ' ένα κρύσταλλο του πεδίου $\mathbf{E} = E_1\mathbf{i} + E_2\mathbf{j} + E_3\mathbf{k}$, εμφανίζεται μια παραμόρφωση της οποίας τα στοιχεία ε_{jk} της σχετικής παραμόρφωσης εκφράζονται σαν γραμμικός συνδυασμός των συνιστωσών του ηλεκτρικού πεδίου. Π.χ. το στοιχείο ε_{11} εκφράζεται ως εξής: $\varepsilon_{11} = d_{111}E_1 + d_{211}E_2 + d_{311}E_3$. Οπότε στη γενικότερη περίπτωση:

$$\varepsilon_{jk} = d_{ijk}E_i \qquad i, j, k = 1, 2, 3 \qquad \text{(Z-131)}$$

Για την έκφραση σε συντομία της (σχ. Z-131) χρησιμοποιούμε τη (σχ. Z-119) οπότε π.χ. η $\varepsilon_{11} = d_{111}E_1 + d_{211}E_2 + d_{311}E_3$ γίνεται $\varepsilon_1 = d_{11}E_1 + d_{21}E_2 + d_{31}E_3$ και η $\varepsilon_{23} = d_{123}E_1 + d_{223}E_2 + d_{323}E_3$ γίνεται με βάση τις (σχ. Z-126):

$$\frac{1}{2}\varepsilon_4 = \frac{1}{2}d_{14}E_1 + \frac{1}{2}d_{24}E_2 + \frac{1}{2}d_{34}E_3 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \varepsilon_4 = d_{14}E_1 + d_{24}E_2 + d_{34}E_3 \text{ κ.ο.κ.}$$

Επομένως η (σχ. Z-131) παίρνει τη μορφή:

$$\varepsilon_j = d_{ij}E_i \qquad i = 1, 2, 3 \quad j = 1, 2, 3 \cdots, 6 \qquad \text{(Z-132)}$$

Η (σχ. Z-132) σε μορφή πινάκων γράφεται ως εξής:

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} & d_{14} & d_{15} & d_{16} \\ d_{21} & d_{22} & d_{23} & d_{24} & d_{25} & d_{26} \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} & d_{34} & d_{35} & d_{36} \end{pmatrix}^{\mathrm{T}} \begin{pmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_{11} & d_{21} & d_{31} \\ d_{12} & d_{22} & d_{32} \\ d_{13} & d_{23} & d_{33} \\ d_{14} & d_{24} & d_{34} \\ d_{15} & d_{25} & d_{35} \\ d_{16} & d_{26} & d_{36} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{pmatrix} \qquad \text{(Z-133)}$$

Φωτοελαστικό φαινόμενο

Έστω ότι κατά μήκος ενός κύριου άξονα συμμετρίας κρυστάλλου, εφαρμόζουμε: Αφ' ενός μεν ένα σταθερό ηλεκτρικό πεδίο E_0 και αφ' ετέρου μια σταθερή μηχανική τάση σ. Τότε η ηλεκτρική διαπερατότητα του κρυστάλλου όπως και η διηλεκτρική σταθερή και κατά προέκταση η αδιαπερατότητα και ο δ.δ. είναι συναρτήσεις όχι μόνο του εφαρμοζόμενου ηλεκτ. πεδίου αλλά και της μηχανικής τάσης. Η μεταβολή στο δ.δ. που προκαλείται από την εφαρμογή της μηχανικής τάσης, ονομάζεται ***φωτοελαστικό φαινόμενο (photoelastic effect)***. Θεωρούμε την περίπτωση, που το φως διαδίδεται στον κρύσταλλο με το διάνυσμα της έντασης του ηλεκτρικού του πεδίου να είναι παράλληλο με τον προαναφερόμενο κύριο άξονα συμμετρίας του. Τότε ο δ.δ. δίνεται από τη σχέση:

$$n = n^0 + aE_0 + a'\sigma + bE_0^2 + b'\sigma^2 + b''E_0\sigma + \cdots \qquad \text{(Z-134)}$$

όπου a, a', b, b', b'' σταθερές και n^0 ο δ.δ. για $E_0 = 0$ και $\sigma = 0$. Ο όρος aE_0 αφορά το γραμμικό Η/Ο φαινόμενο και ο bE_0^2 το τετραγωνικό Η/Ο. Με παρόμοιο τρόπο ο όρος $a'\sigma$ αναδεικνύει το φωτοελαστικό φαινόμενο ενώ ο $b'\sigma^2$, το αντίστοιχο τετραγωνικό φωτοελαστικό. Όροι όπως ο $b''E_0\sigma$ ή και ανώτερης τάξης ως προς E_0, σ αφορούν άλλου είδους φαινόμενα.

Στα προηγούμενα είχαμε αποδείξει ότι για κεντροσυμμετρικούς κρυστάλλους $a = 0$ οπότε δεν υφίσταται γραμμικό Η/Ο φαινόμενο. Δεν συμβαίνει όμως το ίδιο και για τη σταθερή a' στη (σχ. Z-134), η οποία είναι διάφορη του μηδενός. Πράγματι κατά την αλλαγή της φοράς του εφαρμοζόμενου στον κρύσταλλο ηλ. πεδίου, δεν υφίσταται καμιά μεταβολή. Όμως η αλλαγή της φοράς της εφαρμοζόμενης μηχανικής τάσης, μεταβάλλει την κατάσταση του κρυστάλλου από συμπίεση σε τάνυση με αποτέλεσμα $a' \neq 0$. Αυτός ακριβώς είναι ο λόγος για τον οποίο τα ισότροπα υλικά εμφανίζουν γραμμικό φωτοελαστικό φαινόμενο (Φ/Ε) ($a'\sigma \neq 0$) όχι όμως γραμμικό Η/Ο ($aE_0 = 0$).

Η μελέτη των μεταβολών των δ.δ. στους κρυστάλλους λόγω επαγομένων φαινόμενων όπως είναι το Η/Ο και το Φ/Ε γίνεται κατά τα γνωστά με τη βοήθεια του ελλ. των δ.δ. Οι συντελεστές της εξίσωσης που το περιγράφουν, είναι για τις οπτικές συχνότητες, τα στοιχεία B_{ij} του πίνακα των αδιαπερατοτήτων. Έχουμε ήδη διαπιστώσει (τουλάχιστον για το Η/Ο φαινόμενο) ότι οι δράσεις του ηλεκτρικού πεδίου (και όπως θα δούμε στα επόμενα) και της μηχανικής τάσης, προκαλούν μεταβολές στο σχήμα το μέγεθος και τον προσανατολισμό του ελλειψοειδούς. Έστω λοιπόν ότι $B_{ij}(0,0)$ είναι τα στοιχεία του πίνακα των αδιαπερατοτήτων για $E_0 = 0$ και $\sigma = 0$. Αν η επιδρώσα μεταβολή αφορά ηλεκτρικά πεδία και μηχανικές τάσεις πρώτης τάξης (δηλ. η τάξη μεγέθους τους επάγει μόνο γραμμικά φαινόμενα, οπότε από τη (σχ. Ζ-134) $n = n^0 + aE_0 + a'\sigma$), τότε τα στοιχεία $B_{ij}(E,\sigma)$ του πίνακα των αδιαπερατοτήτων μετά την εφαρμογή των E_k και σ_{kl} θα είναι:

$$B_{ij}(E,\sigma) = B_{ij}(0,0) + r_{ijk}E_k + \pi_{ijkl}\sigma_{kl}$$

ή (Ζ-135)

$$\Delta B_{ij} = B_{ij}(E,\sigma) - B_{ij}(0,0) = r_{ijk}E_k + \pi_{ijkl}\sigma_{kl}$$

όπου r_{ijk} κατά τα γνωστά, είναι οι γραμμικοί Η/Ο συντελεστές και π_{ijkl} οι ***πιεζο-οπτικοί συντελεστές (piezo-optical coefficients)***. Η τάξη μεγέθους όπως ήδη γνωρίζουμε των r είναι $\sim 10^{-12}$ m/V και των π $\sim 10^{-12}$ m^2/Nt.

Το φωτοελαστικό φαινόμενο συνήθως εκφράζεται συναρτήσει των στοιχείων της σχετικής παραμόρφωσης ε_{rs} παρά αυτών της τάσης σ_{kl}. Αυτό επιτυγχάνεται με τη βοήθεια του νόμου του Hooke (σχ. Ζ-122) όπου: $\sigma_{ij} = c_{ijkl}\varepsilon_{kl}$. Τότε η αντικατάσταση τη τελευταίας στη (σχ. Ζ-135) μας δίνει:

$$\Delta B_{ij} = r_{ijk}E_k + p_{ijrs}\varepsilon_{rs} \qquad \text{(Ζ-136)}$$

όπου $p_{ijrs} = \pi_{ijkl}c_{klrs}$ και p_{ijrs} είναι τα στοιχεία (81 τον αριθμό) ***των ελαστοοπτικών συντελεστών (elasto-optic coefficients)*** οι οποίοι είναι αδιάστατοι. Επειδή $\pi \sim 10^{-12}$ και $c \sim 10^{11}$ η τάξη μεγέθους των p θα είναι: $p \sim 10^{-12} \times 10^{11} = 10^{-1}$. Για την περίπτωση των κεντροσυμμετρικών κρυστάλλων και των ισοτρόπων υλικών ή για την περίπτωση εφαρμογής στον κρύσταλλο μόνο μηχανικής τάσης $r_{ijk} = 0$, οπότε η (σχ. Ζ-136) γίνεται:

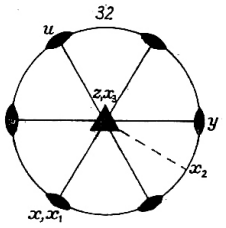
$$B_{ij}(\sigma) = B_{ij}(0) + p_{ijrs}\varepsilon_{rs} \qquad \text{(Ζ-137)}$$

όπου βέβαια $B_{ij}(0)$ τα στοιχεία του πίνακα των αδιαπερατοτήτων πριν την εφαρμογή της μηχανικής τάσης και $B_{ij}(\sigma)$ αυτά μετά την εφαρμογή. Τα στοιχεία p_{ijrs} λόγω συμμετρίας από 81 γίνονται 36 και με την εφαρμογή των γνωστών συντομεύσεων συγκροτούν ένα πίνακα(6×6). Ο αριθμός των στοιχείων του που είναι διάφορα του μηδενός καθώς και οι σχέσεις μεταξύ τους εξαρτώνται από το εκάστοτε κρυσταλλικό σύστημα από το οποίο αντιπροσωπεύονται. Η μορφολογία των πινάκων $[\pi]$ που περιγράφουν το φωτοελαστικό φαινόμενο για κάθε κρυσταλλική τάξη, είναι πανομοιότυπη με αυτήν των πινάκων $[s]$ του τετραγωνικού Η/Ο φαινομένου, συμπεριλαμβανομένων και των ισοτρόπων υλικών. Στα επόμενα σχήματα δίνονται οι πίνακες των ελαστοοπτικών συντελεστών καθώς και τα αριθμητικά τους στοιχεία για ορισμένα υλικά.

SiO_2 ***(α-quartz)*** ***Τριγωνικό σύστημα***

3m, 32, $\bar{3}$m

$$\begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} & p_{14} & 0 & 0 \\ p_{12} & p_{11} & p_{13} & -p_{14} & 0 & 0 \\ p_{13} & p_{13} & p_{33} & 0 & 0 & 0 \\ p_{41} & -p_{41} & 0 & p_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & p_{44} & p_{41} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & p_{14} & \frac{1}{2}(p_{11}-p_{12}) \end{pmatrix}$$



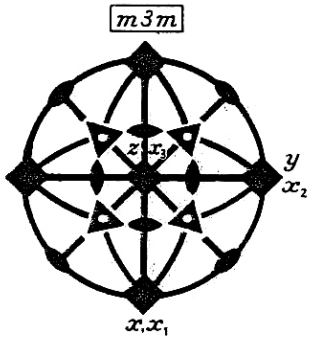
p_{11}= 0.16 p_{12}= 0.27
p_{13}= 0.27 p_{14}= -0.03
p_{31}= 0.29 p_{33}= 0.1
p_{41}= -0.047 p_{44}= -0.079
λ = 0.589 μm

(Σχ. Z-25)

Ge ***Κυβικό σύστημα***

43m, 432, m3m

$$\begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{12} & 0 & 0 & 0 \\ p_{12} & p_{11} & p_{12} & 0 & 0 & 0 \\ p_{12} & p_{12} & p_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & p_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_{44} \end{pmatrix}$$



p_{11}= -0.063
p_{12}= -0.0535
p_{44}= -0.074
p_{11}- p_{12}= 0.0095
λ = 2.0 μm

(Σχ. Z-26)

Το ελλ. των δ.δ. με την επίδραση μηχανικής τάσης, θα δίνεται κατά τα γνωστά (μέσω της (σχ. Z-137)) από την:

$$B_{ij}(\sigma)x_i x_j = \left[B_{ij}(0) + p_{ijrs}\varepsilon_{rs}\right]x_i x_j = 1 \qquad \text{(Z-138-1)}$$

Συντελεστές p_{ij} για ισότροπα υλικά

$$\begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{12} & 0 & 0 & 0 \\ p_{12} & p_{11} & p_{12} & 0 & 0 & 0 \\ p_{12} & p_{12} & p_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(p_{11}-p_{12}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(p_{11}-p_{12}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(p_{11}-p_{12}) \end{pmatrix}$$

(H_2O)

$p_{11} = \pm\, 0.31$
$p_{12} = \pm\, 0.31$
$\lambda = 0.6328\ \mu m$

(Σχ. Z-27)

Σε αναλυτική μορφή η σχέση είναι πανομοιότυπη με αυτήν της (σχ. Z-105) αρκεί τα στοιχεία s_{ij} με $i, j = 1,2,3,\cdots,6$ του πίνακα του τετραγωνικού Η/Ο φαινομένου ν' αντικατασταθούν με αυτά των p_{ij} $i, j = 1,2,3,\cdots,6$ του πίνακα του φωτοελαστικού φαινομένου. Επίσης τα γινόμενα $E_r E_s$ των συνιστωσών του ηλ. πεδίου με τα στοιχεία ε_{rs} της σχετικής παραμόρφωσης. Με δεδομένη τέλος την υιοθετούμενη από τη (σχ. Z-119) συντομογραφία για τα στοιχεία της σχετικής παραμόρφωσης θα έχουμε τελικά:

$$\begin{aligned} &\left(1/n_1^2 + p_{11}\varepsilon_1 + p_{12}\varepsilon_2 + p_{13}\varepsilon_3 + p_{14}\varepsilon_4 + p_{15}\varepsilon_5 + p_{16}\varepsilon_6\right)x_1^2 + \\ &\left(1/n_2^2 + p_{21}\varepsilon_1 + p_{22}\varepsilon_2 + p_{23}\varepsilon_3 + p_{24}\varepsilon_4 + p_{25}\varepsilon_5 + p_{26}\varepsilon_6\right)x_2^2 + \\ &\left(1/n_3^2 + p_{31}\varepsilon_1 + p_{32}\varepsilon_2 + p_{33}\varepsilon_3 + p_{34}\varepsilon_4 + p_{35}\varepsilon_5 + p_{36}\varepsilon_6\right)x_3^2 + \\ &2\left(p_{41}\varepsilon_1 + p_{42}\varepsilon_2 + p_{43}\varepsilon_3 + p_{44}\varepsilon_4 + p_{45}\varepsilon_5 + p_{46}\varepsilon_6\right)x_2x_3 + \\ &2\left(p_{51}\varepsilon_1 + p_{52}\varepsilon_2 + p_{53}\varepsilon_3 + p_{54}\varepsilon_4 + p_{55}\varepsilon_5 + p_{56}\varepsilon_6\right)x_1x_3 + \\ &2\left(p_{61}\varepsilon_1 + p_{62}\varepsilon_2 + p_{63}\varepsilon_3 + p_{64}\varepsilon_4 + p_{65}\varepsilon_5 + p_{66}\varepsilon_6\right)x_1x_2 = 1 \end{aligned} \qquad \text{(Z-138-2)}$$

Φωτοελαστικό φαινόμενο στους κρυστάλλους του κυβικού συστήματος. Κρύσταλλος Ge

Υποθέτουμε ότι ασκούμε μια ομογενή εκτατική τάση μεταξύ δύο παραλλήλων απέναντι εδρών του κρυστάλλου του Ge κατά τη διεύθυνση του κυρίου άξονα x_1. Πριν την εφαρμογή της τάσης το ελλ. των δ.δ. – επειδή ο κρύσταλλος ανήκει στο κυβικό σύστημα – ήταν μια σφαίρα και περιγραφόταν από την εξίσωση:

$$\frac{1}{n^2}\left(x_1^2 + x_2^2 + x_2^2\right) = 1 \qquad \text{(Z-138-3)}$$

Μετά όμως την εφαρμογή της τάσης, στο εσωτερικό του εμφανίζεται μια ομογενής παραμόρφωση, οπότε ο πίνακας της σχετικής παραμόρφωσης παίρνει τη μορφή:

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^T$$

με ένα μόνο στοιχείο διάφορο του μηδενός. Τότε το ελλ. των δ.δ. δίνεται πλέον από τη (σχ. Ζ-138-2). Με δεδομένο τον πίνακα των φωτοελαστικών συντελεστών του Ge όπως φαίνονται στο (Σχ. Ζ-26), η (σχ. Ζ-138-2) γίνεται:

$$\left(\frac{1}{n^2}+p_{11}\varepsilon_1\right)x_1^2+\left(\frac{1}{n^2}+p_{12}\varepsilon_1\right)x_2^2+\left(\frac{1}{n^2}+p_{12}\varepsilon_1\right)x_3^2=1 \qquad \text{(Ζ-138-4)}$$

Από τη (σχ. Ζ-138-4) βλέπουμε ότι δεν υφίστανται μικτοί όροι των γινομένων ανά δύο των x_1, x_2, x_3. Οπότε συμπεραίνουμε ότι το ελλ. των δ.δ. άλλαξε διαστάσεις και μορφή όχι όμως προσανατολισμό. Επομένως: $x_1' \equiv x_1, x_2' \equiv x_2, x_3' \equiv x_3$. Τότε από τη (σχ. Ζ-138-4) βρίσκουμε:

$$\frac{1}{n_1'^2}=\frac{1}{n^2}+p_{11}\varepsilon_1 \ , \ \frac{1}{n_2'^2}=\frac{1}{n^2}+p_{12}\varepsilon_1 \ , \ \frac{1}{n_3'^2}=\frac{1}{n^2}+p_{12}\varepsilon_1 \qquad \text{(Ζ-138-5)}$$

όπου n_1', n_2', n_3' οι κύριοι δ.δ. του νέου ελλειψοειδούς των δ.δ. Κατά τα γνωστά, επειδή $n_1', n_2', n_3' \simeq n$ από τις (σχ. Ζ-138-5) βρίσκουμε:

$$n_1'=n-\frac{1}{2}n^3p_{11}\varepsilon_1 \ , \ n_2'=n-\frac{1}{2}n^3p_{12}\varepsilon_1 \ , \ n_3'=n-\frac{1}{2}n^3p_{12}\varepsilon_1 \qquad \text{(Ζ-138-6)}$$

Δηλ. ο κρύσταλλος του Ge υποκείμενος σε ομογενή εκτατική τάση κατά τον κύριο άξονα x_1 καθίσταται μονοάξονας θετικός ($n_1' > n_2' = n_3'$). Κατά μήκος του x_1 είναι και ο οπτικός του άξονας.

Η διπλοθλαστικότητά του για διεύθυνση της κυματοκαθέτου **k** κατά τον άξονα $x_3' \equiv x_3$ θα είναι:

$$n_2'-n_1'=\frac{1}{2}n^3\left(p_{12}-p_{11}\right)\varepsilon_1 \qquad \text{(Ζ-138-7)}$$

Επειδή τέλος ο κρύσταλλος του Ge συμπεριφέρεται σαν ισότροπος, τα αποτελέσματα στα οποία καταλήξαμε θα είναι ακριβώς τα ίδια εάν η μηχανική τάση εφαρμοστεί κατά μήκος των αξόνων x_2 ή x_3.

Η μελέτη του φωτοελαστικού φαινόμενου παρουσιάζει ιδιαίτερο ενδιαφέρον όσον αφορά τις εφαρμογές του. Μια από αυτές είναι το λεγόμενο ***ακουστοοπτικό φαινόμενο (acousto-optic effect)***. Έστω διαφανές ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο δοχείο με νερό, υφίσταται κατά μήκος δύο απέναντι εδρών του, την επίδραση που προκαλεί δονητής που πάλλετε στην περιοχή των ακουστικών συχνοτήτων. Τότε κατά μήκος αυτής της διεύθυνσης στο νερό, διαδίδονται διαμήκη υδάτινα κύματα (με τη μορφή πυκνωμάτων και αραιωμάτων). Επομένως περιοδικά στον όγκο του νερού ασκούνται τάσεις και κατά προέκταση περιοδικές σχετικές παραμορφώσεις λόγω του ελαστικού φαινομένου. Σαν τελικό αποτέλεσμα θα έχουμε την περιοδική μεταβολή του δ.δ. του νερού. Δημιουργείται δηλ. στο νερό – κατά μήκος της διάδοσης του ακουστικού κύματος – ένα φράγμα περίθλασης όγκου ορισμένης περιόδου, το οποίο όπως αποδεικνύεται διαδίδεται με μια ορισμένη ταχύτητα φάσης. Τότε φως το οποίο θα προσπέσει π.χ. κάθετα στη διεύθυνση διάδοσης του ακουστικού κύματος περιθλάται (περίθλαση Bragg). Πλείστα όσα οπτικά συστήματα και διατάξεις στηρίζονται στις αρχές αυτές όπως: Οι ***ακουστοοπτικοί διαμορφωτές (acousto-optic modulators)***, τα ***ακουστοοπτικά φίλτρα (acousto-optic tunable filters)***, οι ***ακουστοοπτικοί εκτροπείς (acousto-optic deflectors)***, οι ***ακουστοοπτικοί αναλυτές φάσματος (acousto-optic spectrum analyzers)*** και πολλά άλλα.

Πρωτεύον και δευτερεύον γραμμικό και τετραγωνικό Η/Ο φαινόμενο. Φυσικές ιδιότητες των Η/Ο συντελεστών

Στη γενικότερη περίπτωση που ένας κρύσταλλος εμφανίζει γραμμικό καθώς και τετραγωνικό Η/Ο φαινόμενο, τα στοιχεία του πίνακα του τανυστή των αδιαπερατοτήτων $B_{ij}\left(E,E^2\right)$ (βλ. και (σχ. Ζ-110)) θα είναι:

$$B_{ij}\left(E,E^2\right)=B_{ij}\left(0\right)+r_{ijk}E_k+s_{ijkl}E_kE_l \qquad \text{(Z-139)}$$

όπου r_{ijk} οι γραμμικοί και s_{ijkl} οι τετραγωνικοί Η/Ο συντελεστές. Μέχρις εδώ έχουμε δει ότι τα δρώντα ηλεκτρικά πεδία σ' ένα κρύσταλλο ήταν: α) Το πεδίο $\mathbf{E}\left(\omega\right)$ της Η/Μ διαταραχής (με τη μορφή επιπέδου μετώπου κύματος) της διαδιδόμενης σ' αυτόν, όπου ω η συχνότητά της με $\omega\sim10^{15}$ Hz (οπτικές στην πλειοψηφία τους συχνότητες). β) Το εξωτερικά εφαρμοζόμενο στατικό ηλεκτρικό πεδίο $\mathbf{E}$ με

$\mathbf{E} = E_1\mathbf{i} + E_2\mathbf{j} + E_3\mathbf{k}$, όπου $E_i \;\; i = 1,2,3$ οι συνιστώσες του. Όπως όμως ήδη έχουμε αναφέρει το πεδίο αυτό μπορεί να είναι αρμονικό (ή οποιασδήποτε άλλης μορφής). Στην περίπτωση του αρμονικού: $\mathbf{E}_k(\omega_m) = \mathbf{E}_k \cos\omega_m t$ όπου η ω_m ονομάζεται ***συχνότητα διαμόρφωσης (frequency modulation)*** και για $\omega_m = 0$ προκύπτει το προαναφερόμενο στατικό πεδίο. Το συνολικά λοιπόν εφαρμοζόμενο πεδίο στον κρύσταλλο θα είναι η επαλληλία του οπτικού και του διαμορφώνοντος πεδίου. Δηλ.

$$E_k = E_k^{\omega_m} \cos\omega_m t + E_k^{\omega} \cos\omega t \qquad \text{(Z-140)}$$

όπου λάβαμε υπόψη μας μόνο τη χρονική εξάρτηση του οπτικού πεδίου. Η αντικατάσταση του συνολικού πεδίου από τη (σχ. Z-140) στη (σχ. Z-139) θα μας δώσει:

$$\begin{aligned} B_{ij}\left(E,E^2\right) = B_{ij}(0) + r_{ijk}\left(E_k^{\omega_m}\cos\omega_m t + E_k^{\omega}\cos\omega t\right) + \\ s_{ijkl}\left(E_k^{\omega_m}\cos\omega_m t + E_k^{\omega}\cos\omega t\right)\left(E_l^{\omega_m}\cos\omega_m t + E_l^{\omega}\cos\omega t\right) \end{aligned} \qquad \text{(Z-141)}$$

Η τελευταία μετά την εκτέλεση των πράξεων, με τη βοήθεια τριγωνομετρικών σχέσεων, γίνεται:

$$\begin{aligned} B_{ij}\left(E,E^2\right) &= B_{ij}(0) + r_{ijk}\left(E_k^{\omega_m}\cos\omega_m t + E_k^{\omega}\cos\omega t\right) + \\ &+ (1/2)s_{ijkl}\left[E_k^{\omega_m}E_l^{\omega_m} + E_k^{\omega}E_l^{\omega}\right] + \\ &+ (1/2)s_{ijkl}\left[E_k^{\omega_m}E_l^{\omega_m}\cos 2\omega_m t + E_k^{\omega}E_l^{\omega}\cos 2\omega t\right] + \\ &+ (1/2)\, s_{ijkl}\left(E_k^{\omega_m}E_l^{\omega} + E_l^{\omega_m}E_k^{\omega}\right)\left[\cos(\omega_m+\omega)t + \cos(\omega_m-\omega)t\right] \end{aligned} \qquad \text{(Z-142)}$$

Κάθε προσθετέος της (σχ. Z-142) είναι συνάρτηση μιας από τις συχνότητες: $\omega_m, \omega, 2\omega_m, 2\omega, \omega_m+\omega, \omega_m-\omega$. Το γεγονός σημαίνει ότι μπορούμε να περιγράψουμε την κατάσταση αυτή από ένα ορισμένο αριθμό ελλ. των δ.δ. έκαστο των οποίων έχει τη μορφολογία του και πάλλετε με μια από τις προαναφερόμενες συχνότητες.

Στην ανάλυση όμως που γίνεται εδώ, τα οπτικά πεδία E^{ω} έχουν πλάτος πολύ μικρότερο από τα διαμορφώνοντα πεδία E^{ω_m} δηλ. $E^{\omega_m} \gg E^{\omega}$. Πράγματι τυπικά $E^{\omega} \simeq 10^2\,\mathrm{V/m}$ ενώ $E^{\omega_m} \simeq 10^6\,\mathrm{V/m}$. Επομένως αν από τη (σχ. Z-142) εξαλείψουμε τους όρους που περιλαμβάνουν τις οπτικές συχνότητες τότε θα έχουμε:

$$B_{ij}\left(E,E^2\right) = B_{ij}(0) + r_{ijk}E_k^{\omega_m}\cos\omega_m t + s_{ijkl}E_k^{\omega_m}E_l^{\omega_m}\cos^2\omega_m t \qquad \text{(Z-143)}$$

Από την τελευταία σχέση προκύπτει ένα ελλ. των δ.δ. (σαν άθροισμα τριών όρων) με συγκεκριμένο μέγεθος, σχήμα και προσανατολισμό που είναι συνάρτηση της συχνότητας ω_m. Αν $\omega_m = 0$ τότε η (σχ. Z-143) καταλήγει στη (σχ. Z-139) η οποία μας δίνει τα στοιχεία $B_{ij}\left(E, E^2\right)$ υπό την επίδραση στατικού πεδίου.

Ακροθιγώς μόνο αναφέρουμε εδώ (από φαινομενολογική άποψη) ότι γενεσιουργός αιτία του γραμμικού και του τετραγωνικού Η/Ο όπως και άλλων φαινόμενων (π.χ. σ' ένα κρύσταλλο), είναι η επαγομένη πόλωση του διηλεκτρικού. Η τελευταία, δεν είναι μόνο ανάλογη των συνιστωσών E_j του δρώντος ηλεκτρικού πεδίου αλλά εξαρτάται και από ανώτερες δυνάμεις τους. Έτσι στη μη γραμμική οπτική μπορούμε να γράψουμε*:

$$P_i = \varepsilon_0 \chi_{ij}^{(1)} E_j + 2\chi_{ijk}^{(2)} E_j E_k + 4\chi_{ijkl}^{(3)} E_j E_k E_l + \cdots \qquad \text{(Z-144)}$$

Όπου $\chi_{ij}^{(1)}$, $\chi_{ijk}^{(2)}$, $\chi_{ijkl}^{(3)}, \ldots$ είναι οι ηλεκτρικές επιδεκτικότητες πρώτης, δεύτερης, τρίτης, κ.λ.π τάξης και ο προσδιορισμός των στοιχείων τους γίνεται μέσω της κβαντομηχανικής στηριζόμενης στη ατομική και μοριακή δομή της ύλης. Αποδεικνύεται π.χ. ότι τα στοιχεία r_{ijk} και s_{ijkl} των πρωτευόντων, γραμμικού και τετραγωνικού ηλεκτροοπτικού φαινόμενου, εκφράζονται ως προς το σύστημα των κυρίων αξόνων από τις σχέσεις:

$$\chi_{ijk}^{(2)} = -\frac{\varepsilon_{ii}\varepsilon_{jj}}{4\varepsilon_0} r_{ijk} \quad , \quad \chi_{ijkl}^{(3)} = -\frac{\varepsilon_{ii}\varepsilon_{jj}}{12\varepsilon_0} s_{ijkl}$$

όπου ε_{ij} τα στοιχεία του πίνακα των ηλεκτρικών διαπερατοτήτων του εκάστοτε υλικού και ε_0 η διαπερατότητα του κενού.

Πρωτεύον και δευτερεύον γραμμικό Η/Ο φαινόμενο

Γνωρίζουμε δεχόμενοι την ατομική (μοριακή) και πλεγματική (κρυσταλλική) δομή της ύλης, ότι ένα ηλεκτρικό πεδίο ασκεί δυνάμεις: Αφενός στα ηλεκτρόνια (ηλεκτρονικά νέφη) των ατόμων και αφετέρου στα ιόντα της πλεγματικής δομής. Τότε δύο από τις βασικές δράσεις του ασκούμενου ηλεκτρικού πεδίου διαμόρφωσης (στην απλούστερη περίπτωση του στατικού) είναι: α) Η μετατόπιση ή γενικά η ανακατανομή των ηλεκτρονικών νεφών ως προς τους πυρήνες, η οποία είναι ένα είδος ***ηλεκτρονικής πόλωσης (electronic polarization)*** και που εξαρτάται (για

* G. New: 'Introduction to NONLINEAR OPTICS' (Ch. 1) Cambridge Un. Press (2011).

την περίπτωση που περιγράφουμε εδώ) από το γινόμενο ανά δύο των συνιστωσών του πεδίου διαμόρφωσης (ο δεύτερος όρος της (σχ. Ζ-144)). Το γεγονός αυτό προκαλεί μια πρώτης τάξης μεταβολή (ως προς τις συνιστώσες του εφαρμοζόμενου πεδίου) των στοιχείων B_{ij} της αδιαπερατότητας και ονομάζεται ***πρωτεύον γραμμικό ηλεκτροοπτικό φαινόμενο (primary linear electro-optic effect)***. Πρόκειται για τους όρους $r_{ijk}E_k$ της (σχ. Ζ-139). β) Η μετατόπιση ή γενικά ανακατανομή των ιόντων του πλέγματος του κρυστάλλου, η οποία τελικά προκαλεί μια παραμόρφωσή του (σαν να εφαρμόζαμε εξωτερικά μηχανική τάση). Η πόλωση που αναπτύσσεται λόγω αυτής της διαδικασίας, είναι ένα είδος ***ιοντικής πόλωσης (ionic polarization)*** και προκαλεί – για την περίπτωση που αναφερόμαστε – μια επιπλέον (εκτός της ηλεκτρονικής) πρώτης τάξης μεταβολή ως προς το εφαρμοζόμενο διαμορφώνον ηλεκτρικό πεδίο των στοιχείων B_{ij} του πίνακα της αδιαπερατότητας. Το φαινόμενο αυτό ονομάζεται ***δευτερεύον γραμμικό ηλεκτροοπτικό φαινόμενο (secondary linear electro-optic effect)***. Επομένως οι όροι r_{ijk} των Η/Ο συντελεστών λόγω της παραμόρφωσης του πλέγματος του κρυστάλλου – που προκαλείται από την πρώτη δύναμη του δρώντος ηλ. πεδίου – θα πρέπει να δεχθούν ένα διορθωτικό όρο.

Είναι δυνατόν με καθαρά θερμοδυναμικές υποθέσεις και με τη βοήθεια των αντίστροφου πιεζοηλεκτρικού και φωτοελαστικού φαινομένων να προσδιορίσουμε τους διορθωτικούς αυτούς όρους. Πράγματι αποδεικνύεται* ότι για $E =$ σταθ. (σε βαθμωτή μορφή) ισχύει:

$$\frac{\partial D}{\partial \sigma} = \frac{\partial P}{\partial \sigma} = \frac{\partial \varepsilon}{\partial E} = d \qquad \left(D = \varepsilon_0 E + P\right) \tag{Z-145}$$

όπου D η ηλεκτρική μετατόπιση, σ η μηχανική τάση, ε η σχετική παραμόρφωση, E το ηλ. πεδίο και d ο πιεζοηλεκτρικός συντελεστής. Από την τελευταία σχέση βρίσκουμε ότι:

$$\varepsilon = dE \tag{Z-146}$$

η οποία είναι η έκφραση του αντίστροφου πιεζοηλεκτρικού φαινομένου (σχ. Ζ-130) που μας λέει ότι η δράση του (πρώτης τάξης) ηλ. πεδίου προκαλεί παραμόρφωση ενός σώματος. Τότε η σχετική παραμόρφωση ε μέσω του φωτοελαστικού φαινόμενου (σχ. Ζ-136), προκαλεί μια πρόσθετη μεταβολή στα στοιχεία B_{ij} του πίνακα της αδιαπερατότητας, η οποία σε μια διάσταση γράφεται:

* J.F. Ney: 'Physical Properties of Crystals' (Ch. X). Clarenton Press-Oxford (1967).

$$B(E) = B(0) + rE + p\varepsilon = B(0) + rE + p(dE) = \\ B(0) + rE + (pd)E = B(0) + (r + pd)E \qquad \text{(Z-147)}$$

όπου p ο ελαστοοπτικός συντελεστής και pd είναι ο διορθωτικός όρος. Η (σχ. Z-147) σε τανυστική μορφή θα γράφεται:

$$B_{ij}(E) = B_{ij}(0) + r_{ijk}E_k + p_{ijrs}\varepsilon_{rs} = B_{ij}(0) + r_{ijk}E_k + p_{ijrs}(d_{krs}E_k) \Rightarrow$$

$$B_{ij}(E) = B_{ij}(0) + (r_{ijk} + p_{ijrs}d_{krs})E_k \qquad \text{(Z-148)}$$

όπου: $\varepsilon_{rs} = d_{krs}E_k$ από τη (σχ. Z-131).

Πρωτεύον και δευτερεύον τετραγωνικό Η/Ο φαινόμενο

Αν το εφαρμοζόμενο στον κρύσταλλο ηλεκτρ. πεδίο διαμόρφωσης είναι αρκετά σημαντικό ή λόγω συμμετρίας, τότε θα γίνει εμφανής και η παρουσία του τετραγωνικού Η/Ο φαινομένου, το οποίο όπως θα δούμε στα επόμενα διαχωρίζεται σε πρωτεύον και δευτερεύον. Πράγματι η εφαρμογή του πεδίου – στην απλούστερη περίπτωση στατικού – έχει σαν αποτέλεσμα να προκαλεί πόλωση, η οποία είναι τρίτης τάξης ως προς τις συνιστώσες του ηλ. πεδίου. Δηλ. εξαρτάται από τα γινόμενα ανά τρεις των συνιστωσών του (τρίτος όρος της (σχ. Z-144)). Η δράση αυτού του είδους προκαλεί: α) Ανακατανομή των ηλεκτρονικών νεφών των ατόμων ως προς τους πυρήνες τους. Δηλ. ένα είδος ηλεκτρονικής πόλωσης που έχει σαν συνέπεια μια δεύτερης τάξης μεταβολή ως προς τις συνιστώσες του εφαρμοζόμενου πεδίου (γινόμενα ανά δύο), των στοιχείων B_{ij} του πίνακα της αδιαπερατότητας. Πρόκειται για το ***πρωτεύον τετραγωνικό ηλεκτροοπτικό φαινόμενο (primary quadratic electro-optic effect)*** και είναι οι όροι $s_{ijkl}E_kE_l$ της (σχ. Z-139). β) Γενικά στοιχειώδη μετατόπιση των ιόντων του πλέγματος του κρυστάλλου, η οποία τελικά προκαλεί μια παραμόρφωσή του. Η πόλωση που αναπτύσσεται λόγω αυτής της διαδικασίας, είναι ένα είδος ιοντικής πόλωσης και προκαλεί – για την περίπτωση που αναφερόμαστε – μια επιπλέον (εκτός της ηλεκτρονικής) ***δεύτερης τάξης*** μεταβολή ως προς το εφαρμοζόμενο διαμορφώνον ηλεκτρικό πεδίο, των στοιχείων B_{ij} του πίνακα της αδιαπερατότητας. Το γεγονός αυτό ονομάζεται ***δευτερεύον τετραγωνικό ηλεκτροοπτικό φαινόμενο (secondary quadratic electro-optic effect)***. Επομένως οι όροι s_{ijkl} των τετραγωνικών Η/Ο συντελεστών λόγω της παραμόρφωσης του πλέγματος του κρυστάλλου – που προκαλείται από την δεύτερη δύναμη του δρώντος ηλ. πεδίου – θα πρέπει να δεχθούν ένα διορθωτικό όρο.

Είναι δυνατόν με καθαρά θερμοδυναμικές υποθέσεις και με τη βοήθεια των αντίστροφου πιεζοηλεκτρικού (δεύτερης τάξης) και φωτοελαστικού φαινομένου να προσδιορίσουμε τους διορθωτικούς αυτούς όρους. Πράγματι αποδεικνύεται για $E = \text{σταθ.}$ στη βαθμωτή του μορφή ότι ισχύει:

$$\frac{\partial d}{\partial E} = \frac{\partial}{\partial E}\left(\frac{\partial D}{\partial \sigma}\right) = \frac{\partial}{\partial E}\left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial E}\right) = \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial E^2} = \gamma \qquad \text{(Z-149)}$$

όπου D η ηλεκτρική μετατόπιση, σ η μηχανική τάση, ε η σχετική παραμόρφωση, E το ηλ. πεδίο, d ο πιεζοηλεκτρικός συντελεστής και γ ο πιεζοηλεκτρικός συντελεστής δεύτερης τάξης. Επομένως η σχετική παραμόρφωση ε του κρυστάλλου που οφείλεται στο ηλεκτρικό πεδίο δεύτερης τάξης (γινόμενο των συνιστωσών του ηλ. πεδίου ανά δύο) μπορεί να γραφεί ως εξής:

$$\varepsilon = \gamma E^2 \qquad \text{(Z-150)}$$

Το φαινόμενο αυτό ονομάζεται ***ηλεκτροσυστολή (electrostriction)***. Η τελευταία σχέση μέσω του φωτοελαστικού φαινόμενου, προκαλεί μια πρόσθετη μεταβολή στα στοιχεία B_{ij} του πίνακα της αδιαπερατότητας (σχ. Z-136) η οποία σε βαθμωτή μορφή (αγνοώντας το γραμμικό Η/Ο φαινόμενο) γράφεται:

$$\begin{gathered} B\left(E^2\right) = B(0) + sE^2 + p\varepsilon = B(0) + sE^2 + p\left(\gamma E^2\right) = \\ B(0) + sE^2 + (p\gamma)E^2 = B(0) + (s + p\gamma)E^2 \end{gathered} \qquad \text{(Z-151)}$$

όπου p ο ελαστοοπτικός συντελεστής και $p\gamma$ θα είναι ο διορθωτικός όρος. Η (σχ. Z-151) σε τανυστική μορφή θα γράφεται:

$$B_{ij}\left(E^2\right) = B_{ij}(0) + s_{ijkl}E_kE_l + p_{ijrs}\varepsilon_{rs} = B_{ij}(0) + s_{ijkl}E_kE_l + p_{ijrs}\left(\gamma_{klrs}E_kE_l\right) \Rightarrow$$

$$B_{ij}\left(E^2\right) = B_{ij}(0) + \left(s_{ijkl} + p_{ijrs}\gamma_{klrs}\right)E_kE_l \qquad \text{(Z-152)}$$

όπου γ_{klrs} ο τανυστής τέταρτης τάξης της ηλεκτροσυστολής. Στην περίπτωση ύπαρξης και γραμμικού Η/Ο φαινομένου (πρωτεύοντος και δευτερεύοντος), στη (σχ. Z-152) θα πρέπει να προστεθούν οι αντίστοιχοι όροι από την (σχ. Z-148).

Μέτρηση των συντελεστών του Η/Ο φαινομένου

Μια τυπική μέθοδος για τη μέτρηση των Η/Ο συντελεστών r ενός κρυσταλλικού υλικού, είναι η μελέτη των καταστάσεων πόλωσης μιας δέσμης φωτός μετά την δίοδό της από το εσωτερικό του, κάτω από την επίδραση του πεδίου διαμόρφωσης. Τις καταστάσεις πόλωσης τις καθορίζουν οι ιδιοκαταστάσεις κατά τη διεύθυνση της κυματοκαθέτου, καθώς και η διεύθυνση εφαρμογής του διαμορφώνοντος πεδίου. Αν το προσπίπτον κάθετα σε μια έδρα του κρυστάλλου επίπεδο μετ. κύματος, διακρίνεται από μια κατάσταση πόλωσης (συνήθως γραμμική), τότε η κατάσταση πόλωσής του κατά την έξοδό του από την άλλη (παράλληλη προς την πρώτη έδρα) θα περιλαμβάνει στοιχεία όπως: Το μ.κ. του προσπίπτοντος φωτός, την ένταση του πεδίου διαμόρφωσης, τους δ.δ. του υλικού όπως βέβαια και έναν ή περισσότερους από τους προς μέτρηση ηλεκτροοπτικούς συντελεστές. Η επεξεργασία τέτοιου είδους μετρήσεων οδηγεί στον προσδιορισμό των r συναρτήσει του μ.κ. Παράγοντες οι οποίοι θα πρέπει να ληφθούν υπόψη είναι:

α) Η οπτικές συχνότητες συντονισμού ω_0

Ο προσδιορισμός του διασκεδασμού $r(\omega)$ ή $r(\lambda)$ στην ορατή περιοχή του Η/Μ φάσματος δεν επηρεάζεται ουσιαστικά επειδή οι συχνότητες συντονισμού $\omega = \omega_0$ βρίσκονται σε περιοχές όπου $\omega_0 > 10^{15}$ Hz ($\lambda < 300$nm) δηλ. στην υπεριώδη περιοχή του Η/Μ φάσματος. Με την προϋπόθεση βέβαια ότι ο κρύσταλλος είναι διαφανής.

β) Ακουστικές συχνότητες συντονισμού του κρυστάλλου

Ένας κρύσταλλος στον οποίο εφαρμόζουμε ένα ηλεκτρικό πεδίο διαμόρφωσης $E(\omega_m)$ μπορεί να εξετασθεί με δύο τρόπους: α) Όταν είναι ελεύθερος να υποστεί παραμόρφωση λόγω του δρώντος ηλ. πεδίου (παραμόρφωση της πλεγματικής του δομής εξαιτίας ιοντικής πόλωσης). Τότε η παραμόρφωση ακολουθεί χρονικά τη συχνότητα ω_m του ηλ. πεδίου. Αν στην ειδική περίπτωση το εφαρμοζόμενο εξωτερικά πεδίο είναι στατικό, τότε η παραμόρφωσή του θα διατηρείται σταθερή εφόσον θα συνεχίσει να υπόκειται στην επίδραση του πεδίου. Για τις περιπτώσεις αυτές, λέμε ότι ο κρύσταλλος βρίσκεται σε ***κατάσταση ελεύθερης παραμόρφωσης (unclamped)***. Τότε ο υπολογιζόμενος ηλεκτροοπτικός συντελεστής είναι ο λεγόμενος ***ενεργός (effective)***, δηλ. περιλαμβάνει και τον διορθωτικό όρο που οφείλεται

στη σχετική παραμόρφωση λόγω του αντιστρόφου πιεζοηλεκτρικού φαινομένου. Επομένως:

$$r_{eff} = r + pd \quad \text{ή} \quad r^T = r^S + pd \qquad \text{(Z-153)}$$

β) Όταν ο κρύσταλλος περιορίζεται και δεν έχει τη δυνατότητα ελεύθερης παραμόρφωσης ***(clamped)***, τότε ο διορθωτικός όρος δεν υφίσταται οπότε μετρούμε τον πραγματικό Η/Ο συντελεστή r ή r^S. Στην πρώτη περίπτωση ο κρύσταλλος βρίσκεται υπό σταθερή μηχανική τάση ενώ στη δεύτερη υπό σταθερή σχετική παραμόρφωση. Η ***ακουστική συχνότητα συντονισμού (acoustic resonance)*** είναι η περιοχή εκείνη από τις συχνότητες διαμόρφωσης ω_m στην οποία ο κρύσταλλος υπό συνθήκες σταθερής μηχανικής τάσης ***(unclamped)***, μεταβαίνει σε συνθήκες σταθερής σχετικής παραμόρφωσης ***(clamped)***. Δηλ. για συχνότητες διαμόρφωσης μεγαλύτερες της ακουστικής συχνότητας συντονισμού, ο κρύσταλλος δεν μπορεί πλέον να παραμορφωθεί (δηλ. παύει να υφίσταται η παραμόρφωση της πλεγματικής του δομής). Μια τυπική ακουστική συχνότητα συντονισμού είναι η $\nu \simeq 10^4\,\text{Hz}$.

Η) *Φυσική και επαγόμενη στροφικότητα (Οπτική ενεργότητα)*

Στα προηγούμενα κεφάλαια του (ΠΑΡ/ΤΟΣ 4), μελετήσαμε τον τρόπο διάδοσης του φωτός στο εσωτερικό των ανισοτρόπων υλικών (κρυστάλλων). Κυρίαρχο φαινόμενο στην συγκεκριμένη περίπτωση ήταν αυτό της διπλοθλαστικότητας, φυσικής και επαγόμενης. Κατά τα γνωστά, επαγόμενη διπλοθλαστικότητα στους κρυστάλλους (ακόμα και σε ισότροπα υλικά) (Κεφ. Ζ) αναπτύσσεται όταν επιδράσουν πάνω τους εξωγενείς δυνάμεις όπως: Ηλεκτρικά ή μαγνητικά πεδία, μηχανικές τάσεις θερμοκρασιακές μεταβολές κλπ. Κάτω από αυτές τις συνθήκες στη γενικότερη περίπτωση αποδείξαμε ότι κατά τη διεύθυνση μιας κυματοκαθέτου $\mathbf{k}$, μπορούν να διαδοθούν εν γένει δύο επίπεδα γραμμικά πολωμένα μέτωπα κύματος (ιδικαταστάσεις) οι ιδιότητες των οποίων περιγράφονται στο (Κεφ. ΣΤ). Επίσης με τη βοήθεια του ελλειψοειδούς των δεικτών διάθλασης (Κεφ. Β) ή με άλλες μεθόδους, προσδιορίζουμε τους δ.δ. (και κατά προέκταση τις ταχύτητες φάσης) με απώτερο σκοπό τον προσδιορισμό της διαφοράς φάσης κατά τη διάδοσή τους σε ορισμένη απόσταση στο εσωτερικό του κρυστάλλου και κατά προέκταση την κατάσταση πόλωσης της διαδιδόμενης διαταραχής σ' αυτή θέση.

Στις οπτικές όμως ιδιότητες των υλικών (ισοτρόπων και κρυσταλλικών) περιλαμβάνεται και αυτή της ***οπτικής ενεργότητας (optical activity)*** την οποία μελετήσαμε στοιχειωδώς στο (Κεφ. 7). Το φυσικό αυτό φαινόμενο, εκδηλώνεται με τη στροφή του επιπέδου πόλωσης του γραμμικά πολωμένου φωτός κατά τη διάδοσή του στο εσωτερικό τέτοιων υλικών. Η φαινομενολογική ερμηνεία της οπτικής ενεργότητας κατά Fresnel (§ 7.1) έχει ως εξής: Το στρεφόμενο γραμμικά πολωμένο φως, δεχόμαστε ότι είναι το αποτέλεσμα της σύζευξης δύο κυκλικά πολωμένων φώτων (αντίθετης στροφικότητας) με διαφορετικές όμως ταχύτητες φάσης υ_R, υ_L και άρα με διαφορετικούς δ.δ. n_R, n_L. Η διπλοθλαστικότητα $n_R - n_L$ αυτού του είδους ονομάζεται ***κυκλική διπλοθλαστικότητα (circular birefringence)***. Στη γενικότερη περίπτωση αυτών των υλικών – όπως θα δούμε στα επόμενα – κατά τη διεύθυνση μιας κυματοκαθέτου $\mathbf{k}$, μπορούν να διαδοθούν εν γένει δύο ελλειπτικά πολωμένα μέτωπα κύματος (ιδιοκαταστάσεις). Η οπτική ενεργότητα, είναι ενδογενής ιδιότητα των υλικών που ονομάζονται ***στροφικά ή γυροτροπικά (gyrotropic)*** και μπορεί να είναι φυσική ή επαγόμενη. Επαγόμενη κυκλική διπλοθλαστικότητα μπορεί να προκύψει : α) Με την εφαρμογή ηλεκτρικού πεδίου (***ηλεκτροστροφικότητα (electrogyration)***) β) Μαγνητικού πεδίου (***μαγνητοστροφικότητα*** π.χ. ***στροφή***

Faraday (Faraday rotation)) γ) Μηχανικής τάσης (***πιεζοστροφικότητα (piezogyration)***) κλπ.

Θα επιχειρήσουμε στα επόμενα – με φαινομενολογικό τρόπο – να περιγράψουμε το μηχανισμό που προκαλεί τα στροφικά φαινόμενα, φυσικά ή επαγόμενα. Εκφράζεται μαθηματικά με Ερμιτιανές (Hermitian) (φανταστικές αντισυμμετρικές διαταραχές) των στοιχείων του πίνακα του τανυστή της αδιαπερατότητας. Όπως και για τις περιπτώσεις της φυσικής ή επαγόμενης διπλοθλαστικότητας, καλούμαστε ν' αντιμετωπίσουμε τα εξής δύο προβλήματα:

α) Για ένα κρύσταλλο που ενέχει γραμμική διπλοθλαστικότητα (φυσική ή επαγόμενη) και (ή) στροφικότητα (φυσική ή επαγόμενη), ποιες θα είναι οι ιδιοκαταστάσεις (πόλωσης) καθώς και οι ιδιοτιμές (και κατά προέκταση οι δ.δ. καθώς και οι ταχύτητες φάσης) για διάδοση κατά τη διεύθυνση μιας κυματοκαθέτου **k** στο εσωτερικό του;

β) Ποιοι θα είναι οι κύριοι δ.δ. (n_1', n_2', n_3') του διαταραγμένου έλλ. των δ.δ. καθώς και οι διευθύνσεις των αξόνων του ως προς το σύστημα συντεταγμένων των κυρίων αξόνων x_1, x_1, x_3;

Για διαθλαστικούς στροφικούς διαφανείς κρυστάλλους (δηλ. που δεν παρουσιάζουν απορρόφηση), γραμμικούς και ομογενείς, αποδεικνύεται εν γένει ότι οι ιδιοκαταστάσεις τους είναι ελλειπτικά πολωμένες. Επομένως θα τις χαρακτηρίζουν ως προς ένα σ.σ. τρία στοιχεία: α) Η ***αζιμουθιακή γωνία (azimuthal angle)*** ή ***αζιμούθιο*** (η γωνία που σχηματίζει ο μεγάλος άξονας της έλλειψης σε σχέση με ένα συγκεκριμένο άξονα του σ.σ.), β) Η ***ελλειπτικότητα (ellipticity)*** (ο λόγος του μικρού προς τον μεγάλο άξονα της έλλειψης) και γ) Η ***στροφικότητα (handedness)*** (αριστερόστροφη ή δεξιόστροφη), (δηλ. η φορά περιστροφής του άκρου του διανύσματος **D** για φως που έρχεται προς τα εμάς).

Βάση επίλυσης των προαναφερόμενων προβλημάτων, αποτελεί ο προσδιορισμός της καταστατικής εξίσωσης (σχ. Β-6) ή (σχ. Β-9), που κατά τα γνωστά περιγράφει τις οπτικές ιδιότητες των κρυσταλλικών υλικών. Πιο συγκεκριμένα, ο προσδιορισμός των στοιχείων του πίνακα $[B]$ του τανυστή B_{ij} της αδιαπερατότητας. Το ελλ. των δ.δ. καθώς και μια νέα επιφάνεια που ονομάζεται ***στροφική επιφάνεια (gyration surface)*** θα μας χρησιμεύσουν για τη επίλυση με γεωμετρικό τρόπο των προβλημάτων της γραμμικής και κυκλικής διπλοθλαστικότητας. Θα γίνει πλήρης περιγραφή του προβλήματος του υπολογισμού των ιδιοκαταστάσεων καθώς και των ιδιοτιμών (από όπου και ο προσδιορισμός των δ.δ.) για τους ερμιτιανούς πλέον πίνακες των αδιαπερατοτήτων. Επίσης θα περιγραφεί αναλυτικά η επεκταμένη μέ-

θοδος Jacobi και οι ***μιγαδικές μεταβλητές πόλωσης (complex polarization variables)*** που χρησιμοποιούνται για τον προσδιορισμό των ιδιοκαταστάσεων, σε μια δοσμένη διεύθυνση της κυματοκαθέτου $\mathbf{k}$ στο εσωτερικό ενός γενικά διπλοθλαστικού και οπτικά ενεργού κρυστάλλου.

1. Καταστατική εξίσωση για τα στροφικά υλικά. Οπτική ενεργότητα (στροφικότητα) και ηλεκτροστροφικότητα

Μας είναι γνωστό από τα (Κεφ. Α,Β του ΠΑΡ/ΜΑΤΟΣ 4) ότι οι οπτικές ιδιότητες ενός κρυστάλλου περιγράφονται από την καταστατική εξίσωση που δίνεται από τη (σχ. Β-6):

$$\mathbf{D} = [\varepsilon]\mathbf{E} \quad \text{ή} \quad \begin{pmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{pmatrix} \tag{H-1}$$

Όπου $\mathbf{D}, \mathbf{E}$ τα διανύσματα της ηλεκτρικής μετατόπισης και της έντασης του ηλ. πεδίου, καθώς και $[\varepsilon]$ ο πίνακας των στοιχείων του τανυστή της ηλεκ. διαπερατότητας του μέσου, γραμμένου στο σ.σ. κυρίων αξόνων x_1, x_1, x_3. Επίσης στο (Κεφ. Β) είχαμε αποδείξει ότι η καταστατική εξίσωση μπορεί να πάρει τη μορφή:

$$\mathbf{E} = [\varepsilon]^{-1}\mathbf{D} = \frac{1}{\varepsilon_0}[B]\mathbf{D} = \frac{1}{\varepsilon_0}\begin{pmatrix} B_1 & 0 & 0 \\ 0 & B_2 & 0 \\ 0 & 0 & B_3 \end{pmatrix}\mathbf{D} \tag{H-2}$$

Όπου $[B]$ ο πίνακας των στοιχείων του τανυστή B_{ij} της αδιαπερατότητας και ε_0 η ηλ. διαπερατότητα του κενού. Για ένα ομογενές, διαφανές και μη στροφικό υλικό οι πίνακες της διαπερατότητας $[\varepsilon]$ καθώς και της αδιαπερατότητας $[B]$, περιλαμβάνουν μόνο πραγματικά στοιχεία. Επίσης εμφανίζουν συμμετρία ως προς την κύρια διαγώνιο και ως προς οποιοδήποτε σ.σ.. Κάτω από αυτές τις συνθήκες οι πίνακες αυτοί μπορούν να διαγωνιοποιηθούν όπως ήδη έχουμε περιγράψει για το σύστημα των κυρίων αξόνων x_1, x_1, x_3.

Για την περίπτωση όμως ενός στροφικού μέσου, τέτοιου δηλ. που εμφανίζει οπτική ενεργότητα (φυσική ή επαγόμενη), σαν καταστατική εξίσωση προτείνεται η εξής:

$$\mathbf{D} = [\varepsilon]\mathbf{E} + i\varepsilon_0 \mathbf{G} \times \mathbf{E} = [\varepsilon]' \mathbf{E} \tag{H-3}$$

Όπου $[\varepsilon]$ είναι ο συμμετρικός διαταραγμένος (παρουσία δηλ. εξωτερικών ηλεκτρικών ή μαγνητικών πεδίων, μηχανικών τάσεων κ.τ.λ.) ή αδιατάρακτος (απουσία των προαναφερόμενων) πίνακας της ηλ. διαπερατότητας. $\mathbf{G}$ το ***στροφικό διάνυσμα (gyration vector)*** το οποίο προσδιορίζεται αποκλειστικά από το μηχανισμό που παράγει την κυκλική διπλοθλαστικότητα, και $i=\sqrt{-1}$ είναι η φανταστική μονάδα. Έστω: $\mathbf{G}=\begin{bmatrix}G_1 & G_2 & G_3\end{bmatrix}^T$ και $\mathbf{E}=\begin{bmatrix}E_1 & E_2 & E_3\end{bmatrix}^T$ τα διανύσματα στήλες (3×1) με $G_i, E_i \quad i=1,2,3$ τις συνιστώσες των $\mathbf{G}$ και $\mathbf{E}$, και με $[X]^T$ τον ανάστροφο του πίνακα $[X]$. Τότε:

$$\mathbf{G}\times\mathbf{E}=\begin{pmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ G_1 & G_2 & G_3\\ E_1 & E_2 & E_3\end{pmatrix}=\left[\left(-G_3E_2+G_2E_3\right)\mathbf{i}+\left(G_3E_1-G_1E_3\right)\mathbf{j}+\left(-G_2E_1+G_1E_2\right)\mathbf{k}\right] \quad \text{ή}$$

$\mathbf{G}\times\mathbf{E}=\left[\left(-G_3E_2+G_2E_3\right) \quad \left(G_3E_1-G_1E_3\right) \quad \left(-G_2E_1+G_1E_2\right)\right]^T$ είναι το διάνυσμα $\mathbf{G}\times\mathbf{E}$

σε μορφή πίνακα (3×1). Επομένως:

$$\mathbf{G}\times\mathbf{E}=\begin{pmatrix}-G_3E_2+G_2E_3\\ G_3E_1-G_1E_3\\ -G_2E_1+G_1E_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & -G_3 & G_2\\ G_3 & 0 & -G_1\\ -G_2 & G_1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}E_1\\ E_2\\ E_3\end{pmatrix}=[G]\mathbf{E} \qquad \text{(Η-4α)}$$

όπου:

$$[G]=\begin{pmatrix}0 & -G_3 & G_2\\ G_3 & 0 & -G_1\\ -G_2 & G_1 & 0\end{pmatrix} \qquad \text{(Η-4β)}$$

είναι ένας αντισυμμετρικός πίνακας. Τότε η (σχ. Η-3) μπορεί να γραφεί:

$$\mathbf{D}=\left\{[\varepsilon]+i\varepsilon_0[G]\right\}\mathbf{E}=[\varepsilon]'\,\mathbf{E} \qquad \text{(Η-5)}$$

Από την τελευταία σχέση διαπιστώνουμε ότι ο πίνακας $[\varepsilon]'$ είναι ερμιτιανός.

Η καταστατική εξίσωση (Η-5) είναι δυνατόν (βλ. Άσκ.9-Λυμένη), να εκφραστεί ως εξής:

$$\mathbf{E}=[\varepsilon]'^{-1}\,\mathbf{D}=\frac{1}{\varepsilon_0}[B]'\,\mathbf{D}=\frac{1}{\varepsilon_0}\left\{[B]-i[B][G][B]\right\}\mathbf{D} \qquad \text{(Η-6)}$$

όπου $[B]$ ο αδιατάρακτος (αν δεν υπάρχουν επαγόμενα φαινόμενα) ή ο διαταραγμένος (αν υπάρχουν) πίνακας της αδιαπερατότητας. Και επειδή ο πίνακας $[B]'$ είναι ερμιτιανός μπορεί να γραφεί με τη μορφή:

$$[B]' = \begin{pmatrix} B'_{11} & B'_{12} & B'_{13} \\ B'^{*}_{12} & B'_{22} & B'_{23} \\ B'^{*}_{13} & B'^{*}_{23} & B'_{33} \end{pmatrix} \tag{H-7}$$

όπου $B'^{*}_{12}, B'^{*}_{13}, B'^{*}_{23}$ είναι οι μιγαδικοί συζυγείς των $B'_{12}, B'_{13}, B'_{23}$. Τότε το ελλ. των δ.δ. (βλ. Κεφ. Β) θα προσδιορίζεται από τη σχέση:

$$w_p = \frac{1}{2}\mathbf{D}\cdot\mathbf{E} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} D_1 & D_2 & D_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} D_1 & D_2 & D_3 \end{pmatrix}[B]'\begin{pmatrix} D_1 & D_2 & D_3 \end{pmatrix}^T =$$

$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} D_1 & D_2 & D_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} B'_{11} & B'_{12} & B'_{13} \\ B'^{*}_{12} & B'_{22} & B'_{23} \\ B'^{*}_{13} & B'^{*}_{23} & B'_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} D_1 & D_2 & D_3 \end{pmatrix}^T = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} D_1 & D_2 & D_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} B'_{11}D_1 + B'_{12}D_2 + B'_{13}D_3 \\ B'^{*}_{12}D_1 + B'_{22}D_2 + B'_{23}D_3 \\ B'^{*}_{13}D_1 + B'^{*}_{23}D_2 + B'_{33}D_3 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2}\left(B'_{11}D_1^2 + B'_{12}D_1D_2 + B'_{13}D_1D_3 + B'^{*}_{12}D_1D_2 + B'_{22}D_2^2 + B'_{23}D_2D_3 + B'^{*}_{13}D_1D_3 + B'^{*}_{23}D_2D_3 + B'_{33}D_3^2\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left[B'_{11}D_1^2 + B'_{22}D_2^2 + B'_{33}D_3^2 + \left(B'_{12} + B'^{*}_{12}\right)D_1D_2 + \left(B'_{13} + B'^{*}_{13}\right)D_1D_3 + \left(B'_{23} + B'^{*}_{23}\right)D_2D_3\right]$$

και τελικά:

$$w_p = \frac{1}{2}\left[B'_{11}D_1^2 + B'_{22}D_2^2 + B'_{33}D_3^2 + 2\,\mathrm{Re}\left(B'_{12}\right)D_1D_2 + 2\,\mathrm{Re}\left(B'_{13}\right)D_1D_3 + 2\,\mathrm{Re}\left(B'_{23}\right)D_2D_3\right] \tag{H-8}$$

Από την τελευταία σχέση μπορούμε να διαπιστώσουμε ότι μόνο το πραγματικό μέρος των στοιχείων του πίνακα $[B]'$ προσδιορίζουν την τετραγωνική επιφάνεια w_p, δηλ. το ελλ. των δ.δ., ακόμα και στην περίπτωση που ο κρύσταλλος εμφανίζει στροφικότητα, φυσική ή επαγόμενη. Το παραπάνω συμπέρασμα μπορεί να επιβεβαιωθεί και από το γεγονός ότι ο υπολογισμός του αντισυμμετρικού (φανταστικού) μέρους του πίνακα $[B]'$ μας οδηγεί στην εξής σχέση:

$$\mathrm{Im}[B]' = -[B][G][B] = -\begin{pmatrix} 0 & -B_1B_2G_3 & B_1B_3G_2 \\ B_1B_2G_3 & 0 & -B_2B_3G_1 \\ -B_1B_3G_2 & B_2B_3G_1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{(H-9)}$$

όπου $[B] = \begin{pmatrix} B_1 & 0 & 0 \\ 0 & B_2 & 0 \\ 0 & 0 & B_3 \end{pmatrix}$ ο διαταραγμένος εν γένει πίνακας της αδιαπερατότητας (δηλ. με την παρουσία επαγομένων φαινομένων), ως προς το σ.σ. των κυρίων αξόνων x_1, x_2, x_3. Βλέπουμε δηλ. από τη (σχ. Η-9) ότι τα διαγώνια στοιχεία του πίνακα $\mathrm{Im}[B]'$ είναι μηδενικά, που σημαίνει ότι δεν ασκούν καμιά επίδραση στους κύριους διηλεκτρικούς άξονες και κατά προέκταση στις διευθύνσεις των αξόνων του επαγόμενου ελλειψοειδούς, καθώς και στους δείκτες διάθλασής τους.

Θα πρέπει ν' αναφέρουμε επίσης ότι για τις περισσότερες των περιπτώσεων ο πίνακας $[B]$ στη σχέση: $\mathrm{Im}[B]' = -[B][G][B]$ αντικαθίσταται από τον πίνακα $[B]^0$ δηλ. τον πίνακα που αφορά μόνο τα μη επαγόμενα φαινόμενα. Οπότε: $\mathrm{Im}[B]' = -[B]^0[G][B]^0$. Το τελευταίο δεδομένου ότι οι τιμές των στοιχείων του πίνακα είναι πολύ μικρές. Επομένως κατά τον πολλαπλασιασμό τους θα ισχύει γενικά: $B_iG_kB_j \simeq B_i^0G_kB_j^0$ (βλ. σχολιασμό της (σχ. Η-117)).

Φαινομενολογική ερμηνεία της φυσικής οπτικής ενεργότητας[*]

Στα επόμενα θα προσπαθήσουμε ν' αναδείξουμε την καταστατική εξίσωση που περιγράφεται από τη (σχ. Η-3) και που αφορά ένα υλικό το οποίο εκτός από φυσική διπλοθλαστικότητα εμφανίζει και φυσική οπτική ενεργότητα. Κατ' αρχή είναι γνωστό πως για τα υλικά αυτά στη στερεά τους μορφή – περιλαμβανομένων και των κρυστάλλων – ότι το διάνυσμα $\mathbf{P}$ της πόλωσης του διηλεκτρικού καθορίζεται όχι μόνο από την τιμή της έντασης του ηλεκ. πεδίου $\mathbf{E}$ στο σημείο που ορίζει το διάνυσμα θέσης $\mathbf{r}$ αλλά και από τις τιμές του πεδίου γύρω από αυτό. Δηλ. $\mathbf{P} = \mathbf{P}(\mathbf{r}, t)$. Το φαινόμενο αυτό ονομάζεται ***χωρικός διασκεδασμός (spatial dispersion)***. Στην περίπτωση που το ηλεκτρικό πεδίο $\mathbf{E}$ είναι ομογενές τότε η τιμή του στη θέση $\mathbf{r}$ είναι ίδια με αυτές στη γειτονιά του με συνέπεια να μην υφίσταται χωρικός διασκεδασμός. Αν όμως υφίσταται, τότε το διάνυσμα της πόλωσης του διηλεκτρικού $\mathbf{P}$, δεν θα εξαρτάται μόνο από την τιμή του $\mathbf{E}$ σε μία ορισμένη θέση αλλά και από τις τιμές των χωρικών του παραγώγων. Δηλ. από τις μεταβολές των συ-

[*] Yu. I. Sirotin, M.P.Shaskolskaya: 'Fundamentals of Crystal Physics'. Sec.81 : Optical activity of crystals.

νιστωσών E_1, E_2, E_3 του $\mathbf{E}$ ως προς τα συντεταγμένες x_1, x_2, x_3 του χώρου. Αν θεωρήσουμε σημαντικές μόνο τις παραγώγους πρώτης τάξης, τότε μπορούμε να γράψουμε:

$$P_i = \varepsilon_0 \chi_{ij} E_j + \beta_{ijk} \frac{\partial E_j}{\partial x_k} \quad i, j, k = 1, 2, 3 \tag{H-10}$$

όπου χ_{ij} ο τανυστής της ηλεκτρικής επιδεκτικότητας. Στην περίπτωση που ο τανυστής β_{ijk} είναι διάφορος του μηδενός, τότε εμφανίζεται χωρικός διασκεδασμός πρώτης τάξης και ο κρύσταλλος ονομάζεται οπτικά ***ενεργός (optically active)***.

Από τη (σχ. Η-10) για $D_i = \varepsilon_0 \delta_{ij} E_j + P_i$ ($\delta_{ij} = 1$ για $i = j$ και 0 για $i \neq j$) θα έχουμε: $D_i = \varepsilon_0 \delta_{ij} E_j + \varepsilon_0 \chi_{ij} E_j + \beta_{ijk} \frac{\partial E_j}{\partial x_k} \Rightarrow D_i = \varepsilon_0 \left(\delta_{ij} + \chi_{ij} \right) E_j + \beta_{ijk} \frac{\partial E_j}{\partial x_k} \Rightarrow$

$D_i = \varepsilon_0 k_{ij} E_j + \beta_{ijk} \frac{\partial E_j}{\partial x_k}$ όπου k_{ij} ο τανυστής της διηλεκτρικής σταθερής. Τότε με βάση τον κανόνα της δυαδικότητας (σχ. Ε-15):

$$\begin{array}{cccccc} E & D & \varepsilon_0 & k_e \to \left(n^2\right) & (n) \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ D & E & 1/\varepsilon_0 & B \to \left(1/n^2\right) & \left(1/n_r\right) \end{array}$$

η (σχ. Η-10) μετατρέπεται στην έγκυρη σχέση:

$$E_i = \frac{1}{\varepsilon_0} B_{ij} D_j + \frac{1}{\varepsilon_0} \gamma_{ijk} \frac{\partial D_j}{\partial x_k} \quad i, j, k = 1, 2, 3 \tag{H-11}$$

με B το μέγεθος της αδιαπερατότητας και $\beta_{ijk} \to \frac{1}{\varepsilon_0} \gamma_{ijk}$

Και εφόσον στο εσωτερικό των κρυστάλλων θεωρούμε διάδοση επιπέδων μετώπων κύματος τότε:

$$\widetilde{\mathbf{D}} = \mathbf{D}_0 e^{i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})} = \left(D_{01} \mathbf{i} + D_{02} \mathbf{j} + D_{03} \mathbf{k} \right) e^{i(\omega t - k_1 x_1 - k_2 x_2 - k_3 x_3)} \tag{H-12}$$

Όπου D_{01}, D_{02}, D_{03} τα πλάτη των συνιστωσών D_1, D_2, D_3 του διανύσματος $\widetilde{\mathbf{D}}$ της ηλ. μετατόπισης. Αν τώρα π.χ. παραγωγίσουμε τη συνιστώσα D_1 ως προς x_2 θα έχουμε:

$$D_1 = D_{01} e^{i(\omega t - k_1 x_1 - k_2 x_2 - k_3 x_3)} \qquad \frac{\partial D_1}{\partial x_2} = -ik_2 D_{01} e^{i(\omega t - \mathbf{k}\cdot\mathbf{r}))} \tag{H-13}$$

Προκειμένου τώρα να μην υπάρχει σύγχυση μεταξύ της φανταστικής μονάδας $i = \sqrt{-1}$ και του δείκτη $i = 1,2,3$ η (σχ. Η-11) γράφεται:

$$E_j = \frac{1}{\varepsilon_0} B_{jl} D_l + \frac{1}{\varepsilon_0} \gamma_{jlm} \frac{\partial D_l}{\partial x_m} \qquad j,l,m = 1,2,3 \tag{H-14}$$

και γενικεύοντας τη (σχ. Η-13) θα έχουμε:

$$\frac{\partial D_l}{\partial x_m} = -ik_m D_{0l} e^{i(\omega t - \mathbf{k}\cdot\mathbf{r}))} = -iD_l k_m \tag{H-15}$$

Αν η τελευταία αντικατασταθεί στη (σχ. Η-14) μας δίνει:

$$E_j = \frac{1}{\varepsilon_0}\left(B_{jl} - i\gamma_{jlm} k_m\right) D_l = \frac{1}{\varepsilon_0}\left(B_{jl} - i\frac{2\pi}{\lambda}\gamma_{jlm} l_m\right) D_l \tag{H-16}$$

όπου όπως προαναφέραμε $i = \sqrt{-1}$ είναι η φανταστική μονάδα. Από τη (σχ. Η-16) διαπιστώνουμε ότι ο προσθετικός όρος $-i\gamma_{jlm} k_m$ αποτελεί ένα είδος επίδρασης στον όρο B_{jl} του τανυστή της αδιαπερατότητας, όπου ο τελευταίος ως γνωστό αφορά την φυσική ή επαγόμενη διπλοθλαστικότητα. Δηλ. βλέπουμε ότι η υπόθεση του προσδιορισμού της πόλωσης $\mathbf{P}$ του διηλεκτρικού με την επιπλέον συνδρομή του χωρικού διασκεδασμού του ηλ. πεδίου $\mathbf{E}$, οδηγεί σ' ένα είδος (χωρικής) διαταραχής του τανυστή B_{jl}, που η τιμή της εξαρτάται από τη διεύθυνση του κυματοδιανύσματος $\mathbf{k}$ με συντεταγμένες k_m όπου $m = 1,2,3$. Με ανάλογο τρόπο, η εξάρτηση της $\mathbf{P}$ από το συχνοτικά (χρονικά) μεταβαλλόμενο ηλ. πεδίο $\mathbf{E}$, οδηγεί στην εξάρτηση του B_{jl} και κατά προέκταση των δ.δ. από τη συχνότητα ω του ηλ. πεδίου (διασκεδασμός). Η διαταραχή $-i\gamma_{jlm} k_m$ στη (σχ. Η-16) είναι εμφανώς φανταστική. Και εφόσον $k_m = (2\pi/\lambda) l_m$ όπου l_m – κατά τα γνωστά – τα συνημίτονα κατεύθυνσης της κυματοκαθέτου $\mathbf{k}$, τότε και η διαταραχή θα είναι αντιστρόφως ανάλογη του μ.κ. λ. Επειδή όμως το μόνο 'διαστατικό' χαρακτηριστικό ενός υποτιθέμενου μεγάλων διαστάσεων κρυστάλλου σε σχέση με τη θεμελιώδη του δομή είναι η κυψελίδα του γραμμικής διάστασης α, τότε μπορούμε να βγάλουμε το συμπέρασμα ότι

ο προσθετικός παράγοντας $-i\gamma_{jlm}k_m$ στη (σχ. Η-16) είναι της τάξης του α/λ που χαρακτηρίζει και το μέτρο του φαινομένου του χωρικού διασκεδασμού. Για τις συχνότητες που ο κρύσταλλος είναι διαφανής, ο συνολικός τανυστής της αδιαπερατότητας $B_{jl} - i\gamma_{jlm}k_m$ στη (σχ. Η-16) είναι ερμιτιανός. Δηλ. τα πραγματικά μέρη των στοιχείων του πίνακα που τον παριστάνει είναι συμμετρικά και τα φανταστικά αντισυμμετρικά όπως αποδεικνύεται με βάση θερμοδυναμικές διαδικασίες. Το τελευταίο σημαίνει ότι ο τανυστής γ_{jlm} είναι αντισυμμετρικός ως προς τους δύο πρώτους δείκτες του. Δηλ.

$$\gamma_{jlm} = -\gamma_{ljm} \tag{H-17}$$

Το γεγονός αυτό που αφορά την εσωτερική του συμμετρία, μας επιτρέπει να εισάγουμε τον ***ψευδοτανυστή της στροφικότητας (pseudotensor of gyration)*** G_{km} με τη μορφή:

$$(2\pi/\lambda)\gamma_{jlm} = \delta_{jlk}G_{km} \tag{H-18}$$

όπου: $$\delta_{jlk} = \begin{cases} 1 & \text{όταν τα } j,l,k \text{ ακολουθούν μια άρτια μετάθεση} \\ -1 & \text{όταν τα } j,l,k \text{ ακολουθούν μια περιττή μετάθεση} \\ 0 & \text{όταν τα } j,l,k \text{ περιλαμβάνουν δύο ή περισσότερους} \\ & \text{επαναλαμβανόμενους δείκτες} \end{cases}$$

είναι ο μοναδιαίος αντισυμμετρικός ψευδοτανυστής των Levi-Civita. Τότε η (σχ. Η-16) γίνεται:

$$E_j = \frac{1}{\varepsilon_0}\left(B_{jl} - i\delta_{jlk}G_{km}l_m\right)D_l \tag{H-19}$$

όπου ο προσθετικός παράγοντας $\delta_{jlk}G_{km}l_mD_l$ μπορεί να γραφεί με τη μορφή του εξωτερικού γινομένου $\mathbf{D}\times\mathbf{G}$ με $\mathbf{G}$ το γνωστό στροφικό διάνυσμα της (σχ. Η-3). Με τη βοήθεια του κανόνα της διαδικότητας (βλ. ΠΑΡ/ΜΑ 4, Κεφ. Ε (σχ. Ε-15)), η (σχ. Η-19) βλέπουμε ότι ταυτίζεται με τη (σχ. Η-3) και κατά προέκταση με τη (σχ. Η-5). Με τους παραπάνω συλλογισμούς αναδεικνύεται τελικά η καταστατική εξίσωση του υλικού, που διαθέτει φυσική διπλοθλαστκότητα καθώς και φυσική οπτική ενεργότητα.

Είναι δυνατόν τώρα με τη βοήθεια της (σχ. Η-16) και της (σχ. Α-22) – στο σ.σ. των κυρίων αξόνων x_1, x_2, x_3 – να υπολογίσουμε τους δ.δ. n_{01}, n_{02} των δύο ιδι-

οκαταστάσεων κατά μήκος μιας ορισμένης διεύθυνσης της κυματοκαθέτου **k** στο εσωτερικό του κρυστάλλου, καθώς και τις ιδιοκαταστάσεις (καταστάσεις πόλωσης) που είναι εν γένει ελλειπτικά πολωμένες. Επίσης αποδεικνύεται ότι το στροφικό διάνυσμα $\mathbf{G}(G_1, G_2, G_3)$ είναι παράλληλο με την κυματοκάθετη **k** και οι συνιστώσες του G_1, G_2, G_3 είναι συναρτήσεις των l_1, l_2, l_3 δηλ. των συνημίτονων κατεύθυνσής της.

Το μέτρο του $\mathbf{G}\left(|\mathbf{G}| = G\right)$ μεταβάλλεται και το ίδιο συναρτήσει των l_1, l_2, l_3 και ουσιαστικά είναι αυτό που τελικά καθορίζει την οπτική ενεργότητα στη διεύθυνση αυτή. Πρόκειται ουσιαστικά για μια τετραγωνική επιφάνεια (ονομάζεται στροφική επιφάνεια) των l_1, l_2, l_3 και είναι της μορφής:

$$G = g_{11}l_1^2 + g_{22}l_2^2 + g_{33}l_3^2 + 2g_{12}l_1l_2 + 2g_{13}l_1l_3 + 2g_{23}l_2l_3 \qquad \text{(H-20)}$$

$$G = g_{ij}l_il_j \qquad i, j = 1,2,3 \qquad \text{(H-21)}$$

όπου g_{ij} είναι τα στοιχεία του πίνακα του λεγόμενου ***τανυστή της στροφικότητας (gyration tensor)*** που περιγράφει την οπτική ενεργότητα ενός κρυστάλλου. Η μορφή και η συμμετρία αυτών των πινάκων για τις 32 κρυσταλλικές τάξεις δίνεται στο (ΠΑΡ/ΜΑ 6, Πιν.7).

Για την περίπτωση της φυσικής οπτικής ενεργότητας, η σχέση περιστροφής του άκρου του διανύσματος **D** σε σχέση με τη διεύθυνση της **k** είναι η ίδια. Το τελευταίο σημαίνει ότι αν διαταραχή κατά τη διάδοσή της σε ένα ορισμένο πάχος του κρυστάλλου αναγκαστεί να επανακάμψει στην ίδια θέση (π.χ. ανακλώμενη), η συνολική στροφή θα είναι μηδέν. Δηλ. η φυσική οπτική ενεργότητα είναι ***αμοιβαίο φαινόμενο (reciprocal effect)***. Δεν συμβαίνει όμως π.χ. το ίδιο για το μαγνητοστροφικό φαινόμενο Faraday. Στην περίπτωση αυτή η συνολική γωνία στροφής είναι διπλάσια αυτής που επιτυγχάνεται κατά την κίνηση προς τη μία φορά. Το γεγονός αυτό κατονομάζεται σαν ***μη αμοιβαίο φαινόμενο (non-reciprocal effect)***.

2. Το ελλειψοειδές των δεικτών διάθλασης και η στροφική επιφάνεια

Για την επιφάνεια του ελλ. των δ.δ. έχουμε εκτεταμένα μιλήσει στο (Κεφ. Β). Πρόκειται για μια τετραγωνική επιφάνεια (τριαξονικό εν γένει ελλειψοειδές), το οποίο ως προς το σ.σ. των κυρίων αξόνων x_1, x_2, x_3 δίνεται από τη (σχ. Β-5):

$$\frac{x_1^2}{n_1^2}+\frac{x_2^2}{n_2^2}+\frac{x_3^2}{n_3^2}=1 \qquad \text{(H-22)}$$

όπου n_1, n_2, n_3 οι κύριοι δ.δ. του κρυστάλλου. Στη γενικότερη περίπτωση, όταν οι άξονες του ελλειψοειδούς δεν συμπίπτουν με τους κύριους άξονες x_1, x_2, x_3 τότε η (σχ. Η-22) μπορεί να γραφεί:

$$B_{ij}x_i x_j = 1 \quad i, j = 1,2,3 \qquad \text{(H-23)}$$

όπου βέβαια B_{ij} είναι τα στοιχεία του πίνακα του τανυστή της αδιαπερατότητας που κατά τα γνωστά είναι συμμετρικός.

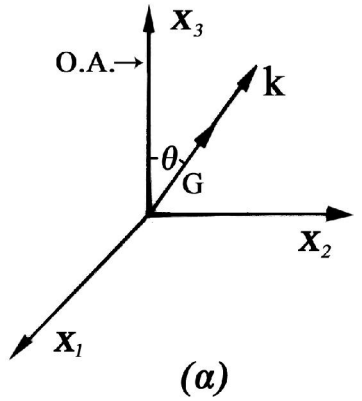
Στο (Κεφ. Β) έχουμε αποδείξει, ότι εφ' όσον γνωρίζουμε τη διεύθυνση της κυματοκαθέτου κατά τη διάδοση στο εσωτερικό ενός κρυστάλλου και φέρουμε από το κέντρο του ελλειψοειδούς ένα επίπεδο κάθετο σ' αυτήν, η τομή θα είναι εν γένει μία έλλειψη. Τότε: α) Τα μήκη των δύο ημιαξόνων της έλλειψης θα είναι οι δ.δ. των δύο γραμμικά πολωμένων ιδιοκαταστάσεων, οι οποίοι συνδέονται με τις ταχύτητες φάσης τους. β) Οι διευθύνσεις των δύο αξόνων, θα είναι οι διευθύνσεις των (γραμμικά πολωμένων) πεδίων $\mathbf{D}$ δηλ. των ιδιοκαταστάσεων $\mathbf{D}_1, \mathbf{D}_2$.

Για την περίπτωση όμως που ο κρύσταλλος είναι οπτικά ενεργός, το ελλ. των δ.δ. δεν μας παρέχει όλες τις πληροφορίες που αφορούν τις ακριβείς τιμές των ιδιοτιμών (και κατά προέκταση των δ.δ.) και των ιδιοκαταστάσεων, επειδή οι τελευταίες είναι εν γένει ελλειπτικά πολωμένες. Μας δίνει μόνο τις διευθύνσεις (αζιμούθια) των μεγάλων αξόνων των ιδιοκαταστάσεων. Η στροφικότητα όμως των οπτικά ενεργών κρυστάλλων, δηλ. το μέτρο G του στροφικού διανύσματος $\mathbf{G}(G_1, G_2, G_3)$ μέσω της (σχ. Η-21), είναι αυτή που μας δίνει – όπως θα δούμε στα επόμενα – τα επί πλέον στοιχεία για τον πλήρη προσδιορισμό των ιδιοτιμών και των ιδιοκαταστάσεων.

Παράδειγμα

Γνωρίζουμε ότι ο κρύσταλλος του χαλαζία (SiO_2) (§ 5.3 και 7.3), εκτός από μονοάξονας θετικός διπλοθλαστικός είναι και οπτικά ενεργός. Θέλουμε να προσδιορίσουμε αν υπάρχει διεύθυνση στο εσωτερικό του κατά την οποία $G = 0$. Δηλ. η στροφικότητά του να είναι μηδενική, που σημαίνει ότι οι ιδιοκαταστάσεις πόλωσής του είναι γραμμικά πολωμένες. Πιο συγκεκριμένα, γραμμικά πολωμένο φως διαδιδόμενο σ' αυτήν την διεύθυνση, δεν στρέφει το επίπεδο πόλωσής του.

• Ο κρύσταλλος του α-χαλαζία ανήκει στο τριγωνικό σύστημα, στην κρυσταλλική τάξη (32) και είναι εναντιόμορφος. Η συμμετρία του πίνακα των στοιχείων



$$g_{ij} = \begin{pmatrix} g_{11} & 0 & 0 \\ 0 & g_{11} & 0 \\ 0 & 0 & g_{33} \end{pmatrix}$$

(β)

(Σχ. Η-1)

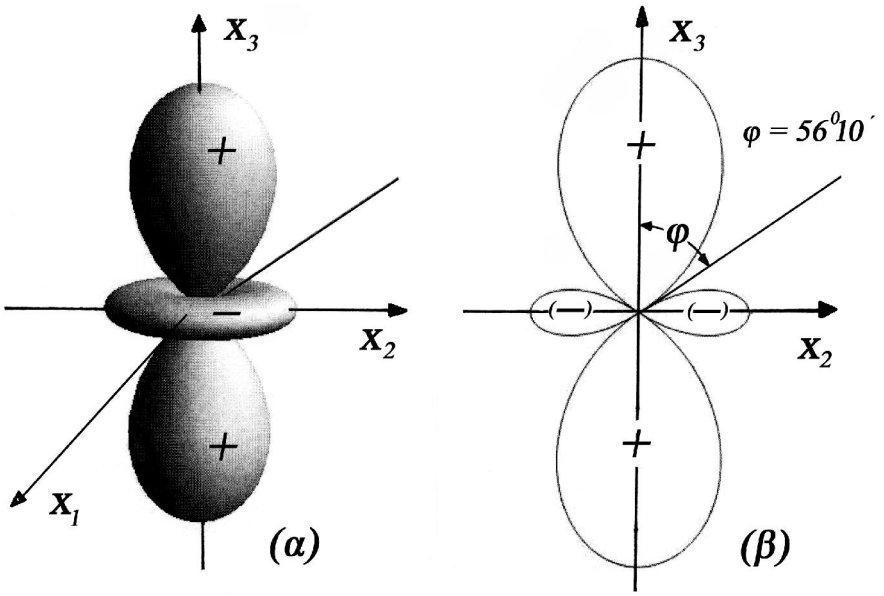
του στροφικού τανυστή στην περίπτωση αυτή φαίνεται στο (Σχ. Η-1β) με την ιδιότητα $g_{11} = g_{22} \neq g_{33}$ (βλ. ΠΑΡ/ΜΑ 6 (Πίν.7)). Υποθέτουμε ότι η διεύθυνση του **G** την οποία θέλουμε να προσδιορίσουμε, σχηματίζει με τον οπτικό άξονα του κρυστάλλου γωνία θ. Επειδή όμως η στροφική επιφάνεια είναι συμμετρική εκ περιστροφής ως προς τον άξονα x_3 που ταυτίζεται με τον οπτικό άξονα, μπορούμε να θεωρήσουμε ότι το **G** βρίσκεται π.χ. στο επίπεδο x_2, x_3 (Σχ. Η-1α). Τότε από τη (σχ. Η-21): $G = g_{ij} l_i l_j$ με $l_1 = 0,\ l_2 = \sin\theta,\ l_3 = \cos\theta$ και $g_{ij} = 0$ για $i \neq j$ έχουμε:

$$G = g_{11} \sin^2\theta + g_{33} \cos^2\theta$$

και όταν $G = 0 \ \Rightarrow\ \tan^2\theta = \left| -g_{33}/g_{11} \right| = 2.23$ για δεξιόστροφο κρύσταλλο χαλαζία. Επομένως: $\tan\theta = 1.493$ οπότε: $\theta = 56^o 10'$ (βλ. (§ 7.6) (Σχ. 7.6.1,2)).

Στο (Σχ. Η-2α) φαίνεται στο χώρο η στροφική επιφάνεια για τον δεξιόστροφο χαλαζία (δηλ. η παράσταση της $G = g_{11} \sin^2\theta + g_{33} \cos^2\theta$ στο χώρο) και στο (Σχ. Η-2β) η τομή της από ένα επίπεδο που περιλαμβάνει τον οπτικό του άξονα . Στο (Σχ. Η-2α) οι επιφάνειες με το πρόσημο $(+)$ αντιπροσωπεύουν διευθύνσεις όπου οι ιδιοκαταστάσεις εν γένει ελλειπτικές, είναι δεξιόστροφα (ή αντίστοιχα αριστερόστροφα) πολωμένες ενώ επιφάνειες με το πρόσημο $(-)$ αντιπροσωπεύουν διευθύνσεις όπου οι ιδιοκαταστάσεις είναι αριστερόστροφα (ή αντίστοιχα δεξιόστροφα) πολωμένες. Οι ιδιοκαταστάσεις κατά μήκος του οπτικού του άξονα είναι κυκλικά πολωμένες (δεξιόστροφη και αριστερόστροφη). Όπως αποδείξαμε προη-

γουμένως, μόνο οι ιδιοκαταστάσεις κατά τις διευθύνσεις που σχηματίζουν γωνία $\theta = 56^o 10'$ σε σχέση με τον οπτικό του άξονα είναι γραμμικά πολωμένες. Επειδή βέβαια γι' αυτές, η στροφικότητα G του κρυστάλλου είναι μηδέν (δηλ. ο κρύσταλ-



(Σχ. Η-2)

λος είναι μόνο διπλοθλαστικός αλλά όχι ταυτόχρονα και οπτικά ενεργός). Τέλος αν από τη φύση του ο κρύσταλλος του χαλαζία είναι αριστερόστροφος, τότε τα πρόσημα των περιοχών της στροφικής επιφάνειας (όσον αφορά την κατάσταση πόλωσης των ιδιοκαταστάσεων) αντιστρέφονται.

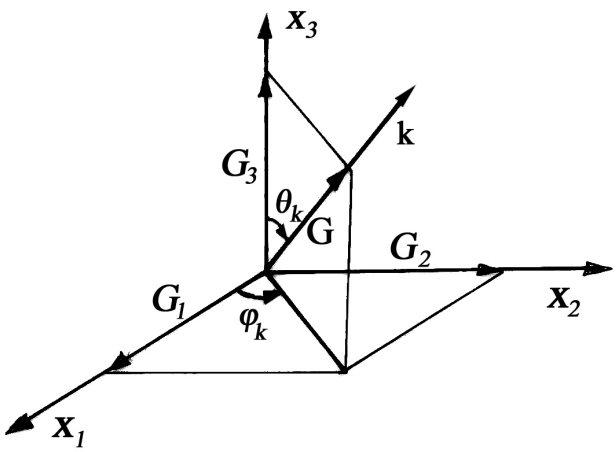
Μας είναι γνωστό, (Σχ. Ζ-9) ότι η κυματοκάθετη **k** προσδιορίζεται σε σχέση με το σ.σ. των κυρίων αξόνων x_1, x_2, x_3, με τη βοήθεια των γωνιών θ_k, ϕ_k (βλ. και Σχ. Η-3). Επειδή το στροφικό διάνυσμα **G** είναι συγγραμμικό της **k** τότε θα ισχύουν οι σχέσεις:

$$G_1 = G \sin\theta_k \cos\phi_k \quad G_2 = G \sin\theta_k \sin\phi_k \quad G_3 = G \cos\theta_k \qquad \text{(H-24α)}$$

όπου G το μέτρο του στροφικού διανύσματος. Επειδή επίσης τα συνημίτονα κατεύθυνσης της **k** στις σφαιρικές συντεταγμένες θ_k, ϕ_k είναι:

$$l_1 = \sin\theta_k \cos\phi_k \quad l_2 = \sin\theta_k \sin\phi_k \quad l_3 = \cos\theta_k$$

τότε η (σχ. Η-21) μπορεί να γραφεί στο σύστημα αυτό ως εξής:



(Σχ. Η-3)

$$\left.\begin{aligned}|\mathbf{G}| = G = g_{11}\sin^2\theta_k\cos^2\phi_k + g_{22}\sin^2\theta_k\sin^2\phi_k + g_{33}\cos^2\theta_k + \\ + 2g_{12}\sin^2\theta_k\sin\phi_k\cos\phi_k + 2g_{13}\sin\theta_k\cos\theta_k\cos\phi_k + 2g_{23}\sin\theta_k\cos\theta_k\sin\phi_k\end{aligned}\right\} \quad \text{(H-24β)}$$

όπου g_{ij} τα στοιχεία του πίνακα του τανυστή της στροφικότητας.

3. *Προσδιορισμός των κυρίων δεικτών διάθλασης n'_1, n'_2, n'_3 του διαταραγμένου ελλειψοειδούς, καθώς και των διευθύνσεων των κυρίων αξόνων του ως προς το σ.σ. των κυρίων αξόνων $x_1, x_2 x_3$, για την περίπτωση που οι κρύσταλλοι διαθέτουν (φυσική ή επαγόμενη) διπλοθλαστικότητα και (ή) (φυσική ή επαγόμενη) στροφικότητα*

Στο (Κεφ. Ζ) έχει περιγραφεί ο τρόπος με τον οποίο θα μπορούσε να γίνει ο προσδιορισμός των κυρίων δ.δ. n_1', n_2', n_3' του διαταραγμένου ελλειψοειδούς, καθώς και των διευθύνσεων των κυρίων αξόνων του. Το πρόβλημα περιλάμβανε συγκεκριμένα συμμετρικές διαταραχές των στοιχείων του πίνακα του τανυστή της αδιαπερατότητας (σχ. Ζ-87) που οφειλόταν στο επαγόμενο γραμμικό ηλεκτροοπτικό φαινόμενο. Για τους προαναφερόμενους προσδιορισμούς, χρησιμοποιήθηκε η μέθοδος του Jacobi σε τρείς διαστάσεις, που συνιστούσε μια επαναλαμβανόμενη διαδικασία μηδενισμού των εκτός διαγωνίου στοιχείων του πίνακα της αδιαπερατότητας, με σκοπό την πλήρη διγωνιοποίησή του.

Μας είναι όμως ήδη γνωστό, ότι αν οι κρύσταλλοι παρουσιάζουν στροφικότητα (φυσική ή επαγόμενη), τότε τα στοιχεία εκτός της κύριας διαγωνίου του πίνακα του τανυστή της αδιαπεραρότητας είναι μιγαδικά και αντισυμμετρικά. Δηλ. ο πίνακας που μας δίνει η (σχ. Η-7) είναι ερμιτιανός. Επίσης έχουμε αποδείξει στην (§ 1) αυτού του κεφαλαίου ότι το διαταραγμένο ελλ. των δ.δ. (από το οποίο μπορούμε να προσδιορίσουμε τους κύριους δ.δ. n_1', n_2', n_3') (σχ. Η-8), απαρτίζεται εκτός από τα πραγματικά στοιχεία της κύριας διαγωνίου του και από τα πραγματικά μέρη των στοιχείων των εκτός της κύριας διαγωνίου.

Επομένως η διαδικασία προσδιορισμού των n_1', n_2', n_3' και του προσανατολισμού των κυρίων αξόνων του ελλ. των δ.δ. είναι παρόμοια με αυτήν που περιγράψαμε στο (Κεφ. Ζ-Β)(σχ. Ζ-87~Ζ-96), αρκεί η μέθοδος του Jacobi να εφαρμοστεί στα πραγματικά μόνο μέρη των στοιχείων του πίνακα του τανυστή της αδιαπερατότητας που δίνεται από τη (σχ. Η-7).

4. *Προσδιορισμός των δ.δ. και των ιδιοκαταστάσεων πόλωσης για διάδοση κατά τη διεύθυνση μιας κυματοκαθέτου* **k** *στο εσωτερικό κρυστάλλων με γραμμική διπλοθλαστικότητα (φυσική ή επαγόμενη) και (ή) με στροφικότητα (φυσική ή επαγόμενη)*

Στην (§ 1) αυτού του κεφαλαίου από την καταστατική εξίσωση του υλικού (σχ. Η-6), βρήκαμε ότι ο πίνακας $[B]' = [B] - i[B][G][B]$ της αδιαπερατότητας, για την περίπτωση που ο κρύσταλλος διαθέτει στροφικότητα (φυσική ή επαγόμενη) είναι ερμιτιανός (σχ. Η-7). Γνωρίζουμε επίσης ότι το πρόβλημα του υπολογισμού των ιδιοτιμών (και κατά προέκταση των δ.δ.) καθώς και των ιδιοκαταστάσεων (ιδιοκαταστάσεων πόλωσης) ανάγεται σε πρόβλημα διαγωνιοποίησης του πίνακα $[B]'$ όπως το περιγράψαμε αναλυτικά στο (Κεφ. Ζ), για τις περιπτώσεις που τα στοιχεία του $[B]'$ ήταν πραγματικά.

Με παρόμοιο τρόπο το πρόβλημα του υπολογισμού ιδιοτιμών και ιδιοκαταστάσεων ενός ερμιτιανού πίνακα, ανάγεται στη διαγωνιοποίησή του βήμα προς βήμα, με τη βοήθεια όμως τώρα ***μοναδιαίου μετασχηματισμού (unitary transformation)*** * της μορφής:

---

* T.A.Maldonado and T.K.Gaylord : 'Accurate method to determine the eigenstates of polarization in gyrotropic media' App.Opt.28, 2075-2086 (1989).

$$[a][B]'[a]^H = [B]'' \tag{H-25}$$

με $[a]$ τον μοναδιαίο πίνακα μετασχηματισμού. $[a]^H = [a]^{-1}$ όπου $[a]^H$ ο ***ανάστροφος συζυγής μιγαδικός (complex conjugate transpose)*** του $[a]$, $[B]'$ είναι ο προς διαγωνιοποίηση ερμιτιανός πίνακας και $[B]''$ ο ερμιτιανός και πάλι πίνακας με ένα του στοιχείο μηδέν. Μια προτεινόμενη συνήθης μορφή του $[a]$ είναι η:

$$[a] = \begin{pmatrix} \cos\Phi & e^{i\mathrm{A}}\sin\Phi & 0 \\ -e^{-i\mathrm{A}}\sin\Phi & \cos\Phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{H-26}$$

όπου Φ η γωνία στροφής στο μιγαδικό λεγόμενο επίπεδο και A ένα όρισμα. Αμφότερα εξαρτώνται από τα πραγματικά και φανταστικά μέρη των στοιχείων του πίνακα $[B]'$. Η διαδικασία αυτή από μαθηματική άποψη, αναδεικνύει πραγματικές ιδιοτιμές και εν γένει μιγαδικές ιδιοκαταστάσεις (ελλειπτικά πολωμένες ιδιοκαταστάσεις).

Η μέθοδος που ακολουθήσαμε στο (Κεφ. Ζ) (σχ. Ζ-87~Ζ-96) προκειμένου να διαγωνιοποιηθεί ένας συμμετρικός πίνακας (3×3) με στοιχεία πραγματικούς αριθμούς ήταν αυτή του Jacobi: Επιλέγαμε το μεγαλύτερο σε τιμή στοιχείο B_{ij} $i \neq j$ εκτός διαγωνίου και το μηδενίζαμε εκτελώντας ένα μετασχηματισμό ομοιότητας. Δηλ. μια στροφή κατά γωνία Φ περί άξονα κάθετο στο επίπεδο i, j . Την ίδια διαδικασία επαναλαμβάναμε διαδοχικά μέχρις ότου τα διαγώνια στοιχεία μηδενιζόταν στο σύνολό τους ή αποκτούσαν τιμές μικρότερες του 10^{-10} . Τότε ο συνολικός πίνακας $[a]$ της σχέσης $[a][B]'[a]^T = [\lambda]$ ήταν ο $[a] = [a]_m [a]_{m-1} \cdots [a]_2 [a]_1$ και ο $[a]^T = [a]_1^T [a]_2^T \cdots [a]_{m-1}^T [a]_m^T$ για m συνολικά διαδικασίες στροφών. Για την περίπτωση που ο πίνακας $[B]'$ είναι ερμιτιανός, ακολουθείται μια παρόμοια διαδικασία όπου όμως για κάθε μηδενισμό στοιχείου εκτός διαγωνίου θα πρέπει να προσδιοριστούν οι τιμές των A και Φ (σχ. Η-26) για 'στροφή' πλέον στο μιγαδικό επίπεδο. Η τιμή του A λαμβάνεται αυτή του ***ορίσματος (argument)*** του μιγαδικού στοιχείου $B_{ij} = \alpha + i\beta$ το οποίο θέλουμε να μηδενίσουμε. Δηλ. $\mathrm{Arg}B_{ij} = \arctan\beta/\alpha$. Όσο για τη 'στροφή' Φ στο μιγαδικό επίπεδο, ακολουθούμε την εξής διαδικασία. Έστω :

$$[B]' = \begin{pmatrix} B'_{11} & B'_{12} & B'_{13} \\ B'_{21} & B'_{22} & B'_{23} \\ B'_{31} & B'_{32} & B'_{33} \end{pmatrix} \qquad \text{(H-27)}$$

ο ερμιτιανός πίνακας που πρόκειται να διαγωνιοποιηθεί, με $B'_{21} = B'^{*}_{12}$, $B'_{31} = B'^{*}_{13}$ και $B'_{32} = B'^{*}_{23}$. $[a] = \begin{pmatrix} \cos\Phi & e^{i\mathrm{A}}\sin\Phi & 0 \\ -e^{-i\mathrm{A}}\sin\Phi & \cos\Phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ κατά τα γνωστά ο μοναδιαίος πίνακας μετασχηματισμού διαστάσεων (3×3) (σχ. Η-26). Τότε προκειμένου το στοιχείο B''_{12} του μετασχηματισθέντα πίνακα $[B]''$ να είναι ίσο με μηδέν δηλ. $B''_{12} = 0$ θα έχουμε: $[B]'' = [a][B]'[a]^{H}$. Δηλ.

$$\begin{pmatrix} B''_{11} & B''_{12} & B''_{13} \\ B''_{21} & B''_{22} & B''_{23} \\ B''_{31} & B''_{32} & B''_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\Phi & e^{i\mathrm{A}}\sin\Phi & 0 \\ -e^{-i\mathrm{A}}\sin\Phi & \cos\Phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B'_{11} & B'_{12} & B'_{13} \\ B'_{21} & B'_{22} & B'_{23} \\ B'_{31} & B'_{32} & B'_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\Phi & -e^{i\mathrm{A}}\sin\Phi & 0 \\ e^{-i\mathrm{A}}\sin\Phi & \cos\Phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{(H-28)}$$

όπου: $B''_{21} = B''^{*}_{12}$, $B''_{31} = B''^{*}_{13}$, $B''_{32} = B''^{*}_{23}$ και $|B'_{12}|e^{i\mathrm{A}} = B'_{12} = \mathrm{Re}(B'_{12}) + i\,\mathrm{Im}(B'_{12})$, δηλ. $\mathrm{A} = \arctan\dfrac{\mathrm{Im}(B'_{12})}{\mathrm{Re}(B'_{12})}$ όπως και $e^{-i\mathrm{A}} = \dfrac{B'^{*}_{12}}{|B'_{12}|}$. Μετά από πράξεις η (σχ. Η-28) γίνεται:

$$\left.\begin{aligned} \begin{pmatrix} B''_{11} & B''_{12} & B''_{13} \\ B''_{21} & B''_{22} & B''_{23} \\ B''_{31} & B''_{32} & B''_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B'_{11}\cos\Phi + B'_{21}e^{i\mathrm{A}}\sin\Phi & B'_{12}\cos\Phi + B'_{22}e^{i\mathrm{A}}\sin\Phi & B'_{13}\cos\Phi + B'_{23}e^{i\mathrm{A}}\sin\Phi \\ -B'_{11}e^{-i\mathrm{A}}\sin\Phi + B'_{21}\cos\Phi & -B'_{12}e^{-i\mathrm{A}}\sin\Phi + B'_{22}\cos\Phi & -B'_{13}e^{-i\mathrm{A}}\sin\Phi + B'_{23}\cos\Phi \\ B'_{31} & B'_{32} & B'_{33} \end{pmatrix} \cdot \\ \cdot \begin{pmatrix} \cos\Phi & -e^{i\mathrm{A}}\sin\Phi & 0 \\ e^{-i\mathrm{A}}\sin\Phi & \cos\Phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}\right\} \qquad \text{(H-29)}$$

Για να προκύψει τώρα το στοιχείο B''_{12} του πίνακα $[B]''$ θα πρέπει να πολλαπλασιάσουμε τα στοιχεία της πρώτης γραμμής με αυτά της δεύτερης στήλης των δύο πινάκων του γινομένου της τελευταίας σχέσης. Και επειδή το τελευταίο θα πρέπει να είναι ίσο με μηδέν θα έχουμε:
$-\left(B'_{11}\cos\Phi + B'_{21}e^{i\mathrm{A}}\sin\Phi\right)e^{i\mathrm{A}}\sin\Phi + \left(B'_{12}\cos\Phi + B'_{22}e^{i\mathrm{A}}\sin\Phi\right)\cos\Phi = 0$. Μετά την εκτέλεση των πράξεων και τον πολλαπλασιασμό με τον παράγοντα $e^{-i\mathrm{A}}$ βρίσκουμε:
$-\dfrac{B'_{11}}{2}\sin 2\Phi - B'_{21}e^{i\mathrm{A}}\sin^2\Phi + B'_{12}e^{-i\mathrm{A}}\cos^2\Phi + \dfrac{B'_{22}}{2}\sin 2\Phi = 0$ και επειδή :

$B'_{21} = B'^{*}_{12}$, $e^{i\mathrm{A}} = \dfrac{B'_{12}}{|B'_{12}|}$, $e^{-i\mathrm{A}} = \dfrac{B'^{*}_{12}}{|B'_{12}|}$ η παραπάνω ισότητα γίνεται:

$$\frac{1}{2}\left(B'_{11} - B'_{22}\right)\sin 2\Phi = -B'^{*}_{12} e^{i\mathrm{A}} \sin^2\Phi + B'_{12} e^{-i\mathrm{A}} \cos^2\Phi$$ και επειδή: $BB^* = |B|^2 \Rightarrow$

$$-B'^{*}_{12}\frac{B'_{12}}{|B'_{12}|}\sin^2\Phi + B'_{12}\frac{B'^{*}_{12}}{|B'_{12}|}\cos^2\Phi = \frac{1}{2}\left(B'_{11} - B'_{22}\right)\sin 2\Phi \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2}\left(B'_{11} - B'_{22}\right)\sin 2\Phi = |B'_{12}|\left(\cos^2\Phi - \sin^2\Phi\right) \Rightarrow$$

$$\tan 2\Phi = \frac{2|B'_{12}|}{B'_{11} - B'_{22}} \quad \text{ή} \quad \Phi = \frac{1}{2}\arctan\frac{2|B'_{12}|}{B'_{11} - B'_{22}} \tag{H-30}$$

Η γωνία Φ δίνει τελικά την αντίστροφη των δεικτών του ρολογιού στροφή πάνω στο μιγαδικό επίπεδο x_1, x_2 προκειμένου $B''_{12} = B''^{*}_{21} = 0$. Μετά από τις πράξεις, τα στοιχεία του πίνακα $[B]''$ εκφράζονται ως εξής:

$$\left.\begin{aligned}
B''_{11} &= B'_{11}\cos^2\Phi + B'_{22}\sin^2\Phi + 2|B'_{12}|\cos\Phi\sin\Phi \\
B''_{22} &= B'_{11}\sin^2\Phi + B'_{22}\cos^2\Phi - 2|B'_{12}|\cos\Phi\sin\Phi \\
B''_{33} &= B'_{33} \\
B''_{12} &= \left(B'_{22} - B'_{11}\right)\left(B'_{12}/|B'_{12}|\right)\cos\Phi\sin\Phi + B'_{12}\left(\cos^2\Phi - \sin^2\Phi\right) = B''^{*}_{21} = 0 \\
B''_{13} &= B'_{13}\cos\Phi + B'_{23}\left(B'_{12}/|B'_{12}|\right)\sin\Phi = B''^{*}_{31} \\
B''_{23} &= -B'_{13}\left(B'^{*}_{12}/|B'_{12}|\right)\sin\Phi + B'_{23}\cos\Phi = B''^{*}_{32}
\end{aligned}\right\} \tag{H-31}$$

Με πανομοιότυπο τρόπο, η κατά τη φορά των δεικτών του ρολογιού γωνία στροφής Θ στο μιγαδικό επίπεδο x_1, x_3 προκειμένου να μηδενιστεί το στοιχείο $B'_{13} = B''^{*}_{31}$ του πίνακα $[B]''$, θα δίνεται από τη σχέση:

$$\Theta = \frac{1}{2}\arctan\frac{2|B'_{13}|}{B'_{11} - B'_{33}} \tag{H-32}$$

όπου ο χρησιμοποιούμενος μοναδιαίος πίνακας μετασχηματισμού θα είναι:

$$[a]=\begin{pmatrix} \cos\Theta & 0 & e^{i\mathrm{A}}\sin\Theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -e^{-i\mathrm{A}}\sin\Theta & 0 & \cos\Theta \end{pmatrix} \tag{H-33}$$

και $e^{i\mathrm{A}}=\dfrac{B'_{13}}{|B'_{13}|}$, $e^{-i\mathrm{A}}=\dfrac{B'^{\,*}_{13}}{|B'_{13}|}$. Τότε τα στοιχεία του πίνακα $[B]''$ θα είναι κατά σειρά:

$$\left.\begin{aligned}
B''_{11} &= B'_{11}\cos^2\Theta + B'_{33}\sin^2\Theta + 2|B'_{13}|\cos\Theta\sin\Theta \\
B''_{22} &= B'_{22} \\
B''_{33} &= B'_{11}\sin^2\Theta + B'_{33}\cos^2\Theta - 2|B'_{13}|\cos\Theta\sin\Theta \\
B''_{12} &= B'_{12}\cos\Theta + B'^{\,*}_{23}\left(B'_{13}/|B'_{13}|\right)\sin\Theta = B''^{\,*}_{21} \\
B''_{13} &= \left(B'_{33}-B'_{11}\right)\left(B'_{13}/|B'_{13}|\right)\cos\Theta\sin\Theta + B'_{13}\left(\cos^2\Theta-\sin^2\Theta\right) = B''^{\,*}_{31} = 0 \\
B''_{23} &= -B'^{\,*}_{12}\left(B'_{13}/|B'_{13}|\right)\sin\Theta + B'_{23}\cos\Theta = B''^{\,*}_{32}
\end{aligned}\right\} \tag{H-34}$$

Με πανομοιότυπο επίσης τρόπο, η αντίθετη της φοράς των δεικτών του ρολογιού στροφή Ψ στο μιγαδικό επίπεδο x_2, x_3 προκειμένου να μηδενιστεί το στοιχείο $B''_{23}=B''^{\,*}_{32}$ του προκύπτοντος από τον μετασχηματισμό $[B]' \to [B]''$, δίνεται από την:

$$\Psi=\frac{1}{2}\arctan\frac{2|B'_{23}|}{B'_{22}-B'_{33}} \tag{H-35}$$

Ο χρησιμοποιούμενος μοναδιαίος πίνακας μετασχηματισμού $[a]$ θα δίνεται από τη σχέση:

$$[a]=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\Psi & e^{i\mathrm{A}}\sin\Psi \\ 0 & -e^{-i\mathrm{A}}\sin\Psi & \cos\Psi \end{pmatrix} \tag{H-36}$$

όπου $e^{i\mathrm{A}}=\dfrac{B'_{23}}{|B'_{23}|}$, $e^{-i\mathrm{A}}=\dfrac{B'^{\,*}_{23}}{|B'_{23}|}$. Τότε τα στοιχεία του πίνακα $[B]''$ θα είναι κατά σειρά:

$$\left.\begin{aligned}
B''_{11} &= B'_{11} \\
B''_{22} &= B'_{22}\cos^2\Psi + B'_{33}\sin^2\Psi + 2\left|B'_{23}\right|\cos\Psi\sin\Psi \\
B''_{33} &= B'_{22}\sin^2\Psi + B'_{33}\cos^2\Psi - 2\left|B'_{23}\right|\cos\Psi\sin\Psi \\
B''_{12} &= B'_{12}\cos\Psi + B'_{13}\left(B'^{*}_{23}/\left|B'_{23}\right|\right)\sin\Psi = B''^{*}_{21} \\
B''_{13} &= -B'^{*}_{12}\left(B'_{23}/\left|B'_{23}\right|\right)\sin\Psi + B'_{13}\cos\Psi = B''^{*}_{31} \\
B''_{23} &= \left(B'_{33} - B'_{22}\right)\left(B'_{23}/\left|B'_{23}\right|\right)\cos\Psi\sin\Psi + B'_{23}\left(\cos^2\Psi - \sin^2\Psi\right) = B''^{*}_{32} = 0
\end{aligned}\right\} \qquad \text{(H-37)}$$

Το πρόβλημα τώρα του υπολογισμού των ιδιοτιμών και των ιδιοκαταστάσεων για διάδοση κατά μήκος μιας κυματοκαθέτου $\mathbf{k}$ στο εσωτερικό διπλοθλαστικού και στροφικού υλικού, επιτυγχάνεται αν εκ των προτέρων εκτελέσουμε ένα πραγματικό ορθογώνιο μετασχηματισμό στον (3×3) ερμιτιανό πίνακα $[B]'$ της αδιαπερατότητας, με τελικό σκοπό να θέσουμε το πρόβλημα στο λεγόμενο σύστημα συντεταγμένων της κυματοκαθέτου $\mathbf{k}$. Στη διαδικασία αυτή οδηγούμαστε από το γεγονός ότι οι ιδιοκαταστάσεις κατά τη διεύθυνση μιας οποιασδήποτε κυματοκαθέτου $\mathbf{k}$ στο εσωτερικό ενός κρυστάλλου είναι δύο. Πράγματι πρόκειται για τις ορθοκανονικές πλέον ιδιοκαταστάσεις $\mathbf{D}_1, \mathbf{D}_2$ (με αντίστοιχες πραγματικές ιδιοτιμές $1/n_1^2, 1/n_2^2$). Αυτός είναι ο λόγος που το πρόβλημα του υπολογισμού των ιδιοτιμών, ανάγεται τελικά σε πρόβλημα διαγωνιοποίησης ενός πίνακα (2×2) δηλ. σε πρόβλημα δύο διαστάσεων.

Την αναγωγή του πίνακα της αδιαπερατότητας (με πραγματικά στοιχεία) στο σ.σ. της κυματοκαθέτου $\mathbf{k}$ είχαμε μελετήσει εκτεταμένα στο (Κεφ. Ζ). Εκεί, προκειμένου το σ.σ. των κυρίων αξόνων x_1, x_2, x_3 να μετασχηματιστεί στο σ.σ. x''_1, x''_2, x''_3 της $\mathbf{k}$, εκτελέσαμε δύο μετασχηματισμούς (Σχ. Ζ-9), όπου μεταξύ των συντεταγμένων υφίσταται η (σχ. Ζ-49). Επειδή για τον τελικό πίνακα μετασχηματισμού:

$[A] = \begin{pmatrix} \cos\phi_k\cos\theta_k & -\sin\phi_k & \cos\phi_k\sin\theta_k \\ \sin\phi_k\cos\theta_k & \cos\phi_k & \sin\phi_k\sin\theta_k \\ -\sin\theta_k & 0 & \cos\theta_k \end{pmatrix}$ ισχύει η σχέση $[A]^{-1} = [A]^T$ τότε η (σχ. Ζ-49) ανάγεται στην:

$$\begin{pmatrix} x''_1 \\ x''_2 \\ x''_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\phi_k\cos\theta_k & \sin\phi_k\cos\theta_k & -\sin\theta_k \\ -\sin\phi_k & \cos\phi_k & 0 \\ \cos\phi_k\sin\theta_k & \sin\phi_k\sin\theta_k & \cos\theta_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \qquad \text{(H-38)}$$

Δηλ. εκφράζουμε τις νέες συντεταγμένες συναρτήσει των παλαιών. Όπου:

$$[A]^T = \begin{pmatrix} \cos\phi_k \cos\theta_k & \sin\phi_k \cos\theta_k & -\sin\theta_k \\ -\sin\phi_k & \cos\phi_k & 0 \\ \cos\phi_k \sin\theta_k & \sin\phi_k \sin\theta_k & \cos\theta_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \qquad \text{(H-39)}$$

Μας είναι όμως γνωστός* ο τρόπος μετασχηματισμού των στοιχείων του πίνακα του τανυστή της αδιαπερατότητας μεταξύ των συστημάτων x_1'', x_2'', x_3'' και x_1, x_2, x_3:

$$B_{ij}'' = a_{ik} a_{jl} B_{kl}' \qquad \text{(H-40)}$$

όπου τα συνημίτονα κατεύθυνσης a_{ik}, a_{jl} δίνονται από τα στοιχεία του πίνακα $[A]^T$ της (σχ. Η-39). B_{kl}' είναι τα στοιχεία του ερμιτιανού πίνακα της αδιαπερατότητας στο σ.σ. x_1, x_2, x_3 (σχ. Η-7) και B_{ij}'' τα στοιχεία στο σ.σ. της **k** δηλ. το x_1'', x_2'', x_3''. Όμως οι διευθύνσεις του x_3 και της **k** συμπίπτουν και μας ενδιαφέρει ο υπολογισμός των ιδιοκαταστάσεων και των ιδιοτιμών κατά την διεύθυνση της **k** στο μιγαδικό επίπεδο το κάθετο σ' αυτήν. Τότε διαδικασίες διαγωνιοποίησης θα εφαρμόσουμε πλέον στα στοιχεία του (2×2) πίνακα:

$$[B]'' = \begin{pmatrix} B_{11}'' & B_{12}'' \\ B_{12}''^{*} & B_{22}'' \end{pmatrix} \qquad \text{(H-41)}$$

όπου τα στοιχεία του υπολογίζονται με τη βοήθεια των (σχ. Η-39,40). Είναι εύκολο ν' αποδειχθεί ότι ο ίδιος είναι ερμιτιανός. Αναλυτικά θα έχουμε:

$$\begin{aligned} B_{11}'' &= a_{1k} a_{1l} B_{kl}' = a_{11} a_{1l} B_{1l}' + a_{12} a_{1l} B_{2l}' + a_{13} a_{1l} B_{3l}' = \\ &= a_{11} a_{11} B_{11}' + a_{11} a_{12} B_{12}' + a_{11} a_{13} B_{13}' + \\ &+ a_{12} a_{11} B_{21}' + a_{12} a_{12} B_{22}' + a_{12} a_{13} B_{23}' + \\ &+ a_{13} a_{11} B_{31}' + a_{13} a_{12} B_{32}' + a_{13} a_{13} B_{33}' \quad \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B_{11}'' = &\cos^2\theta_k \cos^2\phi_k B_{11}' + \cos^2\theta_k \cos\phi_k \sin\phi_k B_{12}' - \cos\theta_k \cos\phi_k \sin\theta_k B_{13}' + \\ &+ \cos^2\theta_k \sin\phi_k \cos\phi_k B_{12}'^{*} + \cos^2\theta_k \sin^2\phi_k B_{22}' - \cos\theta_k \sin\phi_k \sin\theta_k B_{23}' - \\ &- \sin\theta_k \cos\theta_k \cos\phi_k B_{13}'^{*} - \cos\theta_k \sin\phi_k \sin\theta_k B_{23}'^{*} + \sin^2\theta_k B_{33}' \quad \Rightarrow \end{aligned}$$

* J. F. Nye: 'Physical Properties of Crystals' Clarendon Press – Oxford (1989) ((§ 2.2) (22)).

$$\left.\begin{aligned} B''_{11} &= \left(B'_{11}\cos^2\phi_k + B'_{22}\sin^2\phi_k\right)\cos^2\theta_k + B'_{33}\sin^2\theta_k + 2\,\mathrm{Re}\left(B'_{12}\right)\cos^2\theta_k\sin\phi_k\cos\phi_k - \\ &- 2\cos\theta_k\sin\theta_k\left[\mathrm{Re}\left(B'_{13}\right)\cos\phi_k + \mathrm{Re}\left(B'_{23}\right)\sin\phi_k\right] \end{aligned}\right\} \quad \text{(H-42)}$$

Όπου χρησιμοποιήσαμε τις σχέσεις:

$$2\,\mathrm{Re}\left(B'_{12}\right) = B'_{12} + B'^{\,*}_{12} \;,\;\; 2\,\mathrm{Re}\left(B'_{13}\right) = B'_{13} + B'^{\,*}_{13} \;,\;\; 2\,\mathrm{Re}\left(B'_{23}\right) = B'_{23} + B'^{\,*}_{23}$$

$$\begin{aligned} B''_{22} &= a_{2k}a_{2l}B'_{kl} = a_{21}a_{2l}B'_{1l} + a_{22}a_{2l}B'_{2l} + a_{23}a_{2l}B'_{3l} = \\ &= a_{21}a_{21}B'_{11} + a_{21}a_{22}B'_{12} + a_{21}a_{23}B'_{13} + \\ &+ a_{22}a_{21}B'_{21} + a_{22}a_{22}B'_{22} + a_{22}a_{23}B'_{23} + \\ &+ a_{23}a_{21}B'_{31} + a_{23}a_{22}B'_{32} + a_{23}a_{23}B'_{33} \end{aligned}$$

Και επειδή στην παραπάνω σχέση $a_{23} = 0$ (σχ. Η-39) $\Rightarrow$

$$B''_{22} = \sin^2\phi_k B'_{11} - \sin\phi_k\cos\phi_k B'_{12} - \sin\phi_k\cos\phi_k B'^{\,*}_{12} + \cos^2\phi_k B'_{22} \;\Rightarrow$$

$$B''_{22} = B'_{11}\sin^2\phi_k + B'_{22}\cos^2\phi_k - 2\,\mathrm{Re}\left(B'_{12}\right)\sin\phi_k\cos\phi_k \qquad \text{(H-43)}$$

όπου χρησιμοποιήσαμε τη σχέση: $2\,\mathrm{Re}\left(B'_{12}\right) = B'_{12} + B'^{\,*}_{12}$.

$$\begin{aligned} B''_{12} &= a_{1k}a_{2l}B'_{kl} = a_{11}a_{2l}B'_{1l} + a_{12}a_{2l}B'_{2l} + a_{13}a_{2l}B'_{3l} = \\ &= a_{11}a_{21}B'_{11} + a_{11}a_{22}B'_{12} + a_{11}a_{23}B'_{13} + \\ &+ a_{12}a_{21}B'_{21} + a_{12}a_{22}B'_{22} + a_{12}a_{23}B'_{23} + \\ &+ a_{13}a_{21}B'_{31} + a_{13}a_{22}B'_{32} + a_{13}a_{23}B'_{33} \end{aligned}$$

Και επειδή στην παραπάνω σχέση $a_{23} = 0$ (σχ. Η-39) $\Rightarrow$

$$\begin{aligned} B''_{12} &= -\cos\theta_k\cos\phi_k\sin\phi_k B'_{11} + \cos\theta_k\cos^2\phi_k B'_{12} - \cos\theta_k\sin^2\phi_k B'^{\,*}_{12} + \\ &+ \cos\theta_k\sin\phi_k\cos\phi_k B'_{22} + \sin\theta_k\sin\phi_k B'^{\,*}_{13} - \sin\theta_k\cos\phi_k B'^{\,*}_{23} \;\Rightarrow \end{aligned}$$

$$\left.\begin{aligned} B''_{12} &= \left(B'_{22} - B'_{11}\right)\cos\theta_k\cos\phi_k\sin\phi_k + \cos\theta_k\left(B'_{12}\cos^2\phi_k - B'^{\,*}_{12}\sin^2\phi_k\right) + \\ &+ \sin\theta_k\left(B'^{\,*}_{13}\sin\phi_k - B'^{\,*}_{23}\cos\phi_k\right) \end{aligned}\right\} \quad \text{(H-44)}$$

Με παρόμοιο τρόπο επίσης αποδεικνύεται ότι $B''_{21} = B''^{*}_{12}$. Δηλ. ο πίνακας $[B]''$ της (σχ. Η-41) είναι ερμιτιανός. Ο τρόπος διαγωνιοποίησής επιτυγχάνεται με έναν μετασχηματισμό ομοιότητας της μορφής: $[a][B]''[a]^{H} = [B]'''$ όπου ο μοναδιαίος (unitary) πίνακας μετασχηματισμού είναι ο:

$$[a] = \begin{pmatrix} \cos\Phi & e^{i\mathrm{A}}\sin\Phi \\ -e^{-i\mathrm{A}}\sin\Phi & \cos\Phi \end{pmatrix} \tag{H-45}$$

Κατά τα γνωστά $[a]^{-1} = [a]^{H}$ και $[B]'''$ ο διαγωνιοποιημένος πίνακας. Δηλ.

$$[B'''] = \begin{pmatrix} B'''_{11} & B'''_{12} \\ B'''^{*}_{12} & B'''_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\Phi & e^{i\mathrm{A}}\sin\Phi \\ -e^{-i\mathrm{A}}\sin\Phi & \cos\Phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B''_{11} & B''_{12} \\ B''^{*}_{12} & B''_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\Phi & -e^{i\mathrm{A}}\sin\Phi \\ e^{-i\mathrm{A}}\sin\Phi & \cos\Phi \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} B''_{11}\cos\Phi + B''^{*}_{12}e^{i\mathrm{A}}\sin\Phi & B''_{12}\cos\Phi + B''_{22}e^{i\mathrm{A}}\sin\Phi \\ -B''_{11}e^{-i\mathrm{A}}\sin\Phi + B''^{*}_{12}\cos\Phi & -B''_{12}e^{-i\mathrm{A}}\sin\Phi + B''_{22}\cos\Phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\Phi & -e^{i\mathrm{A}}\sin\Phi \\ e^{-i\mathrm{A}}\sin\Phi & \cos\Phi \end{pmatrix} =$$

$= \begin{pmatrix} B'''_{11} & B'''_{12} \\ B'''^{*}_{12} & B'''_{22} \end{pmatrix}$. Όπου:

$$\left.\begin{aligned} B'''_{11} &= \left(B''_{11}\cos\Phi + B''^{*}_{12}e^{i\mathrm{A}}\sin\Phi\right)\cos\Phi + \\ &+ \left(B''_{12}\cos\Phi + B''_{22}e^{i\mathrm{A}}\sin\Phi\right)e^{-i\mathrm{A}}\sin\Phi = 1/n_1^2 \end{aligned}\right\} \tag{H-46}$$

$$\left.\begin{aligned} B'''_{12} &= -\left(B''_{11}\cos\Phi + B''^{*}_{12}e^{i\mathrm{A}}\sin\Phi\right)e^{i\mathrm{A}}\sin\Phi + \\ &+ \left(B''_{12}\cos\Phi + B''_{22}e^{i\mathrm{A}}\sin\Phi\right)\cos\Phi = 0 \end{aligned}\right\} \tag{H-47}$$

$$\left.\begin{aligned} B'''^{*}_{12} &= \left(-B''_{11}e^{-i\mathrm{A}}\sin\Phi + B''^{*}_{12}\cos\Phi\right)\cos\Phi + \\ &+ \left(-B''_{12}e^{-i\mathrm{A}}\sin\Phi + B''_{22}\cos\Phi\right)e^{-i\mathrm{A}}\sin\Phi = 0 \end{aligned}\right\} \tag{H-48}$$

$$\left.\begin{aligned} B'''_{22} &= -\left(-B''_{11}e^{-i\mathrm{A}}\sin\Phi + B''^{*}_{12}\cos\Phi\right)e^{i\mathrm{A}}\sin\Phi + \\ &+ \left(-B''_{12}e^{-i\mathrm{A}}\sin\Phi + B''_{22}\cos\Phi\right)\cos\Phi = 1/n_2^2 \end{aligned}\right\} \tag{H-49}$$

Υπολογισμός της στροφής Φ *στο μιγαδικό επίπεδο* x_1'', x_2'' *με σκοπό την διαγωνιοποίηση του πίνακα* $[B]''$

Με βάση τα όσα αναφέραμε προηγουμένως, θα πρέπει $B_{12}''' = B_{12}'''^{*} = 0$. Δηλ. θα πρέπει να ισχύουν οι (σχ. Η-47,48). Αν λοιπόν πολλαπλασιάσουμε τη (σχ. Η-47) με τον παράγοντα $e^{-i\mathrm{A}}$ βρίσκουμε:

$$-B_{11}'' \sin\Phi\cos\Phi - B_{12}''^{*} e^{i\mathrm{A}} \sin^2\Phi + B_{12}'' e^{-i\mathrm{A}} \cos^2\Phi + B_{22}'' \sin\Phi\cos\Phi = 0 \Rightarrow$$

$$-\frac{B_{11}''}{2}\sin 2\Phi - B_{12}''^{*} e^{i\mathrm{A}} \sin^2\Phi + B_{12}'' e^{-i\mathrm{A}} \cos^2\Phi + \frac{B_{22}''}{2}\sin 2\Phi = 0$$

και με δεδομένες τις σχέσεις: $e^{i\mathrm{A}} = \dfrac{B_{12}''}{|B_{12}''|}$, $e^{-i\mathrm{A}} = \dfrac{B_{12}''^{*}}{|B_{12}''|}$, $zz^{*} = |z|^2$ βρίσκουμε:

$$\frac{1}{2}\left(B_{11}'' - B_{22}''\right)\sin 2\Phi + \frac{B_{12}''^{*} B_{12}''}{|B_{12}''|}\sin^2\Phi - \frac{B_{12}''^{*} B_{12}''}{|B_{12}''|}\cos^2\Phi = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2}\left(B_{11}'' - B_{22}''\right)\sin 2\Phi = \operatorname{sgn}\operatorname{Re}\left(B_{12}''\right)|B_{12}''|\left(\cos^2\Phi - \sin^2\Phi\right) = \operatorname{sgn}\operatorname{Re}\left(B_{12}''\right)|B_{12}''|\cos 2\Phi \Rightarrow$$

$$\tan 2\Phi = \operatorname{sgn}\operatorname{Re}\left(B_{12}''\right)\frac{2|B_{12}''|}{B_{11}'' - B_{22}''} \qquad \text{(Η-50)}$$

Σημείωση

Για την παραγωγή της (σχ. Η-50) ο λόγος $B_{12}''^{*} B_{12}'' / |B_{12}''|$ θα πρέπει ν' αντικατασταθεί από τη σχέση: $B_{12}''^{*} B_{12}'' / |B_{12}''| = |B_{12}''|^2 / |B_{12}''| = \operatorname{sgn}\operatorname{Re}\left(B_{12}''\right)|B_{12}''|$ όπου: $\operatorname{sgn}\operatorname{Re}\left(B_{12}''\right) \rightarrow$ (το πρόσημο του πραγματικού μέρους του μιγαδικού αριθμού B_{12}''). Η σχέση αυτή, αποκαθιστά την απροσδιοριστία όσον αφορά το πρόσημο του πραγματικού μέρους του μιγαδικού αριθμού B_{12}'' για τη στροφή Φ στο μιγαδικό επίπεδο x_1'', x_2''. Κάτω από αυτές τις συνθήκες, όταν το στοιχείο B_{12}'' είναι πραγματικός αριθμός (ή το πραγματικό μέρος ενός μιγαδικού) η γωνία Φ θα πρέπει να ταυτίζεται με τη γνωστή αζιμουθιακή γωνία $\beta \equiv \psi_1$. Δηλ. την στροφή που λαμβάνει χώρα στο

πραγματικό πλέον επίπεδο x_1'', x_2'' (βλ. σχ. Η-59), όπου τότε $\operatorname{sgn}\operatorname{Re}\left(B_{12}''\right)\left|B_{12}''\right| \equiv B_{12}''$. Το γεγονός αυτό λαμβάνεται υπόψη μας και στα επόμενα, κατά τη διαδικασία υπολογισμού των ιδιοτιμών $1/n_1^2, 1/n_2^2$ (σχ. Η-51,52).

Υπολογισμός των δεικτών διάθλασης n_1, n_2

Από το στοιχείο B_{11}''' του πίνακα $[B]'''$ που δίνεται από τη (σχ. Η-46) έχουμε:

$$\left(B_{11}''\cos\Phi + B_{12}''^{*}e^{i\mathrm{A}}\sin\Phi\right)\cos\Phi + \left(B_{12}''\cos\Phi + B_{22}''e^{i\mathrm{A}}\sin\Phi\right)e^{-i\mathrm{A}}\sin\Phi = 1/n_1^2 \;\Rightarrow$$

$$B_{11}''\cos^2\Phi + B_{12}''^{*}e^{i\mathrm{A}}\sin\Phi\cos\Phi + B_{12}''e^{-i\mathrm{A}}\cos\Phi\sin\Phi + B_{22}''\sin^2\Phi = 1/n_1^2$$

και με δεδομένες τις σχέσεις: $e^{i\mathrm{A}} = \dfrac{B_{12}''}{\left|B_{12}''\right|}$, $e^{-i\mathrm{A}} = \dfrac{B_{12}''^{*}}{\left|B_{12}''\right|}$, $zz^{*} = |z|^2$

$$B_{11}''\cos^2\Phi + B_{22}''\sin^2\Phi + \frac{B_{12}''^{*}B_{12}''}{\left|B_{12}''\right|}\sin\Phi\cos\Phi + \frac{B_{12}''B_{12}''^{*}}{\left|B_{12}''\right|}\sin\Phi\cos\Phi = 1/n_1^2 \;\Rightarrow$$

$$\frac{1}{n_1^2} = B_{11}''\cos^2\Phi + B_{22}''\sin^2\Phi + 2\operatorname{sgn}\operatorname{Re}\left(B_{12}''\right)\left|B_{12}''\right|\sin\Phi\cos\Phi \qquad \text{(H-51)}$$

Από το στοιχείο B_{22}''' του πίνακα $[B]'''$ που δίνεται από τη (σχ. Η-49) έχουμε:

$$B_{22}''' = -\left(-B_{11}''e^{-i\mathrm{A}}\sin\Phi + B_{12}''^{*}\cos\Phi\right)e^{i\mathrm{A}}\sin\Phi + \left(-B_{12}''e^{-i\mathrm{A}}\sin\Phi + B_{22}''\cos\Phi\right)\cos\Phi = 1/n_2^2 \Rightarrow$$

$$B_{11}''\sin^2\Phi + B_{22}''\cos^2\Phi - \frac{B_{12}''^{*}B_{12}''}{\left|B_{12}''\right|}\sin\Phi\cos\Phi - \frac{B_{12}''B_{12}''^{*}}{\left|B_{12}''\right|}\sin\Phi\cos\Phi = 1/n_2^2 \;\Rightarrow$$

$$\frac{1}{n_2^2} = B_{11}''\sin^2\Phi + B_{22}''\cos^2\Phi - 2\operatorname{sgn}\operatorname{Re}\left(B_{12}''\right)\left|B_{12}''\right|\sin\Phi\cos\Phi \qquad \text{(H-52)}$$

Υπολογισμός των ιδιοκαταστάσεων (καταστάσεων πόλωσης)

Από τη σχέση: $[a][B]''[a]^H = [B]'''$ επειδή $[a]^H = [a]^{-1}$, πολλαπλασιάζοντας από τα αριστερά τα δύο μέλη της με τον πίνακα $[a]^H$ θα έχουμε:

$$[B]''[a]^H = [a]^H [B]''' = [a]^H \begin{pmatrix} 1/n_1^2 & 0 \\ 0 & 1/n_2^2 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} B''_{11} & B''_{12} \\ B''^{*}_{12} & B''_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\Phi & -e^{i\mathrm{A}}\sin\Phi \\ e^{-i\mathrm{A}}\sin\Phi & \cos\Phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\Phi & -e^{i\mathrm{A}}\sin\Phi \\ e^{-i\mathrm{A}}\sin\Phi & \cos\Phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/n_1^2 & 0 \\ 0 & 1/n_2^2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{n_1^2}\cos\Phi & -\frac{1}{n_2^2}e^{i\mathrm{A}}\sin\Phi \\ \frac{1}{n_1^2}e^{-i\mathrm{A}}\sin\Phi & \frac{1}{n_2^2}\cos\Phi \end{pmatrix} = \frac{1}{n_1^2}\begin{pmatrix} \cos\Phi & 0 \\ e^{-i\mathrm{A}}\sin\Phi & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{n_2^2}\begin{pmatrix} -e^{i\mathrm{A}}\sin\Phi & 0 \\ \cos\Phi & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\mathbf{D}_1 = \begin{pmatrix} \cos\Phi \\ e^{-i\mathrm{A}}\sin\Phi \end{pmatrix} \quad , \quad \mathbf{D}_2 = \begin{pmatrix} -e^{i\mathrm{A}}\sin\Phi \\ \cos\Phi \end{pmatrix} \qquad \text{(H-53)}$$

όπου: $\mathrm{A} = \arctan\dfrac{\mathrm{Im}(B''_{12})}{\mathrm{Re}(B''_{12})}$ και $\tan 2\Phi = \mathrm{sgn}\,\mathrm{Re}(B''_{12})\dfrac{2|B''_{12}|}{B''_{11} - B''_{22}}$

Πρόκειται για τα (δεξιά) ιδιοδιανύσματα (ιδιοκαταστάσεις) σε μορφή στηλών του πίνακα $[B]''$, μιγαδικά συζυγή των αριστερών ιδιοδιανυσμάτων σε μορφή γραμμών. Τα τελευταία υπολογίζονται ως εξής:

Από τη (σχ. H-45): $[a][B]''[a]^H = [B]'''$ επειδή $[a]^H = [a]^{-1}$, πολλαπλασιάζοντας από τα δεξιά τα δύο μέλη της με τον πίνακα $[a]$ θα έχουμε:

$$[a][B]'' = [B]'''[a] = \begin{pmatrix} 1/n_1^2 & 0 \\ 0 & 1/n_2^2 \end{pmatrix}[a] \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} \cos\Phi & e^{i\mathrm{A}}\sin\Phi \\ -e^{-i\mathrm{A}}\sin\Phi & \cos\Phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B''_{11} & B''_{12} \\ B''^{*}_{12} & B''_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/n_1^2 & 0 \\ 0 & 1/n_2^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\Phi & e^{i\mathrm{A}}\sin\Phi \\ -e^{-i\mathrm{A}}\sin\Phi & \cos\Phi \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{n_1^2}\cos\Phi & \frac{1}{n_1^2}e^{i\mathrm{A}}\sin\Phi \\ -\frac{1}{n_2^2}e^{-i\mathrm{A}}\sin\Phi & \frac{1}{n_2^2}\cos\Phi \end{pmatrix} = \frac{1}{n_1^2}\begin{pmatrix} \cos\Phi & e^{i\mathrm{A}}\sin\Phi \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{n_2^2}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -e^{-i\mathrm{A}}\sin\Phi & \cos\Phi \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\mathbf{D}_1 = \begin{pmatrix} \cos\Phi & e^{i\mathrm{A}}\sin\Phi \end{pmatrix} \quad , \quad \mathbf{D}_2 = \begin{pmatrix} -e^{-i\mathrm{A}}\sin\Phi & \cos\Phi \end{pmatrix} \qquad \text{(H-54)}$$

Πρόκειται για τα (αριστερά) ιδιοδιανύσματα (ιδιοκαταστάσεις) σε μορφή γραμμών του πίνακα $[B]''$, μιγαδικά συζυγή των δεξιών ιδιοδιανυσμάτων σε μορφή στηλών που δίνονται από τις (σχ. Η-53). Από τη μορφή των (σχ. Η-53 ή Η-54) διαπιστώνουμε ότι μεταξύ των $\mathbf{D}_1, \mathbf{D}_2$ υφίσταται σχέση ορθογωνιότητος. Πράγματι:

$$\mathbf{D}_1 \cdot \mathbf{D}_2^H = \begin{pmatrix} \cos\Phi \\ e^{-i\mathrm{A}}\sin\Phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -e^{-i\mathrm{A}}\sin\Phi & \cos\Phi \end{pmatrix} = 0 \qquad \text{(H-55)}$$

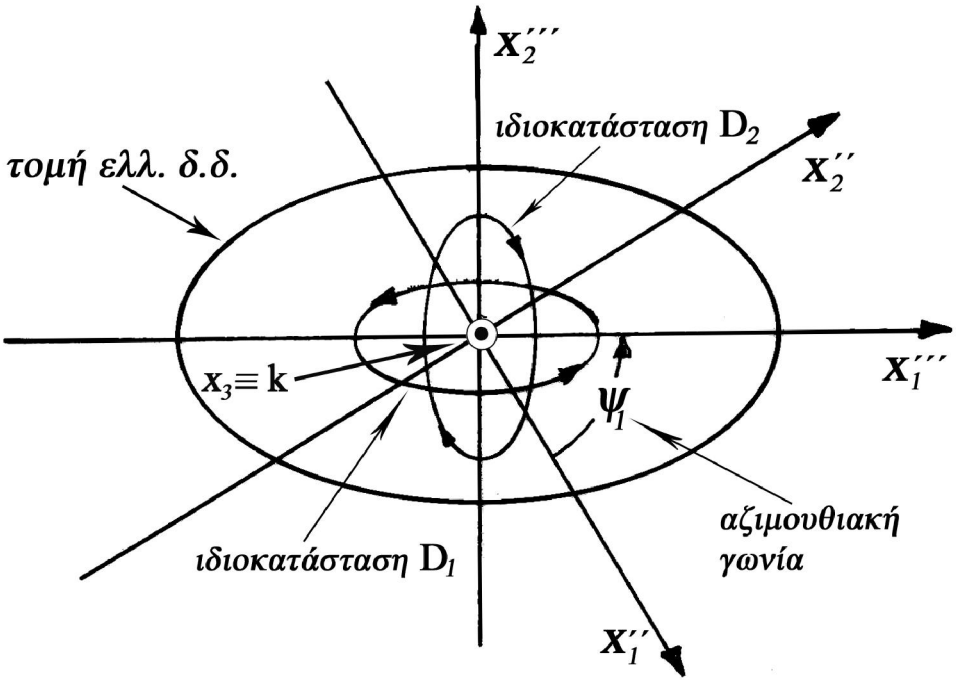
Προσδιορισμός των χαρακτηριστικών των καταστάσεων πόλωσης, των ιδιοκαταστάσεων $\mathbf{D}_1, \mathbf{D}_2$

Τα στοιχεία που απαιτούνται προκειμένου να περιγραφούν πλήρως οι εν γένει ελλειπτικά πολωμένες ιδιοκαταστάσεις $\mathbf{D}_1, \mathbf{D}_2$ όπως ήδη αναφέραμε είναι: α) Η ***αζιμουθιακή γωνία (azimuthal angle)*** ή ***αζιμούθιο*** (η γωνία που σχηματίζει ο μεγάλος άξονας της έλλειψης σε σχέση με ένα συγκεκριμένο άξονα ενός σ.σ.). β) Η ***ελλειπτικότητα (ellipticity)*** (ο λόγος του μικρού προς τον μεγάλο άξονα της έλλειψης) και γ) Η ***στροφικότητα (handedness)*** (αριστερόστροφη ή δεξιόστροφη), (δηλ. η φορά περιστροφής του άκρου του διανύσματος $\mathbf{D}$ για φως που έρχεται προς τα εμάς). Οι δύο ορθογώνιες μεταξύ τους (αυστηρότερα ορθοκανονικές) ιδιοκαταστάσεις , περιγράφονται από τα ίδια στοιχεία (όσον αφορά την ελλειπτικότητα) εκτός του ότι έχουν αντίθετες στροφικότητες. Η αζιμουθιακή γωνία ψ_1 στη συγκεκριμένη μελέτη μας, είναι αυτή που ορίζεται από τη διεύθυνση x_1''' του μεγάλου άξονα της ιδιοκατάστασης $\mathbf{D}_1$ (ελλειπτικά πολωμένης), με τον άξονα x_1'' (Σχ. Η-4). Εδώ το σ.σ. x_1'', x_2'' εννοείται στον πραγματικό και όχι στον μιγαδικό χώρο, δηλ. είναι το σ.σ. ως προς το οποίο εκφράζεται και το ελλειψοειδές των δ.δ., του οποίου επιζητούμε την τομή (εν γένει έλλειψη) την κάθετη στην κυματοκάθετη $\mathbf{k}$.

Επομένως προκειμένου να υπολογίσουμε τη γωνία στροφής ψ_1, θα εκτελέσουμε ένα μετασχηματισμό μεταξύ των συστημάτων x_1'', x_2'' και x_1''', x_2''' στα πραγματικά όμως μέρη των στοιχείων του ερμιτιανού πίνακα $[B]''$ που δίνεται από τη (σχ. Η-41). Δηλ. του :

$$\mathrm{Re}\left(\left[B\right]''\right)=\mathrm{Re}\left(\begin{pmatrix} B''_{11} & B''_{12} \\ B''^{*}_{12} & B''_{22} \end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix} B''_{11} & \mathrm{Re}\left(B''_{12}\right) \\ \mathrm{Re}\left(B''^{*}_{12}\right) & B''_{22} \end{pmatrix} \qquad \text{(H-56)}$$

Από τη (σχ. Η-56) μπορούμε να βρούμε την εξίσωση της τομής του ελλ. των δ.δ. την κάθετη στην **k** στο σ.σ. x''_1, x''_2. Θα είναι:



(Σχ. Η-4)

$$\begin{pmatrix} x''_1 & x''_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} B''_{11} & \mathrm{Re}\left(B''_{12}\right) \\ \mathrm{Re}\left(B''^{*}_{12}\right) & B''_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x''_1 \\ x''_2 \end{pmatrix}=1 \qquad \text{(H-57)}$$

Και επειδή: $\mathrm{Re}\left(B''_{12}\right)=\mathrm{Re}\left(B''^{*}_{12}\right)$ τελικά βρίσκουμε:

$$B''_{11}x''^{2}_{1}+B''_{22}x''^{2}_{2}+2\,\mathrm{Re}\left(B''_{12}\right)x''_1x''_2=1 \qquad \text{(H-58)}$$

Η εξάλειψη του όρου του γινομένου $x''_1x''_2$ από τη (σχ. Η-58) μέσω μετασχηματισμού στο σ.σ. x'''_1, x'''_2 με στροφή κατά γωνία ψ_1, αντιστοιχεί στη διαγωνιοποίηση ουσιαστικά του πίνακα που δίνεται από τη (σχ. Η-56). Από τη διαδικασία αυτή βρίσκουμε κατά τα γνωστά ότι η γωνία ψ_1 θα είναι:

$$\tan 2\psi_1 = \frac{2\,\mathrm{Re}\left(B''_{12}\right)}{B'_{11} - B''_{22}} \qquad \text{(H-59)}$$

Η τιμή της ψ_1 προκύπτει επίσης και απ' ευθείας από τη (σχ. Η-50), αρκεί ν' αντικατασταθεί ο όρος $\mathrm{sgn}\,\mathrm{Re}\left(B''_{12}\right)\left|B''_{12}\right|$ με τον όρο $\mathrm{Re}\left(B''_{12}\right)$ ή τον B''_{12} όταν ο τελευταίος είναι πραγματικός αριθμός. Επειδή τέλος οι ιδιοκαταστάσεις $\mathbf{D}_1, \mathbf{D}_2$ είναι όπως αποδείξαμε ορθογώνιες, το αζιμούθιο της $\mathbf{D}_2$ ως προς τον άξονα x''_1 θα είναι:

$$\psi_2 = \psi_1 + \pi/2 \qquad \text{(H-60)}$$

Ο προσδιορισμός των αζιμουθιακών γωνιών ψ και των ελλειπτικών γωνιών ε, γίνεται και μέσω των (σχ. Η-74,76). Οι τελευταίες προκύπτουν από τις γνωστές (σχ. 1.20,23) της (Άσκ.1-Λυμένης), με τη βοήθεια των ***μιγαδικών μεταβλητών πόλωσης (complex polarization variables)*** χ, όπως θα δούμε στα επόμενα, ή μέσω του λογισμού Jones (ΠΑΡ/ΜΑ 5).

Παράσταση των καταστάσεων πόλωσης του φωτός μέσω των μιγαδικών μεταβλητών πόλωσης[*]

Στο (ΠΑΡ/ΜΑ 5) μελετούμε τον τρόπο με τον οποίο είναι δυνατόν να περιγραφεί μια κατάσταση πόλωσης με τη βοήθεια του λογισμού Jones. Η τελευταία προσδιορίζεται από το διάνυσμα:

$$\mathbf{E} = \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \end{pmatrix} = e^{i(\omega t - kt)} \begin{pmatrix} A_x e^{i\phi_x} \\ A_y e^{i\phi_y} \end{pmatrix} \qquad \text{(ΠΑΡ/ΜΑ 5 (σχ. 5.3,4))} \qquad \text{(H-61)}$$

όπου A_x, A_y τα πλάτη και ϕ_x, ϕ_y οι φάσεις των συνιστωσών στο καρτεσιανό σ.σ. x, y (στην πραγματικότητα E_x, E_y) με z τη διεύθυνση διάδοσης. Εννοούμε ότι έτσι περιγράφεται ένα επίπεδο, μονοχρωματικό και ομογενές Τ.Ε. (Transverse Electromagnetic) μέτωπο κύματος. Για την περίπτωση βέβαια που δεν μας ενδιαφέρει η χρονική (ωt) ή η χωρική (kz) μεταβολή των δύο ορθογωνίων συνιστωσών του ή ακόμα και μία γενική φάση αναφοράς e^{iq} ίδια και για τις δύο συνιστώσες τότε: η (σχ. Η-61) απλοποιείται στην:

---

[*] R.M.A. Azam, N.M. Bashara: 'Ellipsometry and Polarized Light'. North Holland Pub. Co. Amsterdam (1977).

$$\mathbf{E} = \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_x e^{i\phi_x} \\ A_y e^{i\phi_y} \end{pmatrix} \quad \text{(ΠΑΡ/ΜΑ 5 (σχ. 5.5))} \qquad \text{(Η-62)}$$

Στην περίπτωση που θέλουμε να κανονικοποιήσουμε τη (σχ. Η-62) έτσι ώστε η ένταση του φωτός ((σχ. 5.8), ΠΑΡ/ΜΑ 5) να είναι ίση με τη μονάδα, τότε το **E** γράφεται με τη μορφή ((σχ. 5.10), ΠΑΡ/ΜΑ 5):

$$\mathbf{E} = \begin{pmatrix} \cos a e^{-i\frac{\phi}{2}} \\ \sin a e^{i\frac{\phi}{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos a \\ \sin a e^{i\phi} \end{pmatrix} \qquad \text{(Η-63)}$$

$$\cos a = A_x \Big/ \sqrt{A_x^2 + A_y^2} \ , \ \sin a = A_y \Big/ \sqrt{A_x^2 + A_y^2} \ , \ \tan a = A_y / A_x \qquad \text{(Η-64)}$$

και $\phi = \phi_y - \phi_x$, $0 \le a \le \pi/2$, $0 \le \phi < 2\pi$. Στη γενικότερη περίπτωση η (σχ. Η-63) περιγράφει ένα ελλειπτικά πολωμένο φως του οποίου τα χαρακτηριστικά στοιχεία είναι: α) Η αζιμουθιακή γωνία ψ που εκφράζει τη γωνία μεταξύ του άξονα E_x και του μεγάλου άξονα της έλλειψης του ελλειπτικά πολωμένου φωτός και β) Η ελλειπτική γωνία ε που ορίζεται από τη σχέση:

$$\tan \varepsilon = \pm A_\eta / A_\xi \qquad \text{(Άσκ. 1-Λυμένη, (σχ. 1.19) (Σχ. 1.2))} \qquad \text{(Η-65)}$$

όπου $A_\eta / A_\xi = e$ ο λόγος (των πλατών) του μικρού προς τον μεγάλο ημιάξονα της έλλειψης και που ονομάζεται ***ελλειπτικότητα (ellipticity)***.

Με βάση τους ορισμούς αυτούς αποδεικνύεται (βλ. Άσκ.1-Λυμένη) ότι:

$$\tan 2\psi = \tan 2a \cos \phi \quad \text{(Άσκ.1-Λυμένη, (σχ. 1.20))} \qquad \text{(Η-66)}$$

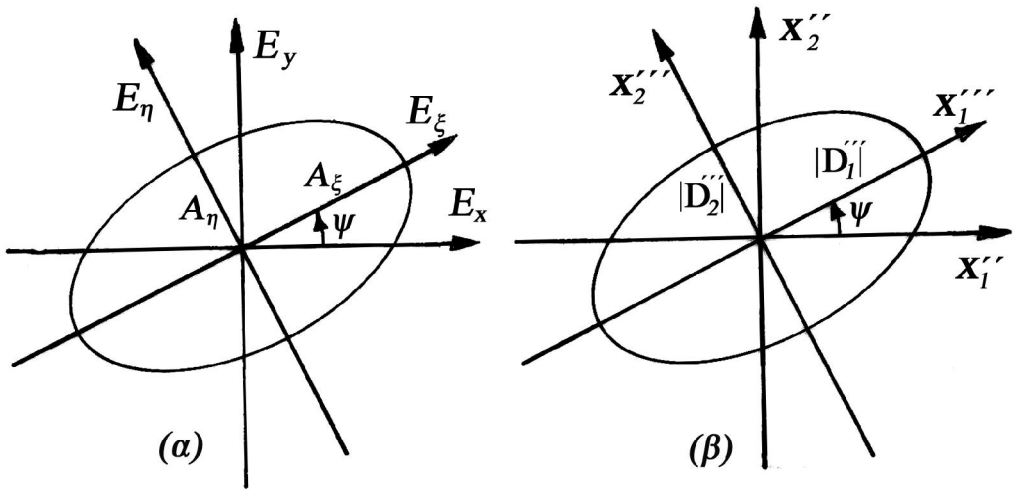
$$\sin 2\varepsilon = \sin 2a \sin \phi \quad \text{(Άσκ.1-Λυμένη),(σχ. 1.23))} \qquad \text{(Η-67)}$$

όπου: $-\pi/2 \le \psi < \pi/2 \ \left(\text{ή} \ \ 0 \le \psi < \pi\right)$, $-\pi/4 \le \varepsilon \le \pi/4$, $0 \le a \le \pi/2$, $0 \le \phi < 2\pi$

Δηλ. είναι δυνατόν να υπολογιστούν τα ψ, ε του εν γένει ελλειπτικά πολωμένου φωτός από το λόγο των πλατών A_y / A_x και τη διαφορά φάσης ϕ μεταξύ των δύο ορθογωνίων συνιστωσών του.

Στο κεφάλαιο αυτό όμως μας ενδιαφέρουν αντί του ηλ. πεδίου **E** οι ιδιοκαταστάσεις $\mathbf{D}_1, \mathbf{D}_2$ δηλ. τα πεδία των ηλ. επαγωγών για διάδοση στο εσωτερικό των

κρυστάλλων. Επίσης το σ.σ. E_x, E_y και το σύστημα E_ξ, E_η με τις διευθύνσεις του οποίου συμπίπτουν οι άξονες της έλλειψης του ελλειπτικά πολωμένου φωτός (Σχ.



(Σχ. Η-5)

Η-5α) αντικαθίστανται αντίστοιχα στη δική μας μελέτη, από τα σ.σ. x_1'', x_2'' (σύστημα στο οποίο αναφέρεται η τομή του ελλ. των δ.δ. που είναι κάθετη προς την κυματοκάθετη $\mathbf{k}$) και του x_1''', x_2''' που είναι το σ.σ. της ιδιοκατάστασης $\mathbf{D}_1$. Δηλ. οι διευθύνσεις αυτές συμπίπτουν με τον μεγάλο και τον μικρό άξονα της εν γένει ελλ. πολωμένης ιδιοκατάστασης $\mathbf{D}_1$ (Σχ. Η-5β). Όσο για την ιδιοκατάσταση $\mathbf{D}_2$, αυτή κατά τα γνωστά είναι ορθοκανονική της $\mathbf{D}_1$ όπως μπορούμε να δούμε και στο (Σχ. Η-4).

Γνωρίζουμε ότι ο λογισμός Jones συνιστά μια πλήρη μέθοδο περιγραφής των διαφόρων καταστάσεων πόλωσης, επιπέδων ομογενών και μονοχρωματικών μετώπων κύματος του φωτός (εξαιρούμενων του φυσικού και των μερικά πολωμένων φώτων). Θα δούμε στα επόμενα – με τη βοήθεια αυτής της θεωρίας – ότι μια τυχαία από τις προαναφερόμενες καταστάσεις πόλωσης, μπορεί να περιγραφεί με ένα και μόνο μιγαδικό αριθμό. Ορίζουμε λοιπόν την ***μιγαδική μεταβλητή πόλωσης (complex polarization variable)*** χ_1 (εδώ για τις συνιστώσες $D_1^{(1)}, D_1^{(2)}$ της ιδιοκατάστασης $\mathbf{D}_1$ στο σ.σ. x_1'', x_2'') ως εξής:

$$\left.\begin{aligned} &\chi_1 = \frac{D_1^{(2)}}{D_1^{(1)}} = \frac{\left|D_1^{(2)}\right|}{\left|D_1^{(1)}\right|} e^{i\left(\phi_1^{(2)} - \phi_1^{(1)}\right)} = \left|\chi_1\right| e^{i\phi_1} && (\alpha) \\ &\text{με} \quad \left|\chi_1\right| = \left|D_1^{(2)}\right| \Big/ \left|D_1^{(1)}\right| \quad \text{και} \quad \arg\left(\chi_1\right) = \phi_1^{(2)} - \phi_1^{(1)} = \phi_1 && (\beta) \end{aligned}\right\} \qquad \text{(H-68)}$$

όπου ϕ_1 η διαφορά φάσης μεταξύ των δύο συνιστωσών $D_1^{(1)}, D_1^{(2)}$.

Σημείωση

Με τον ίδιο ακριβώς τρόπο γίνεται και ο ορισμός της μιγαδικής μεταβλητής πόλωσης χ_2 (εδώ για τις συνιστώσες $D_2^{(1)}, D_2^{(2)}$ της ιδιοκατάστασης $\mathbf{D}_2$ στο σ.σ. x_1'', x_2''):

$$\left.\begin{array}{ll} \chi_2 = \dfrac{D_2^{(2)}}{D_2^{(1)}} = \dfrac{\left|D_2^{(2)}\right|}{\left|D_2^{(1)}\right|} e^{i\left(\phi_2^{(2)} - \phi_2^{(1)}\right)} = \left|\chi_2\right| e^{i\phi_2} & (\alpha) \\ \text{με} \quad \left|\chi_2\right| = \left|D_2^{(2)}\right| \Big/ \left|D_2^{(1)}\right| \quad \text{και} \quad \arg\left(\chi_2\right) = \phi_2^{(2)} - \phi_2^{(1)} = \phi_2 & (\beta) \end{array}\right\}$$

όπου ϕ_2 η διαφορά φάσης μεταξύ των δύο συνιστωσών $D_2^{(1)}, D_2^{(2)}$.

Η (σχ. Η-68) εκφράζει το γεγονός ότι όταν το πεδίο της ηλ. επαγωγής $\mathbf{D}_1$ (ιδιοκατάστασης) αναλύεται σε δύο συνιστώσες $D_1^{(1)}, D_1^{(2)}$ κατά μήκος των ορθογωνίων διευθύνσεων x_1'', x_2'' των καθέτων προς την κυματοκάθετη $\mathbf{k}$, τότε τα στοιχεία αυτού του εν γένει ελλειπτικά πολωμένου φωτός καθορίζονται τελείως από το λόγο $\left|D_1^{(2)}\right| \Big/ \left|D_1^{(1)}\right|$ και τη διαφορά φάσης τους $\phi_1^{(2)} - \phi_1^{(1)}$.

Πράγματι αν π.χ. $\mathbf{D}_1$ είναι το κανονικοποιημένο διάνυσμα Jones αυτής της ιδιοκατάστασης, τότε:

$$\underset{x_1'', x_2''}{\mathbf{D}_1} = \begin{pmatrix} D_1^{(1)} \\ D_1^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos a_1 \\ \sin a_1 e^{i\phi_1} \end{pmatrix} \quad \text{όπου} \quad \tan a_1 = \frac{\left|D_1^{(2)}\right|}{\left|D_1^{(1)}\right|} \quad \text{και} \quad \phi_1 = \phi_1^{(2)} - \phi_1^{(1)} \qquad \text{(Η-69)}$$

και ισχύουν για τα ψ_1 και ε_1 (στο σ.σ. x_1'', x_2'') οι (σχ. Η-66,67). Αν τώρα θέλουμε να εκφράσουμε την έλλειψη στο σ.σ. x_1''', x_2''', εκεί θα είναι $\psi_1 = 0$. Οπότε από τη (σχ. Η-66) επειδή $\tan 2a_1 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \phi_1 = \pi/2$. Επίσης από τη (σχ. Η-67) βρίσκουμε ότι:

$\sin 2\varepsilon_1 = \sin 2a_1 \quad \Rightarrow \quad a_1 = \varepsilon_1$. Επομένως θα έχουμε:

$$\underset{x_1''',x_2'''}{\mathbf{D}_1} = \begin{pmatrix} D_1^{(1)} \\ D_1^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varepsilon_1 \\ i\sin\varepsilon_1 \end{pmatrix} \tag{H-70}$$

Προκειμένου τέλος να εκφράσουμε τη (σχ. Η-70) στο αρχικό σ.σ. x_1'', x_2'' θα πρέπει να εκτελέσουμε μια στροφή ψ_1 κατά τη φορά των δεικτών του ρολογιού δηλ. κατά γωνία $-\psi_1$. Τότε θα έχουμε:

$$\underset{x_1'',x_2''}{\mathbf{D}_1} = R(-\psi_1)\underset{x_1''',x_2'''}{\mathbf{D}_1} = \begin{pmatrix} \cos\psi_1 & -\sin\psi_1 \\ \sin\psi_1 & \cos\psi_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\varepsilon_1 \\ i\sin\varepsilon_1 \end{pmatrix}$$

όπου $R(-\psi_1)$ ο πίνακας στροφής (βλ. ΠΑΡ/ΜΑ 5 (σχ. 5.35 για $\theta = \psi_1$). Οπότε:

$$\underset{x_1'',x_2''}{\mathbf{D}_1} = \begin{pmatrix} \cos\psi_1\cos\varepsilon_1 - i\sin\psi_1\sin\varepsilon_1 \\ \sin\psi_1\cos\varepsilon_1 + i\cos\psi_1\sin\varepsilon_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D_1^{(1)} \\ D_1^{(2)} \end{pmatrix} \tag{H-71}$$

Επομένως από τη (σχ. Η-68) ορισμού του χ_1 και τη (σχ. Η-71) βρίσκουμε:

$$\chi_1 = \frac{\sin\psi_1\cos\varepsilon_1 + i\cos\psi_1\sin\varepsilon_1}{\cos\psi_1\cos\varepsilon_1 - i\sin\psi_1\sin\varepsilon_1} = \frac{\tan\psi_1 + i\tan\varepsilon_1}{1 - i\tan\psi_1\tan\varepsilon_1} \tag{H-72}$$

Η τελευταία σχέση είναι αυτή που μας δείχνει τον τρόπο με τον οποίο κάθε ελλειπτική κατάσταση πόλωσης, αζιμουθιακής γωνίας ψ_1 και ελλειπτικής γωνίας ε_1 περιγράφεται από μία και μόνο μιγαδική μεταβλητή πόλωσης χ_1. Η (σχ. Η-72) μας δίνει τη δυνατότητα να προσδιορίσουμε τις ψ_1, ε_1 δεδομένης κατάστασης πόλωσης. Πράγματι οι ιδιοκαταστάσεις $\mathbf{D}_1, \mathbf{D}_2$ – όπως αναλυτικά αποδεικνύεται στο κεφάλαιο αυτό – δίνονται από τις (σχ. Η-53), οι οποίες είναι σε μορφή κανονικοποιημένων διανυσμάτων Jones. Δεδομένου ότι η γωνία στροφής Φ στο μιγαδικό επίπεδο x_1'', x_2'' είναι γνωστή και δίνεται από τη (σχ. Η-50), όπως επίσης και η γωνία $\mathrm{A} = \arctan\dfrac{\mathrm{Im}(B_{12}'')}{\mathrm{Re}(B_{12}'')}$ $\left(e^{i\mathrm{A}} = \dfrac{B_{12}''}{|B_{12}''|}\right)$, τότε ο λόγος των συνιστωσών του διανύσματος $\mathbf{D}_1$ (από τη (σχ. Η-53)) θα είναι η μιγαδική μεταβλητή πόλωσης. Οπότε και με τη βοήθεια της (σχ. Η-72) θα έχουμε:

$$\chi_1 = \frac{e^{-i\mathrm{A}}\sin\Phi}{\cos\Phi} = \frac{\tan\psi_1 + i\tan\varepsilon_1}{1 - i\tan\psi_1\tan\varepsilon_1} \qquad \text{(H-73)}$$

Από την τελευταία είναι δυνατόν να προσδιοριστούν τα στοιχεία ψ_1, ε_1 της έλλειψης, της εν γένει ελλειπτικά πολωμένης κατάστασης πόλωσης της ιδιοκατάστασης $\mathbf{D}_1$. Με παρόμοια ακριβώς διαδικασία γίνεται και ο προσδιορισμός των στοιχείων ψ_2, ε_2 της ιδιοκατάστασης $\mathbf{D}_2$. Τέλος όπως θα δούμε στα επόμενα μέσω των (σχ. Η-66,67) μπορούν να παραχθούν δύο αντίστοιχες σχέσεις, οι οποίες όμως θα εκφράζουν τις ψ, ε συναρτήσει των χ.

α) Προσδιορισμός των ψ

Πράγματι από τη (σχ. Η-66) και τον ορισμό των a, ϕ, χ θα έχουμε:

$$\tan 2\psi_m = \tan 2a_m \cos\phi_m$$

$$\tan a_m = \frac{\left|D_m^{(2)}\right|}{\left|D_m^{(1)}\right|} \quad m = 1,2 \quad (\text{ στο σ.σ. } x_1'', x_2'' \text{ })$$

$$\chi_m = r_m e^{i\phi_m} \quad \text{όπου} \quad r_m = \frac{\left|D_m^{(2)}\right|}{\left|D_m^{(1)}\right|} \quad \text{και} \quad \phi_m = \phi_m^{(2)} - \phi_m^{(1)} \quad m = 1,2 \quad (\text{ στο σ.σ. } x_1'', x_2'' \text{ })$$

Και επειδή $\chi_m = r_m e^{i\phi_m} = r_m \cos\phi_m + r_m i \sin\phi_m$ δηλ. $\mathrm{Re}(\chi_m) = r_m \cos\phi_m$ τότε θα έχουμε:

$$\tan 2\psi_m = \tan 2a_m \cos\phi_m = \frac{2\tan a_m}{1 - \tan^2 a_m}\cos\phi_m = \frac{2\dfrac{\left|D_m^{(2)}\right|}{\left|D_m^{(1)}\right|}}{1 - \left|\dfrac{D_m^{(2)}}{D_m^{(1)}}\right|^2}\cos\phi_m \quad \Rightarrow$$

$$\tan 2\psi_m = \frac{2\,\mathrm{Re}(\chi_m)}{1 - |\chi_m|^2} \qquad m = 1,2 \qquad \text{(H-74)}$$

Η ορθότητα της τελευταίας επιβεβαιώνεται από το επόμενο παράδειγμα. Πράγματι επειδή από τη (σχ. Η-53) $\mathbf{D}_1 = \begin{pmatrix} \cos\Phi \\ e^{-i\mathrm{A}}\sin\Phi \end{pmatrix}$, θα έχουμε:

$$\chi_1 = re^{i\phi} = \frac{\sin\Phi}{\cos\Phi}e^{-i\mathrm{A}} = \tan\Phi e^{-i\mathrm{A}} = \tan\Phi\cos\mathrm{A} - \mathrm{i}\tan\Phi\sin\mathrm{A}$$

$$\tan 2\psi_1 = \frac{2\,\mathrm{Re}(\chi_1)}{1-|\chi_1|^2} = \frac{2\tan\Phi\cos\mathrm{A}}{1-\left(\tan^2\Phi\sin^2\mathrm{A}+\tan^2\Phi\cos^2\mathrm{A}\right)} = \frac{2\tan\Phi\cos\mathrm{A}}{1-\tan^2\Phi}$$

και επειδή: $\tan 2\Phi = 2\tan\Phi\big/\left(1-\tan^2\Phi\right) \quad\Rightarrow\quad \tan 2\psi_1 = \tan 2\Phi\cos\mathrm{A}$. (Η-75)

Αλλά επειδή από τη (σχ. Η-50):

$$\tan 2\Phi = \mathrm{sgn}\,\mathrm{Re}\left(B''_{12}\right)\frac{2\left|B''_{12}\right|}{B''_{11}-B''_{22}} \quad \text{και} \quad \left(e^{i\mathrm{A}} = \frac{B''_{12}}{\left|B''_{12}\right|} \Rightarrow B''_{12} = \left|B''_{12}\right|\cos\mathrm{A} + i\left|B''_{12}\right|\sin\mathrm{A}\right) \Rightarrow$$

$$\tan 2\psi_1 = 2\,\mathrm{sgn}\,\mathrm{Re}\left(B''_{12}\right)\frac{\left|B''_{12}\right|\cos\mathrm{A}}{B''_{11}-B''_{22}} \Rightarrow \tan 2\psi_1 = \frac{2\,\mathrm{Re}\left(B''_{12}\right)}{B''_{11}-B''_{22}} \rightarrow \text{(σχ. Η-59)}$$

Δηλ. βρίσκουμε το αζιμούθιο του μεγάλου άξονα της $\mathbf{D}_1$ ως προς τον άξονα x''_1 του σ.σ. x''_1, x''_2 (Σχ. Η-4).

β) Προσδιορισμός των ε

Πράγματι από τη (σχ. Η-67) και τον ορισμό των a, ϕ, χ θα έχουμε:

$$\sin 2\varepsilon_m = \sin 2a_m \sin\phi_m$$

$$\tan a_m = \frac{\left|D_m^{(2)}\right|}{\left|D_m^{(1)}\right|} \quad m = 1,2 \quad (\text{ στο σ.σ. } x''_1, x''_2 \text{ }) \text{ και } \phi_m = \phi_m^{(2)} - \phi_m^{(1)}$$

Επίσης $\tan\varepsilon_m = \pm\left|D'''^{(2)}_m\right|\Big/\left|D'''^{(1)}_m\right| \quad m = 1,2$ στο σ.σ. του μικρού και του μεγάλου άξονα της ιδιοκατάστασης $\mathbf{D}_1$ (ή $\mathbf{D}_2$) δηλ. του x'''_1, x'''_2.

$$\chi_m = r_m e^{i\phi_m} \quad \text{όπου} \quad r_m = \frac{\left|D_m^{(2)}\right|}{\left|D_m^{(1)}\right|} \quad \text{και} \quad \phi_m = \phi_m^{(2)} - \phi_m^{(1)} \quad m = 1,2 \quad (\text{ στο σ.σ. } x''_1, x''_2 \text{ })$$

Επίσης: $\chi_m = r_m e^{i\phi_m} = r_m\cos\phi_m + ir_m\sin\phi_m = \dfrac{\left|D_m^{(2)}\right|}{\left|D_m^{(1)}\right|}\cos\phi_m + i\dfrac{\left|D_m^{(2)}\right|}{\left|D_m^{(1)}\right|}\sin\phi_m$

και $\operatorname{Im}(\chi_m) = r_m \sin\phi_m$. Δεδομένου επίσης ότι: $\sin 2a_m = 2\tan a_m \big/ \left(1+\tan^2 a_m\right) \Rightarrow$

$$\sin 2\varepsilon_m = \sin 2a_m \sin\phi_m = \frac{2\tan a_m}{1+\tan^2 a_m}\sin\phi_m = \frac{2\left|\dfrac{D_m^{(2)}}{D_m^{(1)}}\right|\sin\phi_m}{1+\left|\dfrac{D_m^{(2)}}{D_m^{(1)}}\right|^2} \Rightarrow$$

$$\sin 2\varepsilon_m = \frac{2\operatorname{Im}(\chi_m)}{1+|\chi_m|^2} \qquad m = 1,2 \tag{H-76}$$

Επειδή επίσης από τη (σχ. Η-53) $\mathbf{D}_1 = \begin{pmatrix} \cos\Phi \\ e^{-i\mathrm{A}}\sin\Phi \end{pmatrix}$, θα έχουμε:

$$\chi_1 = re^{i\phi} = \frac{\sin\Phi}{\cos\Phi}e^{-i\mathrm{A}} = \tan\Phi e^{-i\mathrm{A}} = \tan\Phi\cos\mathrm{A} - \mathrm{i}\tan\Phi\sin\mathrm{A}$$

Επομένως: $\operatorname{Im}(\chi_1) = -\tan\Phi\sin\mathrm{A}$ οπότε:

$$\sin 2\varepsilon_1 = \frac{2\operatorname{Im}\chi_1}{1+|\chi_1|^2} = \frac{-2\sin\mathrm{A}\tan\Phi}{1+\left(\tan^2\Phi\cos^2\mathrm{A}+\tan^2\Phi\sin^2\mathrm{A}\right)} = -\frac{2\sin\mathrm{A}\tan\Phi}{1+\tan^2\Phi}$$ και επειδή:

$$\tan 2\Phi = 2\tan\Phi\big/\left(1-\tan^2\Phi\right) \Rightarrow \quad \sin 2\varepsilon_1 = -\sin 2\Phi\sin\mathrm{A} \tag{H-77}$$

Έχουμε όμως: $\tan 2\Phi = \operatorname{sgn}\operatorname{Re}\left(B''_{12}\right)\dfrac{2\left|B''_{12}\right|}{B''_{11}-B''_{22}}, e^{i\mathrm{A}} = \dfrac{B'_{12}}{\left|B'_{12}\right|} \Rightarrow B''_{12} = \left|B''_{12}\right|\cos\mathrm{A} + \left|B''_{12}\right|\sin\mathrm{A}$

Και επειδή: $\sin 2\Phi = \tan 2\Phi\big/\sqrt{1+\tan^2 2\Phi}$ θα έχουμε: $\sin 2\varepsilon_1 = -\sin 2\Phi\sin\mathrm{A} =$

$$= -\frac{\tan 2\Phi\sin\mathrm{A}}{\sqrt{1+\tan^2 2\Phi}} = -\frac{\left(2\operatorname{sgn}\operatorname{Re}\left(B''_{12}\right)\left|B''_{12}\right|\sin\mathrm{A}\right)/\left(B''_{11}-B''_{22}\right)}{\sqrt{1+4\left|B''_{12}\right|^2/\left(B''_{11}-B''_{22}\right)^2}} = -\frac{2\operatorname{sgn}\operatorname{Re}\left(B''_{12}\right)\left|B''_{12}\right|\sin\mathrm{A}}{\sqrt{\left(B''_{11}-B''_{22}\right)^2+4\left|B''_{12}\right|^2}}$$

Και τελικά: $$\sin 2\varepsilon_1 = -\frac{2\operatorname{Im}\left(B''_{12}\right)}{\sqrt{\left(B''_{11}-B''_{22}\right)^2+4\left|B''_{12}\right|^2}} \tag{H-78}$$

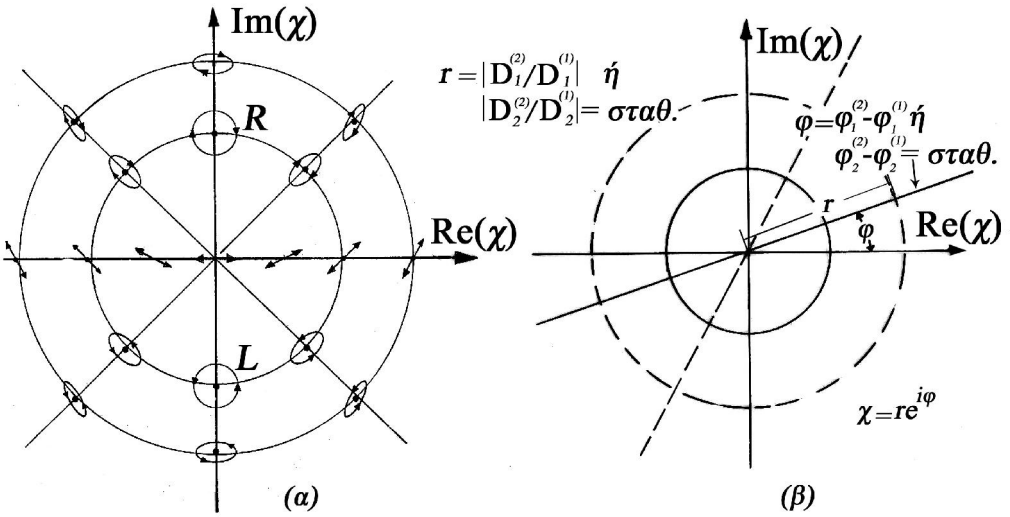
Στην (Άσκ.11-Λυμένη) αποδεικνύονται οι (σχ. Η-74,76) με τη βοήθεια της (σχ. Η-72).

Αντιστοίχιση των διαφόρων καταστάσεων πόλωσης, στα σημεία ενός καρτεσιανού μιγαδικού επιπέδου

Για τις περιπτώσεις που η αζιμουθιακή γωνία ψ και η ελλειπτική γωνία ε οριοθετούνται από τις: $-\pi/2 \le \psi < \pi/2$, $-\pi/4 \le \varepsilon \le \pi/4$ τότε από τη (σχ. Η-72) προνοείτε μία αντιστοίχηση ένα προς ένα μεταξύ των σημείων ενός μιγαδικού καρτεσιανού επιπέδου $\mathrm{Re}(\chi), \mathrm{Im}(\chi)$ (Σχ. Η-6) και των διαφόρων καταστάσεων πόλωσης του φωτός. Για το είδος αυτό της απεικόνισης χρησιμοποιούνται οι (σχ. Η-68,72). Θα έχουμε:

α) Τα σημεία του μιγαδικού επιπέδου $\chi = 0$, $\chi \to \infty$, αντιστοιχούν στα γραμμικά πολωμένα φώτα (εδώ γραμμικά πολωμένες ιδιοκαταστάσεις) τα παράλληλα προς τους άξονες x_1'' και x_2'' (Σχ. Η-6β). Πράγματι για $D_1^{(2)} = 0 \Rightarrow \chi_1 = 0$ και για $D_2^{(1)} = 0 \Rightarrow \chi_2 \to \infty$.

β) Όλα τα γραμμικά πολωμένα φώτα που το αζιμούθιό τους είναι μεταξύ $-\pi/2$ και $\pi/2$ με άξονα αναφοράς τον x_1'', αντιστοιχούν στα διάφορα σημεία του άξονα $\mathrm{Re}(\chi)$ (Σχ. Η-6β). Το συμπέρασμα αυτό επιβεβαιώνεται αν στη (σχ. Η-68α) θέσουμε $\phi_i^{(2)} - \phi_i^{(1)} = 0$ ή π ($i = 1,2$ για τις δύο ιδιοκαταστάσεις) ή αν θέσουμε $\varepsilon = 0$ (οπότε και $\tan\varepsilon = 0$ δηλ. ελλειπτικότητα ίση με μηδέν) στη (σχ. Η-72) οπότε $\chi = \tan\psi$.



(Σχ. Η-6)

γ) Υπάρχουν μόνο δύο σημεία στο μιγαδικό επίπεδο των χ τα οποία αντιστοιχούν στο δεξιόστροφο και αριστερόστροφο κυκλικά πολωμένο φως. Πρόκειται

για τα $R(\chi = i)$ και $L(\chi = -i)$πάνω στον άξονα $\mathrm{Im}(\chi)$ των φανταστικών αριθμών. Λαμβάνονται για $D_i^{(2)} = D_i^{(1)}$ και $\phi_i^{(2)} - \phi_i^{(1)} = \pm\pi/2$ των (σχ. Η-68). Καταλήγουμε στο ίδιο συμπέρασμα και από τη (σχ. Η-72) αν θέσουμε $\varepsilon = \pm\pi/4$ όπου το θετικό $(+)$ πρόσημο αντιστοιχεί στο Δ.Κ.Π. φως και το αρνητικό $(-)$ σε Α.Κ.Π. φως.

δ) Εκτός των γραμμικά πολωμένων καταστάσεων πόλωσης των σημείων χ πάνω στον άξονα $\mathrm{Re}(\chi)$ και των $R(\chi = i)$, $L(\chi = -i)$ πάνω στον άξονα $\mathrm{Im}(\chi)$, όλα τα υπόλοιπα αντιστοιχούν σε ελλειπτικά πολωμένα φώτα (εδώ ελλειπτικά πολωμένες ιδιοκαταστάσεις). Σημεία του επιπέδου πάνω από τον άξονα $\mathrm{Re}(\chi)$ αντιστοιχούν σε Δ.Ε.Π. καταστάσεις ενώ κάτω από αυτόν Α.Ε.Π. Πράγματι από τη (σχ. Η-68α) όταν $\phi_i^{(2)} - \phi_i^{(1)} > 0$ θα έχουμε Δ.Ε.Π. καταστάσεις ενώ για $\phi_i^{(2)} - \phi_i^{(1)} < 0$ Α.Ε.Π. καταστάσεις.

ε) Όπως μπορεί να φανεί από το (Σχ. Η-6β), καταστάσεις πόλωσης των οποίων η διαφορά φάσης των συνιστωσών των πεδίων $\mathbf{D}_1, \mathbf{D}_2$ κατά τον x_1'' και x_2'' άξονα είναι σταθερή, βρίσκονται πάνω σε ευθείες γραμμές που διέρχονται από το κέντρο όπου $\chi = 0$. Είναι οι ευθείες $\phi_i^{(2)} - \phi_i^{(1)} = \text{σταθ.}$ Επίσης κύκλοι με κέντρο το σημείο $\chi = 0$ αντιστοιχούν σε καταστάσεις πόλωσης για τις οποίες:
$\left|D_i^{(2)}\right| \Big/ \left|D_i^{(1)}\right| = \text{σταθ.}$

Επαγόμενη στροφικότητα.
Ηλεκτροστροφικό και πιεζοστροφικό φαινόμενο

Κατά τα γνωστά (βλ. Κεφ. Ζ), η επίδραση πάνω σε ισότροπα ή ανισότροπα υλικά εξωγενών δυνάμεων όπως: Ηλεκτρικού πεδίου, μηχανικής τάσης, θερμοκρασιακής μεταβολής, μαγνητικών πεδίων κλπ. είχε σαν αποτέλεσμα την εμφάνιση επαγόμενης διπλής διάθλασης του φωτός. Το γεγονός συνεπαγόταν τη μεταβολή των οπτικών ιδιοτήτων των υλικών. Και πιο συγκεκριμένα την ανάδειξη διαφορετικών ιδιοτιμών και ιδιοκαταστάσεων του φωτός για τις δυνάμενες να διαδοθούν στο εσωτερικό τους κατά τη διάρκεια της δράσης των εξωγενών δυνάμεων. Φαινόμενα που μελετήσαμε με σχετική λεπτομέρεια ήταν τα ηλεκτροοπτικά (γραμμικό και τετραγωνικό) καθώς και το γραμμικό φωτοελαστικό φαινόμενο. Από φυσική άποψη, γενεσιουργός αιτία για τα πρώτα, είναι η ανακατανομή των φορτίων (των ηλεκτρονικών νεφών) κατά τη δράση του ηλ. πεδίου (ηλεκτρονική πόλωση). Και για τη δεύτερη περίπτωση η σχετική παραμόρφωση των κρυσταλλικών ιοντικών πλεγμάτων (ιοντική πόλωση).

Επαγόμενα στροφικά φαινόμενα μπορούν παρομοίως να εμφανιστούν, όταν οι προαναφερόμενες εξωγενείς δυνάμεις δράσουν σε ισότροπα ή ανισότροπα υλικά τα οποία είναι ή δεν είναι οπτικά ενεργά. Θ' ασχοληθούμε μόνο με φαινόμενα που αναδεικνύονται με τη δράση ηλεκτρικού πεδίου ή μηχανικής τάσης. Στην πρώτη περίπτωση αναδεικνύονται τα ***λεγόμενα ηλεκτροστροφικά φαινόμενα (electrogyration effects)*** (γραμμικά και τετραγωνικά) και στη δεύτερη το γραμμικό ***πιεζοστροφικό φαινόμενο (piezigayration effect)***. Από φυσική άποψη γενεσιουργός αιτία αυτών των φαινομένων (όπως και αυτό της οπτικής ενεργότητας) είναι ο αναπτυσσόμενος χωρικός διασκεδασμός. Δηλ. η αναδεικνυόμενη ηλ. πόλωση όχι μόνο λόγω της δράσης του ηλ. πεδίου σε μια θέση αλλά και στην γύρω περιοχή της (μεταβολή των χωρικών του παραγώγων). Σαν αποτέλεσμα όλων αυτών, θα έχουμε μια μεταβολή των ιδιοτιμών και των ιδιοκαταστάσεων των δυνάμενων να διαδοθούν στο εσωτερικό των υλικών διαταραχών του φωτός (επιπέδων μετώπων κύματος). Πλήρης περιγραφή αυτού του είδους των προσδιορισμών, όπου τα υλικά μπορεί να είναι και διπλοθλαστικά εκτός από το να είναι οπτικά ενεργά ή όχι, γίνεται στο (Κεφ. Η) με τη μέθοδο του Jacobi. Παράγοντες που επηρεάζουν τους υπολογισμούς, είναι η διπλοθλαστικότητα ή μη των υλικών (ως επί το πλείστον των κρυστάλλων), η οπτική τους ενεργότητα ή μη, το κρυσταλλογραφικό σύστημα και κατά προέκταση η κρυσταλλική τάξη στην οποία ανήκουν, η εναντιομορφία τους ή μη καθώς και άλλοι παράγοντες.

Πρωτεύον γραμμικό ηλεκτροστροφικό φαινόμενο

Θεωρούμε ένα ισότροπο ή ανισότροπο υλικό, το οποίο μπορεί να διαθέτει οπτική ενεργότητα $\left(g_{ij}^{0} \neq 0\right)$ ή όχι $\left(g_{ij}^{0} = 0\right)$. Όπου g_{ij}^{0} είναι ο γνωστός αδιατάρακτος τανυστής της οπτικής ενεργότητας. Αδιατάρακτος από την άποψη ότι στο υλικό δεν δρουν εξωγενείς δυνάμεις. Αν όμως θεωρήσουμε ότι έχουμε τη δράση ηλ. πεδίου, τότε ο τανυστής της στροφικότητας που περιγράφει τη νέα κατάσταση θα δίνεται από τη σχέση:

$$g'_{ij} = g_{ij}^{0} + \zeta_{ijk} E_k \qquad \text{(H-79)}$$

όπου ζ_{ijk} ο αξονικός τανυστής (ψευδοτανυστής) τρίτης τάξης, που ονομάζεται γραμμικός ηλεκτροστροφικός. Με την προϋπόθεση ότι κατά τη δράση του ηλ. πεδίου δεν έχουμε παραμόρφωση του ιοντικού πλέγματος του κρυστάλλου, το φαινόμενο ονομάζεται ***πρωτεύον γραμμικό ηλεκτροστροφικό φαινόμενο (primary linear electrogyration effect)***. Οι μονάδες με τις οποίες μετρούνται οι συντελεστές ζ είναι σε $[\mathrm{m/V}]$ και μια τυπική τάξη μεγέθους είναι η: $\zeta \sim 10^{-13}\ \mathrm{m/V}$.

Στη γενικότερη περίπτωση τα στοιχεία του πίνακα του τανυστή της γραμμικής ηλεκτροστροφικότητας είναι 27. Επειδή όμως όπως αποδεικνύεται με τη βοήθεια της θερμοδυναμικής $\zeta_{ijk} = \zeta_{jik}$, τα στοιχεία περιορίζονται σε 18. Πράγματι λόγω της σχέσης συμμετρίας :

$$(11) \to 1, (22) \to 2, (33) \to 3, (23) = (32) \to 4, (13) = (31) \to 5, (21) = (12) \to 6,$$

μπορούμε να προβούμε στις συντομογραφίες:

$$\zeta_{11k} \to \zeta_{1k},\ \zeta_{22k} \to \zeta_{2k},\ \zeta_{33k} \to \zeta_{3k}, \zeta_{23k} = \zeta_{32k} \to \zeta_{4k}, \zeta_{13k} = \zeta_{31k} \to \zeta_{5k}, \zeta_{12k} = \zeta_{21k} \to \zeta_{6k}$$

για $k = 1,2,3$. Το οποίο συνεπάγεται ότι τα στοιχεία του πίνακα $[\zeta]$ από 27 γίνονται 18. Τότε η (σχ. Η-79) σε συντομογραφιμένη μορφή μπορεί να γραφεί;

$$\Delta g_i = g'_i - g_i^{0} = \zeta_{ij} E_j \quad i = 1,2,...,6 \quad j = 1,2,3 \qquad \text{(H-80)}$$

Επομένως τα στοιχεία ζ_{ij} μπορούν να διευθετηθούν σε πίνακες (6×3). Η συμμετρία με βάση την κρυσταλλική τάξη που ανήκει το κάθε υλικό, καθορίζουν τη μορφή των πινάκων, οι οποίοι καταγράφονται στον (Πίν. 8) του (ΠΑΡ/ΜΑΤΟΣ 6). Στα ισότροπα υλικά δεν εμφανίζεται γραμμικό ηλεκτροστροφικό φαινόμενο. Το

ίδιο ισχύει και για τις τάξεις: $432, \bar{4}3m, m3m, \infty\infty, \infty\infty m$, που σημαίνει ότι όλα τα στοιχεία των πινάκων τους είναι μηδενικά.

Πρωτεύον τετραγωνικό ηλεκτροστροφικό φαινόμενο

Θεωρούμε λόγω διαφόρων παραγόντων, ότι η διαταραχή των συνιστωσών του τανυστή της οπτικής ενεργότητας g_{ij}^0 λόγω της δράσης εξωγενώς ηλ. πεδίου **E** δεν αφορά μόνο τις συνιστώσες του E_i $i = 1,2,3$ αλλά και αυτές του γινομένου ανά δύο $E_k E_l$ $k,l = 1,2,3$. Τότε ο διαταραγμένος τανυστής g'_{ij} που περιγράφει αυτή τη διαδικασία μπορεί να γραφεί:

$$g'_{ij} = g_{ij}^0 + \zeta_{ijk} E_k + \beta_{ijkl} E_k E_l \quad i,j,k,l = 1,2,3 \qquad \text{(H-81)}$$

Που σημαίνει ότι και για περιπτώσεις που το γραμμικό ηλεκτροστροφικό φαινόμενο είναι μηδενικό, υφίσταται ηλεκτροστροφικότητα. Η τελευταία καθίσταται εμφανής λόγο του λεγόμενου ***τετραγωνικού ηλεκτροστροφικού φαινομένου (quadratic electrogyration effect)***.

Ο β_{ihjk} είναι ψευδοτανυστής (αξονικός τανυστής) τέταρτης τάξης, για τον οποίο από απόψεως συμμετρίας ισχύει: $\beta_{ijkl} = \beta_{jikl} = \beta_{ijlk}$. Το γεγονός θα έχει σαν αποτέλεσμα οι συνιστώσες του από 81 να περιοριστούν σε 36. Από τις τελευταίες πολλές είναι μηδενικές. Στον (Πίν. 9) του (ΠΑΡ/ΜΑΤΟΣ 6), δίνονται οι πίνακες (6×6) με τα στοιχεία τους για τις διάφορες κρυσταλλικές τάξεις. Οι πίνακες αυτοί, παρουσιάζουν την ίδια ακριβώς μορφή με αυτούς του γραμμικού πιεζοστροφικού φαινομένου (τους $[R]$ ή τους $[S]$ όπως θα δούμε στα επόμενα). Εξ αιτίας της κατηγορίας στην οποία ανήκει ο τανυστής β_{ijkl} τα στοιχεία των πινάκων τους για τις κεντροσυμμετρικές τάξεις είναι μηδενικά. Οι μονάδες με τις οποίες μετρούνται οι συντελεστές β είναι σε $[\mathrm{m/V}]^2$. Και όσον αφορά την τάξη μεγέθους τους είναι μεταξύ του $10^{-18} - 10^{-20} (\mathrm{m/V})^2$.

*Γραμμικό πιεζοστροφικό φαινόμενο**

Έχει αποδειχθεί πειραματικά ότι όταν σ' ένα διαφανές μέσο (συνήθως στερεό, ισότροπο ή ανισότροπο) το οποίο είναι ή όχι οπτικά ενεργό ασκείται μηχανική

* G.S. Ranganath and S. Ramaseshan ' Piezo-Rotatory Coefficients and Crystal Symmetry ' JOSA Vol. 59 Number. 9. Sept.9 1969.

τάση, τότε κάτω από ορισμένες προϋποθέσεις έχουμε μεταβολή της ειδικής στροφικής ικανότητας. Δηλ. επηρεάζεται η αρχική στροφική του ικανότητα. Υιοθετούμε συνθήκες που λαμβάνονται υπόψη μόνο οι πρώτης τάξης συνιστώσες της τάσης σ_{ij} $i, j = 1,2,3$ (και όχι γινόμενα μεταξύ τους – θεωρία πρώτης τάξης). Τότε η μεταβολή στον (αξονικό) τανυστή της οπτικής ενεργότητας του μέσου δίνεται από τη σχέση:

$$\Delta g_{ij} = g'_{ij} - g^0_{ij} = R_{ijkl}\sigma_{kl} \quad i, j, k, l = 1,2,3 \qquad \text{(H-82)}$$

όπου: g^0_{ij}, g'_{ij} είναι οι συνιστώσες των τανυστών της οπτικής ενεργότητας πριν και μετά την εφαρμογή της μηχανικής τάσης. Πρόκειται για το λεγόμενο ***γραμμικό πιεζοστροφικό φαινόμενο (linear piezorotatory effect)***. Ο τανυστής R_{ijkl} είναι αξονικός (ψευδοτανυστής) τέταρτης τάξης για τον οποίο ισχύει: $R_{ijkl} = R_{jikl} = R_{ijlk}$ και για τις κεντροσυμμετρικές τάξεις, τα στοιχεία του είναι μηδενικά.

Αν αντί των συνιστωσών της μηχανικής τάσης σαν ανεξάρτητες μεταβλητές χρησιμοποιήσουμε της συνιστώσες της σχετικής παραμόρφωσης ε_{ij} $i, j = 1,2,3$ τότε η (σχ. Η-82) μπορεί να μεταγραφεί στην:

$$\Delta g_{ij} = g'_{ij} - g^0_{ij} = S_{ijkl}\varepsilon_{kl} \quad i, j, k, l = 1,2,3 \qquad \text{(H-83)}$$

όπου και ο τανυστής S_{ijkl} (πιεζοστροφικός το όνομα) είναι αξονικός τέταρτης τάξης και διαθέτει την ίδια ακριβώς συμμετρία με τον R_{ijkl}. Η συμμετρία αυτού του είδους έχει σαν αποτέλεσμα την περιστολή των συνιστωσών τους από 81 σε 36. Τότε η συντομογραφιμένη μορφή των (σχ. Η-82,83) θα είναι:

$$\Delta g_i = R_{ij}\sigma_j \qquad \text{(H-84)} \qquad\qquad \Delta g_i = S_{ij}\varepsilon_j \qquad \text{(H-85)}$$

με $i, j = 1,2,...,6$. Οι συνιστώσες των R_{ij} και S_{ij} δεν είναι μεταξύ τους ανεξάρτητες αλλά συνδέονται με τις σχέσεις:

$$S_{ij} = R_{ik}c_{kj} \qquad \text{(H-86)} \qquad\qquad R_{ij} = S_{ik}s_{kj} \qquad \text{(H-87)}$$

όπου c_{kj}, s_{kj} είναι οι συνιστώσες σε συντομογραφιμένη μορφή των ελαστικών τανυστών της ακαμψίας (μέτρο του Young) (stiffness) και της υποχωρητικότητας (compliance) (Κεφ. Ζ). Οι εφαρμοζόμενες μέθοδοι της θεωρίας των ομάδων, μας οδηγούν να προσδιορίσουμε τους ανεξάρτητους πιεζοστροφικούς συντελεστές για τις

διάφορες κρυσταλλικές τάξεις. Οι πίνακες των $[R],[S]$ (ΠΑΡ/ΜΑ 6 (Πίν. 9)), παρουσιάζουν την ίδια ακριβώς δομή και τον ίδιο ακριβώς αριθμό μη μηδενικών στοιχείων με τους πίνακες $[\beta]$ του τετραγωνικού ηλεκτροστροφικού φαινομένου.

Ο αριθμός των μη μηδενικών στοιχείων των πινάκων των τανυστών: [R], [p], [g], [ε], [ζ]

Κρυσταλλικό σύστημα	[R] *πιεζο-στροφικός*	[p] *ελαστο-οπτικός*	[g] *οπτικής ενεργότητας*	[ε] *ηλεκτρικής διαπερ/τας*	[ζ] *ηλεκτρο-στροφικός*
Τρικλινές					
1	36	36	6	6	18
$\bar{1}$	0	36	0	6	18
Μονοκλινές					
m*	16	20	2	4	8
2	20	20	4	4	8
$2/m$	0	20	0	4	8
Ορθορομβικό					
$2mm$*	8	12	1	3	3
222	12	12	3	3	3
mmm	0	12	0	3	3
Τετραγωνικό					
4	10	10	2	2	4
$\bar{4}$*	10	10	2	2	4
$4/m$	0	10	0	2	4
$\boxed{4mm}$	3	7	0	2	1
$\bar{4}2m$*	5	7	1	2	1
422	7	7	2	2	1
$4/mmm$	0	7	0	2	1
Τριγωνικό					
3	12	12	2	2	6
$\bar{3}$	0	12	0	2	6
$\boxed{3m}$	4	8	0	2	2
32	8	8	2	2	2
$\bar{3}m$	0	8	0	2	2
Εξαγωνικό					
$\boxed{\bar{6}}$	4	8	0	2	4
6	8	8	2	2	4
$6/m$	0	8	0	2	4
$\boxed{\bar{6}m2}$	2	6	0	2	1
$\boxed{6mm}$	2	6	0	2	1
622	6	6	2	2	1
$6/mmm$	0	6	0	2	1
Κυβικό					
23	4	4	1	1	1
$m3$	0	4	0	1	1
$\boxed{\bar{4}3m}$	1	3	0	1	0
432	3	3	1	1	0
$m3m$	0	3	0	1	0

(Πίν. Η-7)

Στον (Πίν. Η-7) παραθέτουμε για λόγους σύγκρισης τον αριθμό των μη μηδενικών ανεξάρτητων στοιχείων των πινάκων $[R],[p],[g],[\varepsilon],[\zeta]$ για τις διάφορες κρυσταλλικές τάξεις. Είναι εμφανές ότι από την ανάγνωση του πίνακα, ότι μόνο οι κρύσταλλοι που δεν ανήκουν σε κεντροσυμμετρικές τάξεις διαθέτουν μη μηδενικούς πιεζοστροφικούς συντελεστές. Μπορούμε να τους κατατάξουμε στις εξής κατηγορίες: α) Σ' αυτούς που οι πίνακες των πιεζοστροφικών και ελαστοοπτικών στοιχείων έχουν ακριβώς την ίδια μορφή. β) Σ' αυτούς που οι πίνακες των πιεζοστροφικών και ελαστοοπτικών στοιχείων είναι διαφορετικοί (σημειώνονται με αστερίσκο) και γ) Σ' αυτούς για τους οποίους οι συνιστώσες g_{ij} του τανυστή της οπτικής ενεργότητας είναι μηδενικές $\left(g_{ij}=0\ \forall i,j\right)$ αλλά $R_{ij}\neq 0$ (σημειώνονται σε τετράγωνο πλαίσιο).

Δευτερεύον γραμμικό και τετραγωνικό ηλεκτροστροφικό φαινόμενο

Μας είναι ήδη γνωστό (Κεφ. Ζ), με βάση θερμοδυναμικές υποθέσεις ότι ο τανυστής r_{ijk} που περιγράφει το γραμμικό Η/Ο φαινόμενο καθώς και ο s_{ijkl} του τετραγωνικού Η/Ο φαινομένου θα πρέπει να δεχθούν διορθωτικούς όρους. Πράγματι από τη (σχ. Ζ-145) για $E=$σταθ. έχουμε: $\frac{\partial D}{\partial\sigma}=\frac{\partial P}{\partial\sigma}=\frac{\partial\varepsilon}{\partial E}=d$, που σημαίνει ότι (σε βαθμωτή μορφή): $\varepsilon=dE$. ε η σχετική παραμόρφωση και d ο πιεζοηλεκτρικός συντελεστής. Πρόκειται για την έκφραση του αντίστροφου πιεζοηλεκτρικού φαινομένου. Επομένως η εφαρμογή ηλ. πεδίου σ' ένα κρύσταλλο, θα έχει σαν αποτέλεσμα τη σχετική του παραμόρφωση. Σε μικροσκοπικό επίπεδο το αποτέλεσμα θα είναι η σχετική παραμόρφωση των ιοντικών πλεγμάτων με συνέπεια την εμφάνιση ιοντικής πόλωσης και κατά προέκταση μια πρόσθετη μεταβολή του τανυστή της ηλ. διαπερατότητας ΔB_{ij}. Η πρόσθετη αυτή μεταβολή γίνεται μέσω του φωτοελαστικού φαινομένου σαν: $p\varepsilon=p\left(dE\right)=\left(pd\right)E$ όπου pd ο διορθωτικός παράγοντας (υπό την έννοια δευτερεύοντος φαινομένου), ο οποίος προστιθέμενος στον παράγοντα rE του πρωτεύοντος φαινομένου αναδεικνύει το συνολικό γραμμικό Η/Ο φαινόμενο: $\Delta B=\left(r+pd\right)E$.

Τα προαναφερόμενα συνιστούν πρώτης τάξης μεταβολές του αντιστρόφου πιεζοηλεκτρικού φαινομένου (ανάλογο των συνιστωσών E_i $i=1,2,3$ του εφαρμοζόμενου ηλ. πεδίου). Αναλόγως όμως των συνθηκών, είναι δυνατόν να εμφανιστεί και το αντίστροφο πιεζοηλεκτρικό φαινόμενο δεύτερης τάξης (ανάλογο του γινομέ-

νου των συνιστωσών $E_k E_l \quad k,l = 1,2,3$ του εφαρμοζόμενου ηλ. πεδίου). Πράγματι με καθαρά θερμοδυναμικές υποθέσεις (σχ. Ζ-140) θα έχουμε:

$\frac{\partial d}{\partial E} = \frac{\partial}{\partial E}\left(\frac{\partial D}{\partial \sigma}\right) = \frac{\partial}{\partial E}\left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial E}\right) = \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial E^2} = \gamma$ που σημαίνει ότι σε βαθμωτή μορφή: $\varepsilon = \gamma E^2$ (έκφραση του αντίστροφου πιεζοηλεκτρικού φαινομένου δεύτερης τάξης). Που σημαίνει ότι η εφαρμογή του ηλ. πεδίου στον κρύσταλλο, έχει σαν αποτέλεσμα τη σχετική του παραμόρφωση. Όπου τώρα οι συντελεστές γ είναι οι συνιστώσες ενός τανυστή τέταρτης τάξης, του γνωστού τανυστή της ηλεκτροσυστολής. Και εδώ ο διορθωτικός όρος προκύπτει μέσω του φωτοελαστικού φαινομένου (μεταβολή του τανυστή της αδιαπερατότητας): $p\varepsilon = p\left(\gamma E^2\right) = \left(p\gamma\right)E^2$. Όπου $\left(p\gamma\right)E^2$ ο διορθωτικός παράγοντας (υπό την έννοια δευτερεύοντος φαινομένου), ο οποίος προστιθέμενος στον παράγοντα sE^2 του πρωτεύοντος φαινομένου αναδεικνύει το συνολικό τετραγωνικό Η/Ο φαινόμενο: $\Delta B = \left(s + p\gamma\right)E^2$.

Θα δούμε στα επόμενα μ' ένα σχετικά ανάλογο τρόπο, το πως θα καταστεί δυνατό να προσδιορίσουμε τα δευτερεύοντα φαινόμενα, τα οποία επιβάλλουν διορθώσεις όσον αφορά το γραμμικό και το τετραγωνικό ηλεκτροστροφικό φαινόμενο.

α) Δευτερεύον γραμμικό Η/Σ φαινόμενο

Η μεταβολή του τανυστή της ηλεκτροστροφικότητας $\Delta g_{ij}^{(\Pi)}$ για το πρωτεύον γραμμικό Η/Σ φαινόμενο δίνεται από τη (σχ. Η-79): $\Delta g_{ij}^{(\Pi)} = \zeta_{ijk} E_k$. Λόγω όμως της δράσης του ηλ. πεδίου έχουμε κατά τα γνωστά μια σχετική παραμόρφωση ε_{rs} του κρυστάλλου (πρώτης τάξης αντίστροφο πιεζοηλεκτρικό φαινόμενο) η οποία προκαλεί μια επί πλέον μεταβολή $\Delta' g_{ij}$ στον τανυστή της στροφικότητας, που συνιστά διορθωτικό παράγοντα. Η μεταβολή αυτή προκαλεί πιεζοστροφικότητα που δίνεται από τη (σχ. Η-83): $\Delta g_{ij}^{(\Delta)} = S_{ijrs}\varepsilon_{rs}$. Κατά τα γνωστά όμως $\varepsilon_{rs} = d_{krs}E_k$ λόγω του γραμμικού (πρωτεύοντος) αντιστρόφου πιεζοηλεκτρικού φαινομένου. Επομένως ο συνδυασμός των δύο τελευταίων σχέσεων θα μας δώσει:

$$\Delta g_{ij}^{(\Delta)} = S_{ijrs}\varepsilon_{rs} = S_{ijrs}\left(d_{krs}E_k\right) = \left(S_{ijrs}d_{krs}\right)E_k \qquad \text{(Η-88)}$$

Πρόκειται για το ***δευτερεύον γραμμικό ηλεκτροστροφικό φαινόμενο (secondary linear electrogyration effect)*** που οφείλεται σε πρώτης τάξης μεταβολές του ηλ. πεδίου (γραμμικές). Η άθροιση πρωτεύουσας και δευτερεύουσας μεταβολής, θα

μας δώσει τη συνολική μεταβολή $\Delta g_{ij}^{(\Sigma)}$ του τανυστή της στροφικότητας για το γραμμικό Η/Σ φαινόμενο:

$$\Delta g_{ij}^{(\Sigma)} = \Delta g_{ij}^{(\Pi)} + \Delta g_{ij}^{(\Delta)} = \zeta_{ijk} E_k + \left(S_{ijrs} d_{krs} \right) E_k = \left(\zeta_{ijk} + S_{ijrs} d_{krs} \right) E_k \qquad \text{(H-89)}$$

Και σε βαθμωτή μορφή: $\Delta g = \left(\zeta + Sd \right) E$.

β) Δευτερεύον τετραγωνικό Η/Σ φαινόμενο

Η μεταβολή του τανυστή της ηλεκτροστροφικότητας $\Delta g_{ij}^{(\Pi)}$ για το πρωτεύον τετραγωνικό Η/Σ φαινόμενο δίνεται από τη (σχ. Η-81): $\Delta g_{ij}^{(\Pi)} = \beta_{ijkl} E_k E_l$. Λόγω όμως της δράσης του ηλ. πεδίου έχουμε κατά τα γνωστά μια σχετική παραμόρφωση ε_{rs} του κρυστάλλου (δεύτερης τάξης αντίστροφο πιεζοηλεκτρικό φαινόμενο) η οποία προκαλεί μια επί πλέον μεταβολή στον τανυστή της στροφικότητας, που συνιστά διορθωτικό παράγοντα. Η μεταβολή αυτή προκαλεί πιεζοστροφικότητα που δίνεται από τη (σχ. Η-83): $\Delta g_{ij}^{(\Delta)} = S_{ijrs} \varepsilon_{rs}$. Κατά τα γνωστά όμως $\varepsilon_{rs} = \gamma_{klrs} E_k E_l$ λόγω του τετραγωνικού (δευτερεύοντος) αντιστρόφου πιεζοηλεκτρικού φαινομένου (ηλεκτροσυστολή). Επομένως ο συνδυασμός των δύο τελευταίων σχέσεων θα μας δώσει:

$$\Delta g_{ij}^{(\Delta)} = S_{ijrs} \varepsilon_{rs} = S_{ijrs} \left(\gamma_{klrs} E_k E_l \right) = \left(S_{ijrs} \gamma_{klrs} \right) E_k E_l \qquad \text{(H-90)}$$

Πρόκειται για το ***δευτερεύον τετραγωνικό ηλεκτροστροφικό φαινόμενο (secondary quadratic electrogyration effect)***, που οφείλεται σε δεύτερης τάξης μεταβολές του δρώντος ηλ. πεδίου (τετραγωνικές).). Η άθροιση πρωτεύουσας και δευτερεύουσας μεταβολής, θα μας δώσει τη συνολική μεταβολή $\Delta g_{ij}^{(\Sigma)}$ του τανυστή της στροφικότητας για το τετραγωνικό Η/Σ φαινόμενο:

$$\left. \begin{aligned} \Delta g_{ij}^{(\Sigma)} &= \Delta g_{ij}^{(\Pi)} + \Delta g_{ij}^{(\Delta)} = \\ &= \beta_{ijkl} E_k E_l + \left(S_{ijrs} \gamma_{klrs} \right) E_k E_l = \left(\beta_{ijkl} + S_{ijrs} \gamma_{klrs} \right) E_k E_l \end{aligned} \right\} \qquad \text{(H-91)}$$

Και σε βαθμωτή μορφή: $\Delta g = \left(\beta + S\gamma \right) E^2$.

Παράδειγμα

Προσδιορισμός του ενεργού γραμμικού ηλεκτροστροφικού συντελεστή ζ_{41}^{eff} *των κρυστάλλων των σιλλενιτών του κυβικού συστήματος της τάξης* (23)*

- Οι κρύσταλλοι των σιλλενιτών ($Bi_{12}SiO_{20}$, $Bi_{12}GeO_{20}$, $Bi_{12}TiO_{20}$) ανήκουν στο κυβικό σύστημα και συγκεκριμένα στην τάξη (23). Είναι ηλεκτροοπτικοί, οπτικά ενεργοί, ηλεκτροστροφικοί, πιεζοηλεκτρικοί, ελαστοοπτικοί και πιεζοστροφικοί. Εκτός τούτου είναι και φωτοδιαθλαστικοί. Χρησιμοποιούνται σε ευρύ πεδίο εφαρμογών όπως: α) Στη δυναμική ολογραφία πραγματικού χρόνου, β) Στην περιοχή της καταχώρισης και επεξεργασίας οπτικών πληροφοριών (χωρική διαμόρφωση), γ) Στη συμβολομετρία κ.τ.λ. Οι κρύσταλλοι αυτής της τάξης, δεδομένου ότι δεν είναι κεντροσυμμετρικοί εκδηλώνουν: Γραμμική (πρωτεύουσα και δευτερεύουσα) όπως και τετραγωνική (πρωτεύουσα και δευτερεύουσα) ηλεκτροοπτικότητα. Επίσης είναι οπτικά ενεργοί και εκδηλώνουν : Γραμμική (πρωτεύουσα και δευτερεύουσα) όπως και τετραγωνική (πρωτεύουσα και δευτερεύουσα) ηλεκτροστροφικότητα.

Για την επίλυση του προβλήματος θα πρέπει να επιλέξουμε : α) Μια συγκεκριμένη τομή του κρυστάλλου ως προς το σ.σ. των κυρίων αξόνων x_1, x_2, x_3 κάθετα σε μια έδρα της οποίας θα προσπέσει ένα επίπεδο μονοχρωματικό μέτωπο κύματος προκειμένου να διαδοθεί στο εσωτερικό του (στη διεύθυνση της κυματοκαθέτου). β) Τη διεύθυνση κατά την οποία θα εφαρμόσουμε ένα στατικό ηλ. πεδίο.

Αν το εφαρμοζόμενο στον κρύσταλλο ηλ. πεδίο έχει σχετικά μικρή τιμή (π.χ. $1\mathrm{kV/cm}$), μπορούμε να υποθέσουμε ότι η επίδραση των τετραγωνικών φαινομένων (Η/Ο και Η/Σ) πρωτευόντων και δευτερευόντων είναι αμελητέα. Επομένως οι ιδιοκαταστάσεις και οι ιδιοτιμές κατά τη διεύθυνση της κυματοκαθέτου, καθορίζονται μόνο από τα γραμμικά φαινόμενα (Η/Ο και Η/Σ) πρωτεύοντα και δευτερεύοντα. Όσον αφορά τώρα τους συντελεστές των γραμμικών φαινομένων (Η/Ο και Η/Σ) εκφράζονται (εδώ σε βαθμωτή μορφή) από τις σχέσεις: $r^{eff} = r + pd$ και $\zeta^{eff} = \zeta + Sd$. Όπου r^{eff} είναι η λεγόμενη ενεργός τιμή του γραμμικού ηλεκτροοπτικού συντελεστή, η οποία περιλαμβάνει την πρωτεύουσα συνεισφορά r καθώς και τη δευτερεύουσα pd λόγω της εμφάνισης του αντίστροφου πιεζοηλεκτρικού φαινομένου. Με παρόμοιο τρόπο ζ^{eff} είναι η λεγόμενη ενεργός τιμή του γραμμικού ηλεκτροστροφικού συντελεστή, η οποία περιλαμβάνει την πρωτεύουσα συνεισφορά

---

* N. C. Deliolanis, E. D. Vanidhis, N.A.Vainos: 'Dispersion of electrogaration in sillenite crystals' Appl. Phys. B (Laser and Optics) 85, 591-596 (2006).

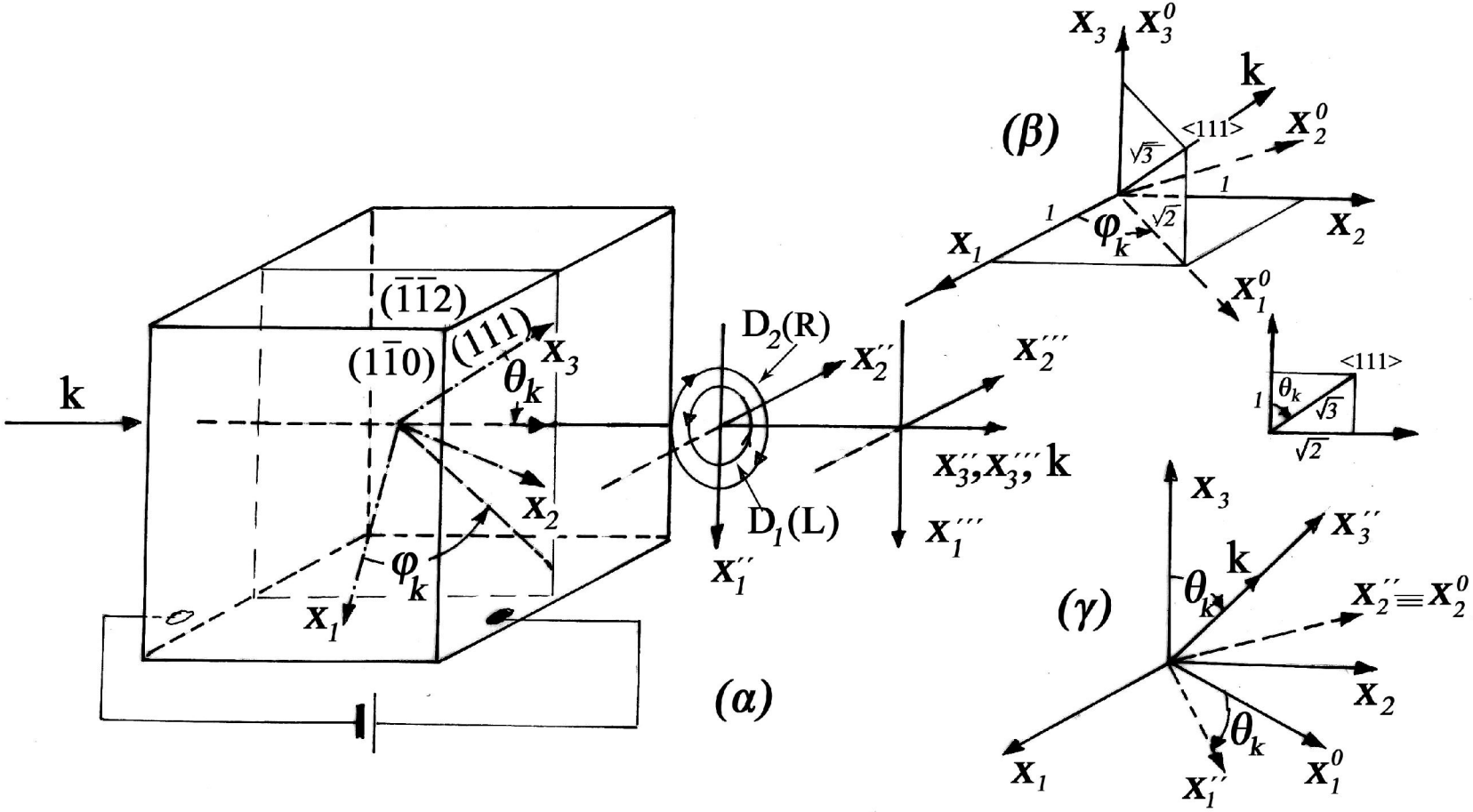
ζ καθώς και τη δευτερεύουσα Sd λόγω της εμφάνισης του αντίστροφου πιεζοηλεκτρικού φαινομένου.

Σημείωση

Η σχέση που μας δίνει την συνολική συνεισφορά (πρωτεύουσα και δευτερεύουσα) για το γραμμικό Η/Ο φαινόμενο ($r^{eff} = r + pd$), συμβολικά μπορεί να γραφεί και με τον εξής τρόπο: $r^{(S)} = r^{(T)} + pd$. Ο $r^{(S)}$ είναι ο Η/Ο συντελεστής ο μετρούμενος ***υπό σταθερή μηχανική τάση***. Ενώ ο $r^{(T)}$, ο μετρούμενος ***υπό σταθερή σχετική παραμόρφωση***. Πράγματι η μέτρηση του $r^{(T)}$, γίνεται με την προϋπόθεση ότι ο κρύσταλλος είναι περιορισμένος με τέτοιο τρόπο έτσι ώστε να μην μπορεί να υπόκειται σε οποιαδήποτε σχετική παραμόρφωση κατά την εφαρμογή σ' αυτόν του ηλεκτρικού πεδίου (clamped). Όταν όμως ο κρύσταλλος δεν περιορίζεται και εφαρμόσουμε το ηλεκτρικό πεδίο, είναι σαν να υπόκειται σε μια σταθερή μηχανική τάση, οπότε έχει τη δυνατότητα να παραμορφωθεί (unclamped). Τότε ο μετρούμενος ηλεκτροοπτικός συντελεστής είναι ο $r^{(S)}$ όπου $r^{(S)} = r^{eff} = r^{(T)} + pd$. Δηλ. εκτός της συνεισφοράς του πρωτεύοντος φαινομένου $r^{(T)}$, στη μέτρηση του συντελεστή περιλαμβάνεται και ο διορθωτικός παράγοντας pd ο οποίος προήλθε λόγω της σχετικής παραμόρφωσης του κρυστάλλου.

Παρόμοιοι συλλογισμοί ισχύουν και για τη μέτρηση του γραμμικού ηλεκτροστροφικού συντελεστή ζ όπου $\zeta^{(S)} = \zeta^{eff} = \zeta^{(T)} + Sd$. Με $\zeta^{(S)} = \zeta^{eff}$ τον μετρούμενο υπό σταθερή μηχανική τάση και $\zeta^{(T)}$ τον μετρούμενο υπό σταθερή σχετική παραμόρφωση. Sd είναι ο διορθωτικός παράγοντας ο οποίος προήλθε λόγω της σχετικής παραμόρφωσης του κρυστάλλου.

Όπως προαναφέραμε, η επιλογή της συγκεκριμένης τομής, της συγκεκριμένης διεύθυνσης εφαρμογής του ηλεκτρικού πεδίου καθώς και της διεύθυνσης της κυματοκαθέτου στο εσωτερικό του κρυστάλλου, αναδεικνύει όπως θα δούμε στα επόμενα τον τρόπο του προσδιορισμού της ενεργού τιμής του γραμμικού ηλεκτροστροφικού συντελεστή ζ_{41}^{eff}, για τους κρυστάλλους των σιλενιτών του κυβικού συστήματος. Η τομή του κρυστάλλου είναι η : $(111),(1\bar{1}0),(\bar{1}\bar{1}2)$ όπως φαίνεται στο (Σχ. Η-8α). Η διεύθυνση της εφαρμογής του ηλ. πεδίου καθώς και η διεύθυνση της κυματοκαθέτου $\mathbf{k}$ είναι η $\langle 111 \rangle$. Το τελευταίο σημαίνει ότι τα ηλεκτρόδια στις επιφάνειες (111) και $(\bar{1}\bar{1}\bar{1})$ θα πρέπει να είναι διαφανή και αγώγιμα. Η κατασκευή


k
(1̄1̄2)
(1̄1̄0)
(111)
x3
θk
x2
φk
x1
(α)
D2(R)
D1(L)
x1´´
x2´´
x2´´´
x3´´,x3´´´,k
x1´´´
(β)
x3
x3^0
k
<111>
x2^0
√3
1
√2
x2
x1
φk
x1^0
<111>
1
θk
√3
√2
(γ)
x3
x3´´
k
θk
x2´´≡x2^0
x2
θk
x1
x1´´
x1^0

(Σχ. H-8)

τους γίνεται με εξάχνωση σ' αυτές (ITO) (Indium Tin Oxide). Με τα δεδομένα αυτά κατά σειρά υπολογίζονται:

1) Τα στοιχεία του πίνακα $[B]^o$ του αδιατάρακτου τανυστή της αδιαπερατότητας, για κρυστάλλους του κυβικού συστήματος της τάξης (23)

Για το σύστημα συντεταγμένων των κυρίων αξόνων x_1, x_2, x_3:

$$[B]^o = \begin{pmatrix} B_{o1} & 0 & 0 \\ 0 & B_{o2} & 0 \\ 0 & 0 & B_{o3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/n_o^2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/n_o^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/n_o^2 \end{pmatrix} \qquad \text{(H-92)}$$

όπου: $B_{o1} = B_{o1} = B_{o3} = 1/n_o^2$. Η συμμετρία σημείου για την τάξη (23) δίνεται στο (ΠΑΡ/ΜΑ 6 Πίν. 1ε) και ο πίνακας των αδιαπερατοτήτων (σχ. Η-92) για τους κυβικούς κρυστάλλους, συμπεριλαμβανομένης και της τάξης (23) στον (Πίν. Γ-4). n_o είναι ο δ.δ. του κρυστάλλου του κυβικού συστήματος.

2) Τα στοιχεία του πίνακα των πραγματικών διαταραχών του τανυστή της αδιαπερατότητας, που οφείλονται στο γραμμικό Η/Ο (πρωτεύον) και στο φωτοελαστικό (δευτερεύον γραμμικό Η/Ο) φαινόμενο, για κρυστάλλους του κυβικού συστήματος της τάξης (23)

Τα στοιχεία αυτά υπολογίζονται με τη βοήθεια της (σχ. Ζ-148):

$$\Delta B_{ij}^{tot} = B_{ij}(E) - B_{ij}(0) = r_{ijk}E_k + p_{ijrs}d_{krs}E_k = \Delta B_{ij}^{eo} + \Delta B_{ij}^{ph} = \Delta B_{ij}^{(\Pi)} + \Delta B_{ij}^{(\Delta)} \qquad \text{(H-93)}$$

όπου ΔB_{ij}^{eo} οι διαταραχές λόγω του γραμμικού (πρωτεύοντος) Η/Ο φαινομένου και ΔB_{ij}^{ph} οι διαταραχές λόγω του γραμμικού φωτοελαστικού (μέσω του αντιστρόφου πιεζοηλεκτρικού) (δευτερεύοντος) Η/Ο φαινομένου. r_{ijk} ο γραμμικός Η/Ο τανυστής, p_{ijrs} ο ελαστοοπτικός τανυστής και d_{krs} ο πιεζοηλεκτρικός τανυστής.

α) Υπολογισμός των στοιχείων του ΔB_{ij}^{eo}

Γίνεται μέσω της (σχ. Ζ-3) ή της (σχ. Η-93) : $\Delta B_{ij}^{eo} = r_{ijk} E_k \quad i,j,k = 1,2,3$ η οποία κατά τα γνωστά λόγω των συμμετριών καθώς και θερμοδυναμικών δεδομένων παίρνει τη συντομογραφιμένη της μορφή:

$$\Delta B_{ij}^{eo} \to \Delta B_i^{eo} = r_{ij} E_j \quad i = 1,2,\cdots,6 \;\; j = 1,2,3 \tag{H-94}$$

όπου τώρα ο πίνακας των στοιχείων του r_{ij} είναι διαστάσεων (6×3) (δηλ. τα στοιχεία του από 27 γίνονται 18). Για τους κυβικούς κρυστάλλους της τάξης (23) έχει τη μορφή (ΠΑΡ/ΜΑ 6, Πίν.5-β) :

$$[r] \to \underset{\substack{i=1,2,\cdots,6 \\ j=1,2,3}}{r_{ij}} = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \\ r_{41} & r_{42} & r_{43} \\ r_{51} & r_{52} & r_{53} \\ r_{61} & r_{62} & r_{63} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ r_{41} & 0 & 0 \\ 0 & r_{41} & 0 \\ 0 & 0 & r_{41} \end{pmatrix} \tag{H-95}$$

Επίσης κατά τα γνωστά, λόγω της συμμετρίας των στοιχείων του πίνακα της αδιαπερατότητας καθώς και των διαταραχών τους λόγω του πρωτεύοντος Η/Ο φαινόμενου (πίνακας $[\Delta B] \to (6\times 1)$ και $[E] \to (3\times 1)$) η (σχ. Η-94) υπό μορφή πινάκων γράφεται ως εξής:

$$\begin{pmatrix} \Delta B_{11} \\ \Delta B_{22} \\ \Delta B_{33} \\ \Delta B_{23} \\ \Delta B_{13} \\ \Delta B_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_{1j} E_j \\ r_{2j} E_j \\ r_{3j} E_j \\ r_{4j} E_j \\ r_{5j} E_j \\ r_{6j} E_j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Delta B_1 \\ \Delta B_2 \\ \Delta B_3 \\ \Delta B_4 \\ \Delta B_5 \\ \Delta B_6 \end{pmatrix}^{eo} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ r_{41} & 0 & 0 \\ 0 & r_{41} & 0 \\ 0 & 0 & r_{41} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ r_{41} E_1 \\ r_{41} E_2 \\ r_{41} E_3 \end{pmatrix} \tag{H-96}$$

όπου E_1, E_2, E_3 οι συνιστώσες του εφαρμοζόμενου στον κρύσταλλο ηλέκ. πεδίου και $j = 1,2,3$. Η τελευταία σε μορφή συμμετρικού πίνακα (3×3) μπορεί να γραφεί ως εξής:

$$[\Delta B]^{eo} = \begin{pmatrix} \Delta B_{11} & \Delta B_{12} & \Delta B_{13} \\ \Delta B_{12} & \Delta B_{22} & \Delta B_{23} \\ \Delta B_{13} & \Delta B_{23} & \Delta B_{33} \end{pmatrix}^{eo} \rightarrow \begin{pmatrix} \Delta B_{1} & \Delta B_{6} & \Delta B_{5} \\ \Delta B_{6} & \Delta B_{2} & \Delta B_{4} \\ \Delta B_{5} & \Delta B_{4} & \Delta B_{3} \end{pmatrix}^{eo} \Rightarrow$$

$$[\Delta B]^{eo} = \begin{pmatrix} 0 & r_{41}E_3 & r_{41}E_2 \\ r_{41}E_3 & 0 & r_{41}E_1 \\ r_{41}E_2 & r_{41}E_1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{(H-97)}$$

β) Υπολογισμός των στοιχείων του ΔB_{ij}^{ph}

Γίνεται με τη βοήθεια του προσθετέου $\Delta B_{ij}^{ph} = p_{ijrs} d_{krs} E_k \;\; i,j,k,r,s = 1,2,3$ της (σχ. Η-93) (βλ. και (σχ. Ζ-148), όπου λόγω συμμετριών παίρνει τη συντομογραφιμένη μορφή:

$$\Delta B_{ij}^{ph} \rightarrow \Delta B_{m}^{ph} = p_{mn} d_{kn} E_k \quad m,n = 1,2,\cdots,6 \;\; k = 1,2,3 \qquad \text{(H-98)}$$

Όπου τώρα οι διαστάσεις των πινάκων είναι: $[\Delta B] \rightarrow (6\times 1)$, $[p] \rightarrow (6\times 6)$, $[d] \rightarrow (6\times 3)$, $[E] \rightarrow (3\times 1)$.Δηλ. κατά τα γνωστά, ο αριθμός των στοιχείων του ελαστοοπτικού πίνακα $[p]$ καθίστανται από 81 σε 36 και ο αριθμός των στοιχείων του πιεζοηλεκτρικού πίνακα $[d]$ από 27 σε 18. Ο $[p]$ για τους κρυστάλλους του κυβικού συστήματος της τάξης (23) έχει τη μορφή (βλ. ΠΑΡ/ΜΑ 6 (Πίν. 4β)):

$$[p] \rightarrow \underset{\substack{m=1,2,\cdots,6 \\ n=1,2,\cdots,6}}{p_{mn}} = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} & p_{14} & p_{15} & p_{16} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} & p_{24} & p_{25} & p_{26} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} & p_{34} & p_{35} & p_{36} \\ p_{41} & p_{42} & p_{43} & p_{44} & p_{45} & p_{46} \\ p_{51} & p_{52} & p_{53} & p_{54} & p_{55} & p_{56} \\ p_{61} & p_{62} & p_{63} & p_{64} & p_{65} & p_{66} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1 & p_2 & p_3 & 0 & 0 & 0 \\ p_3 & p_1 & p_2 & 0 & 0 & 0 \\ p_2 & p_3 & p_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & p_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_4 \end{pmatrix} \qquad \text{(H-99)}$$

Επίσης ο $[d]$ για τους κρυστάλλους του κυβικού συστήματος της τάξης (23) (βλ. ΠΑΡ/ΜΑ 6 (Πίν. 2β)) με τη μορφή όμως πίνακα (6×3) θα είναι:

$$[d] \rightarrow \underset{\substack{n=1,2,\cdots,6 \\ k=1,2,3}}{d_{kn}} = \begin{pmatrix} d_{11} & d_{21} & d_{31} \\ d_{12} & d_{22} & d_{32} \\ d_{13} & d_{23} & d_{33} \\ d_{14} & d_{24} & d_{34} \\ d_{15} & d_{25} & d_{35} \\ d_{16} & d_{26} & d_{36} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ d_{14} & 0 & 0 \\ 0 & d_{14} & 0 \\ 0 & 0 & d_{14} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ d & 0 & 0 \\ 0 & d & 0 \\ 0 & 0 & d \end{pmatrix} \qquad \text{(H-100)}$$

Τότε οι διαταραχές ΔB_{ij}^{ph} στα στοιχεία του πίνακα της αδιαπερατότητας που οφείλονται στο γραμμικό φωτοελαστικό φαινόμενο (δευτερεύον Η/Ο) θα προκύπτουν από τη (σχ. Η-98) ή μέσω του λογισμού των πινάκων:

$$[\Delta B]^{ph} = \begin{pmatrix} \Delta B_{11} & \Delta B_{12} & \Delta B_{13} \\ \Delta B_{12} & \Delta B_{22} & \Delta B_{23} \\ \Delta B_{13} & \Delta B_{23} & \Delta B_{33} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \Delta B_{11} \\ \Delta B_{22} \\ \Delta B_{33} \\ \Delta B_{23} \\ \Delta B_{13} \\ \Delta B_{12} \end{pmatrix}^{ph} = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} & p_{14} & p_{15} & p_{16} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} & p_{24} & p_{25} & p_{26} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} & p_{34} & p_{35} & p_{36} \\ p_{41} & p_{42} & p_{43} & p_{44} & p_{45} & p_{46} \\ p_{51} & p_{52} & p_{53} & p_{54} & p_{55} & p_{56} \\ p_{61} & p_{62} & p_{63} & p_{64} & p_{65} & p_{66} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_{11} & d_{21} & d_{31} \\ d_{12} & d_{22} & d_{32} \\ d_{13} & d_{23} & d_{33} \\ d_{14} & d_{24} & d_{34} \\ d_{15} & d_{25} & d_{35} \\ d_{16} & d_{26} & d_{36} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$[\Delta B]^{ph} = \begin{pmatrix} \Delta B_1 & \Delta B_6 & \Delta B_5 \\ \Delta B_6 & \Delta B_2 & \Delta B_4 \\ \Delta B_5 & \Delta B_4 & \Delta B_3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \Delta B_1 \\ \Delta B_2 \\ \Delta B_3 \\ \Delta B_4 \\ \Delta B_5 \\ \Delta B_6 \end{pmatrix}^{ph} = \begin{pmatrix} p_1 & p_2 & p_3 & 0 & 0 & 0 \\ p_3 & p_1 & p_2 & 0 & 0 & 0 \\ p_2 & p_3 & p_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & p_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ d & 0 & 0 \\ 0 & d & 0 \\ 0 & 0 & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$[\Delta B]^{ph} = \begin{pmatrix} \Delta B_1 \\ \Delta B_2 \\ \Delta B_3 \\ \Delta B_4 \\ \Delta B_5 \\ \Delta B_6 \end{pmatrix}^{ph} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ dp_4 & 0 & 0 \\ 0 & dp_4 & 0 \\ 0 & 0 & dp_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ dp_4 E_1 \\ dp_4 E_2 \\ dp_4 E_3 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$[\Delta B]^{ph} = \begin{pmatrix} \Delta B_1 \\ \Delta B_2 \\ \Delta B_3 \\ \Delta B_4 \\ \Delta B_5 \\ \Delta B_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ dp_4 E_1 \\ dp_4 E_2 \\ dp_4 E_3 \end{pmatrix}^{ph} \rightarrow \begin{pmatrix} \Delta B_1 & \Delta B_6 & \Delta B_5 \\ \Delta B_6 & \Delta B_2 & \Delta B_4 \\ \Delta B_5 & \Delta B_4 & \Delta B_3 \end{pmatrix}^{ph} = \begin{pmatrix} 0 & dp_4 E_3 & dp_4 E_2 \\ dp_4 E_3 & 0 & dp_4 E_1 \\ dp_4 E_2 & dp_4 E_1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{(H-101)}$$

3) *Τα πραγματικά στοιχεία, του πίνακα $[B]$ του διαταραγμένου τανυστή της αδιαπερατότητας, λόγω του ηλεκτρικού πεδίου (συνολικά)*

Θα είναι: $[B]=[B]^o+[\Delta B]^{eo}+[\Delta B]^{ph}$. Και λαμβάνοντας υπόψη μας τις (σχ. Η-92,97,101) βρίσκουμε μετά την άθροιση των πινάκων:

$$[B]=\begin{pmatrix} B_1 & B_6 & B_5 \\ B_6 & B_2 & B_4 \\ B_5 & B_4 & B_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1/n_o^2 & (r+dp_4)E_3 & (r+dp_4)E_2 \\ (r+dp_4)E_3 & 1/n_o^2 & (r+dp_4)E_1 \\ (r+dp_4)E_2 & (r+dp_4)E_1 & 1/n_o^2 \end{pmatrix} \qquad \text{(H-102)}$$

4) *Τα στοιχεία του πίνακα του αδιατάρακτου τανυστή της στροφικότητας $[g]^o$, για κρυστάλλους του κυβικού συστήματος της τάξης* (23)

Είναι γνωστό ότι οι κρύσταλλοι των σιλλενιτών που ανήκουν στην τάξη (23), είναι οπτικά ενεργοί. Επίσης γνωρίζουμε ότι η στροφικότητά τους G καθορίζεται από τη μορφή του πίνακα των στοιχείων του τανυστή g_{ij} της στροφικότητας μέσω της (σχ. Η-21). Για το σύστημα συντεταγμένων των κυρίων αξόνων x_1, x_2, x_3 ο πίνακας αυτός έχει τη μορφή (ΠΑΡ/ΜΑ 6 , (Πίν. 7)):

$$[g]^o=\begin{pmatrix} g_{11} & 0 & 0 \\ 0 & g_{22} & 0 \\ 0 & 0 & g_{33} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} g_o & 0 & 0 \\ 0 & g_o & 0 \\ 0 & 0 & g_o \end{pmatrix} \qquad \text{(H-103)}$$

5) *Τα στοιχεία του πίνακα του διαταραγμένου τανυστή της στροφικότητας, που οφείλονται στο πρωτεύον γραμμικό ηλεκτροστροφικό φαινόμενο, για κρυστάλλους του κυβικού συστήματος της τάξης* (23)

Τα στοιχεία αυτά υπολογίζονται με τη βοήθεια της (σχ. Η-79). Πράγματι:

$$\Delta g_{ij}^{(\Pi)}=g'_{ij}-g^o{}_{ij}=\zeta_{ijk}E_k \qquad i,j,k=1,2,3 \qquad \text{(H-104)}$$

Ο τανυστής ζ_{ijk} είναι τρίτης τάξης και η μορφή του για την τάξη (23) λόγω συμμετριών κ.τ.λ. δίνεται στο (ΠΑΡ/ΜΑ 6 , (Πίν. 8)). Η συντομογραφιμένη μορφή της (σχ. Η-104) θα είναι:

$$\Delta g_{ij}^{(\Pi)} \rightarrow \Delta g_i = \zeta_{ij} E_j \qquad i = 1,2,\cdots,6 \;\; j = 1,2,3 \tag{H-105}$$

Και σε μορφή πινάκων, με δεδομένο ότι $E_j \;\; j = 1,2,3$ είναι οι συνιστώσες του εφαρμοζόμενου ηλεκτρικού πεδίου, μπορεί να γραφεί:

$$\begin{pmatrix} \Delta g_{11} \\ \Delta g_{22} \\ \Delta g_{33} \\ \Delta g_{23} \\ \Delta g_{13} \\ \Delta g_{12} \end{pmatrix}^{(\Pi)} \rightarrow \begin{pmatrix} \Delta g_1 \\ \Delta g_2 \\ \Delta g_3 \\ \Delta g_4 \\ \Delta g_5 \\ \Delta g_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \zeta_{1j} E_j \\ \zeta_{2j} E_j \\ \zeta_{3j} E_j \\ \zeta_{4j} E_j \\ \zeta_{5j} E_j \\ \zeta_{6j} E_j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \zeta_{41} & 0 & 0 \\ 0 & \zeta_{41} & 0 \\ 0 & 0 & \zeta_{41} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \zeta_{41} E_1 \\ \zeta_{41} E_2 \\ \zeta_{41} E_2 \end{pmatrix} \tag{H-106}$$

Η τελευταία με τη μορφή συμμετρικού πίνακα (3×3) παίρνει τη μορφή:

$$\left.\begin{aligned} [\Delta g] &= \begin{pmatrix} \Delta g_{11} & \Delta g_{12} & \Delta g_{13} \\ \Delta g_{21} & \Delta g_{22} & \Delta g_{23} \\ \Delta g_{31} & \Delta g_{32} & \Delta g_{33} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \Delta g_1 & \Delta g_6 & \Delta g_5 \\ \Delta g_6 & \Delta g_2 & \Delta g_4 \\ \Delta g_5 & \Delta g_4 & \Delta g_3 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 0 & \zeta_{41} E_3 & \zeta_{41} E_2 \\ \zeta_{41} E_3 & 0 & \zeta_{41} E_1 \\ \zeta_{41} E_2 & \zeta_{41} E_1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \zeta E_3 & \zeta E_2 \\ \zeta E_3 & 0 & \zeta E_1 \\ \zeta E_2 & \zeta E_1 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}\right\} \tag{H-107}$$

6) Τα στοιχεία του πίνακα $[g]^{(\Delta)}$ του διαταραγμένου τανυστή της στροφικότητας, που οφείλεται στο δευτερεύον γραμμικό Η/Σ φαινόμενο. Συνολική διαταραχή $[g]'$

Γίνεται με τη βοήθεια της (σχ. Η-89): $\Delta g_{ij}^{ps} = \Delta g_{ij}^{(\Delta)} = S_{ijrs} d_{krs} E_k \;\; i,j,r,s = 1,2,3$ ή σε μορφή πινάκων: $[\Delta g]^{ps} = [\Delta g]^{(\Delta)} = [S][d][E]$. Όπου από το (ΠΑΡ/ΜΑ 6 (Πίν. 9)) βρίσκουμε για την τάξη (23):

$$[S]=\begin{pmatrix} S_1 & S_2 & S_3 & 0 & 0 & 0 \\ S_3 & S_1 & S_2 & 0 & 0 & 0 \\ S_2 & S_3 & S_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & S_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & S_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & S_4 \end{pmatrix},\quad [d]=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ d & 0 & 0 \\ 0 & d & 0 \\ 0 & 0 & d \end{pmatrix},\quad [E]=\begin{pmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_2 \end{pmatrix}$$

Επομένως:

$$[\Delta g]^{(\Delta)}=\begin{pmatrix} \Delta g_1 \\ \Delta g_2 \\ \Delta g_3 \\ \Delta g_4 \\ \Delta g_5 \\ \Delta g_6 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} S_1 & S_2 & S_3 & 0 & 0 & 0 \\ S_3 & S_1 & S_2 & 0 & 0 & 0 \\ S_2 & S_3 & S_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & S_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & S_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & S_4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ d & 0 & 0 \\ 0 & d & 0 \\ 0 & 0 & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_2 \end{pmatrix}$$

από την οποία συνεπάγεται:

$$[\Delta g]^{(\Delta)}=\begin{pmatrix} \Delta g_1 & \Delta g_6 & \Delta g_5 \\ \Delta g_6 & \Delta g_2 & \Delta g_4 \\ \Delta g_5 & \Delta g_4 & \Delta g_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & dS_4E_3 & dS_4E_2 \\ dS_4E_3 & 0 & dS_4E_1 \\ dS_4E_2 & dS_4E_1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{(H-108)}$$

Η συνολική διαταραχή θα δίνεται από το άθροισμα: $[g]'=[g]^0+[\Delta g]^{(\Pi)}+[\Delta g]^{(\Delta)}$ και λαμβάνοντας υπόψη τις (σχ. Η-103,107,108) βρίσκουμε:

$$[g]'=\begin{pmatrix} g_0 & (\zeta_{41}+d_{14}S_4)E_3 & (\zeta_{41}+d_{14}S_4)E_2 \\ (\zeta_{41}+d_{14}S_4)E_3 & g_0 & (\zeta_{41}+d_{14}S_4)E_1 \\ (\zeta_{41}+d_{14}S_4)E_2 & (\zeta_{41}+d_{14}S_4)E_1 & g_0 \end{pmatrix} \qquad \text{(H-109)}$$

ή

$$[g]'=\begin{pmatrix} g_0 & \zeta^{eff}E_3 & \zeta^{eff}E_2 \\ \zeta^{eff}E_3 & g_0 & \zeta^{eff}E_1 \\ \zeta^{eff}E_2 & \zeta^{eff}E_1 & g_0 \end{pmatrix} \qquad \text{(H-110)}$$

όπου αντικαταστήσαμε το άθροισμα $\zeta_{41}+d_{14}S_4$ με τον κατά τα γνωστά ενεργό ηλεκτροστροφικό συντελεστή ζ^{eff}.

7) *Υπολογισμός του μέτρου* $G' = |\mathbf{G}'|$ *του διαταραγμένου στροφικού διανύσματος* $\mathbf{G}'$ *και των συνιστωσών του* G'_1, G'_2, G'_3

Γνωρίζουμε από τη (σχ. Η-20) ότι το μέτρο G' του διαταραγμένου πλέον στροφικού διανύσματος $\mathbf{G}'$ υπολογίζεται από τα συνημίτονα κατεύθυνσης l_1, l_2, l_3 της κυματοκαθέτου $\mathbf{k}$ $(\mathbf{G}' \parallel \mathbf{k})$ και τα στοιχεία του διαταραγμένου στροφικού τανυστη g'_{ij}. Καθορίζει στην πραγματικότητα την οπτική ενεργότητα στη διεύθυνση αυτή στο εσωτερικό του κρυστάλλου. Με τη βοήθεια του (Σχ. Η-3) και των (σχ. Η-24α) οι συνιστώσες του θα είναι:

$$G'_1 = G' \sin\theta_k \cos\phi_k \quad G'_2 = G' \sin\theta_k \sin\phi_k \quad G'_3 = G' \cos\theta_k \tag{H-111}$$

όπου $G' = g'_{ij} l_i l_j$ (σχ. Η-21) και:

$$l_1 = G'_1/G' = \sin\theta_k \cos\phi_k \quad l_2 = G'_2/G' = \sin\theta_k \sin\phi_k \quad l_3 = G'_3/G' = \cos\theta_k \tag{H-112}$$

Άρα:

$$\left.\begin{aligned} G' = {} & g'_{11} \sin^2\theta_k \cos^2\phi_k + g'_{22} \sin^2\theta_k \sin^2\phi_k + g'_{33} \cos^2\theta_k + \\ & + 2g'_{12} \sin^2\theta_k \sin\phi_k \cos\phi_k + \\ & + 2g'_{13} \sin\theta_k \cos\theta_k \cos\phi_k + \\ & + 2g'_{23} \sin\theta_k \cos\theta_k \sin\phi_k \end{aligned}\right\} \tag{H-113}$$

όπου g'_{ij} τα στοιχεία του διαταραγμένου τανυστή της στροφικότητας, που για κρυστάλλους του κυβικού συστήματος της τάξης (23) δίνονται από τη (σχ. Η-110).

8) *Καθορισμός των στοιχείων του αντισυμμετρικού διαταραγμένου πίνακα* $[G]'$

Από τη (σχ. Η-4β), η μορφή του διαταραγμένου πλέον πίνακα $[G]'$ θα είναι:

$$[G]' = \begin{pmatrix} 0 & -G'_3 & G'_2 \\ G'_3 & 0 & -G'_1 \\ -G'_2 & G'_1 & 0 \end{pmatrix} \tag{H-114}$$

9) *Υπολογισμός των στοιχείων του πραγματικού και του φανταστικού μέρους του πίνακα του ερμιτιανού τανυστή της αδιαπερατότητας* $[B]'$

Από την καταστατική εξίσωση του υλικού που δίνεται από τη (σχ. Η-6) θα έχουμε παραλείποντας τον παράγοντα $1/\varepsilon_o$:

$$[B]' = [B] - i[B][G]'[B] = \mathrm{Re}\left([B]'\right) + i\,\mathrm{Im}\left([B]'\right) \qquad \text{(H-115)}$$

Όπου εδώ ο $[B]$ δίνεται από τη (σχ. Η-102) και μας προσδιορίζει τα πραγματικά στοιχεία του πίνακα του διαταραγμένου λόγω του ηλ. πεδίου τανυστή της αδιαπερατότητας. Επίσης ο $[G]'$ που δίνεται από τη (σχ. Η-114), είναι ο διαταραγμένος λόγω του ηλ. πεδίου αντισυμμετρικός πίνακας της στροφικότητας. Επομένως:

$$\mathrm{Re}\left([B]'\right) = [B] = [B]^o + [B]^{eo} + [B]^{ph} \qquad \text{(H-116)}$$

$$\mathrm{Im}\left([B]'\right) = -[B][G]'[B] \cong -[B]^o[G]'[B]^o \qquad \text{(H-117)}$$

όπου έχουμε αντικαταστήσει τα στοιχεία του $[B]$ με αυτά του $[B]^o$ που δίνεται από τη (σχ. Η-92). Πράγματι τα στοιχεία του $[B]$ περιλαμβάνουν προσθετέους της μορφής $(r + pd)$ των οποίων η τιμή είναι της τάξης του 10^{-12} m/V . Επίσης τα στοιχεία του $[G]'$ (που απαρτίζεται από συνιστώσες του G'), δεδομένου ότι $G' \ll 1$ θα είναι πολύ μικρά. Άρα ο πολλαπλασιασμός $[B][G]'[B]$ θα μας δώσει στοιχεία που θα περιλαμβάνουν προσθετέους με μορφή γινομένων του παράγοντα $(r + pd)$, επομένως με τιμή αμελητέα με συνέπεια να ισχύει η (σχ. Η-117) . Οπότε με τη βοήθεια των (σχ. Η-92,114) θα έχουμε:

$$\mathrm{Im}\left([B]'\right) = -\begin{pmatrix} B_{o1} & 0 & 0 \\ 0 & B_{o2} & 0 \\ 0 & 0 & B_{o3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -G_3' & G_2' \\ G_3' & 0 & -G_1' \\ -G_2' & G_1' & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} B_{o1} & 0 & 0 \\ 0 & B_{o2} & 0 \\ 0 & 0 & B_{o3} \end{pmatrix} =$$

$$=-\begin{pmatrix} 0 & -B_{o1}B_{o2}G_3' & B_{o1}B_{o3}G_2' \\ B_{o1}B_{o2}G_3' & 0 & -B_{o2}B_{o3}G_1' \\ -B_{o1}B_{o3}G_2' & B_{o2}B_{o3}G_1' & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & \frac{G_3'}{n_o^4} & -\frac{G_2'}{n_o^4} \\ -\frac{G_3'}{n_o^4} & 0 & \frac{G_1'}{n_o^4} \\ \frac{G_2'}{n_o^4} & -\frac{G_1'}{n_o^4} & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{(H-118)}$$

επειδή για την κρυσταλλική τάξη (23) του κυβικού συστήματος, $B_{o1}=B_{o2}=B_{o3}=1/n_o^2$.

10) Τα στοιχεία του πίνακα $[B]'$ του διαταραγμένου ερμιτιανού τανυστή της αδιαπερατότητας, για κρυστάλλους του κυβικού συστήματος της τάξης (23)

Αντικαθιστώντας στη (σχ. Η-115) τις (σχ. Η-102,118) τελικά βρίσκουμε:

$$[B]'=\begin{pmatrix} \frac{1}{n_o^2} & (r+dp_4)E_3+i\frac{G_3'}{n_o^4} & (r+dp_4)E_2-i\frac{G_2'}{n_o^4} \\ (r+dp_4)E_3-i\frac{G_3'}{n_o^4} & \frac{1}{n_o^2} & (r+dp_4)E_1+i\frac{G_1'}{n_o^4} \\ (r+dp_4)E_2+i\frac{G_2'}{n_o^4} & (r+dp_4)E_1-i\frac{G_1'}{n_o^4} & \frac{1}{n_o^2} \end{pmatrix} \qquad \text{(H-119)}$$

Υπολογισμός των ιδιοκαταστάσεων και των ιδιοτιμών, για διεύθυνση διάδοσης του φωτός κατά την $\langle 111\rangle$ *και διεύθυνση εφαρμογής πεδίου την* $\langle 111\rangle$

1) Καθορισμός των συνιστωσών E_1, E_2, E_3 του εφαρμοζόμενου πεδίου **E** *κατά την* $\langle 111\rangle$ *σε σχέση με τους κύριους άξονες* x_1, x_2, x_3

Με τη βοήθεια του (Σχ. Η-8β) βρίσκουμε:

$$E_1 = E_2 = E_3 = E_o \big/ \sqrt{3} \qquad \text{(H-120)}$$

2) *Καθορισμός του μέτρου G' του διαταραγμένου στροφικού διανύσματος $\mathbf{G}'$ και των συνιστωσών του G'_1, G'_2, G'_3*

Κατ' αρχή με τη βοήθεια της (σχ. Η-110) και της (σχ. Η-120), υπολογίζουμε τα στοιχεία του πίνακα $[g]'$:

$$[g]' = \begin{pmatrix} g'_{11} & g'_{12} & g'_{13} \\ g'_{21} & g'_{22} & g'_{23} \\ g'_{31} & g'_{32} & g'_{33} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} g'_1 & g'_6 & g'_5 \\ g'_6 & g'_2 & g'_4 \\ g'_5 & g'_4 & g'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_o & \zeta^{eff} E_o \big/ \sqrt{3} & \zeta^{eff} E_o \big/ \sqrt{3} \\ \zeta^{eff} E_o \big/ \sqrt{3} & g_o & \zeta^{eff} E_o \big/ \sqrt{3} \\ \zeta^{eff} E_o \big/ \sqrt{3} & \zeta^{eff} E_o \big/ \sqrt{3} & g_o \end{pmatrix} \qquad \text{(H-121)}$$

Κατόπιν για τον προσδιορισμό του G', θα πρέπει αρχικά να υπολογίσουμε τις γωνίες ϕ_k, θ_k έτσι ώστε να μεταβούμε από το σ.σ. των κυρίων αξόνων, στο λεγόμενο σ.σ. της κυματοκαθέτου $\mathbf{k}$. Η διαδικασία αυτή αναφέρεται λεπτομερώς στο (Κεφ. Ζ) (Σχ. Ζ-9,10,11) και εκτελείται σε δύο διαδοχικά στάδια: α) Στροφή κατά $\phi_k = 45^o$ περί τον x_3 (Σχ. Η-8β) και β) Στροφή κατά $\theta_k = \arctan\sqrt{2}$ περί τον άξονα $x_2^0 \equiv x_2''$ (Σχ. Η-8γ) έτσι ώστε ο x_3'' να συμπέσει με την $\mathbf{k}$ και επειδή $\mathbf{G}' \parallel \mathbf{k}$, με το στροφικό διάνυσμα $\mathbf{G}'$. Κάτω από αυτές τις συνθήκες θα έχουμε:

$$\sin\theta_k = \sqrt{2}\big/\sqrt{3}\ ,\ \cos\theta_k = 1\big/\sqrt{3}\ ,\ \sin\phi_k = 1\big/\sqrt{2}\ ,\ \cos\phi_k = 1\big/\sqrt{2} \qquad \text{(H-122)}$$

Τότε με τη βοήθεια των (σχ. Η-113, 122) βρίσκουμε:

$$G' = g_o + \frac{2\sqrt{3}}{3}\zeta^{eff} E_o \qquad \text{(H-123)}$$

Κατόπιν με τη βοήθεια των (σχ. Η-112) βρίσκουμε:

$$G'_1 = G'_2 = G'_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(g_o + \frac{2\sqrt{3}}{3}\zeta^{eff} E_o \right) \qquad \text{(H-124)}$$

3) *Τα στοιχεία του πίνακα $[B]'$ του διαταραγμένου ερμιτιανού τανυστή της αδιαπερατότητας, για κρυστάλλους του κυβικού*

συστήματος της τάξης (23), ***όταν το εφαρμοζόμενο ηλ. πεδίο καθώς και η διεύθυνση της κυματοκαθέτου*** **k** ***είναι η*** $\langle 111 \rangle$

Αντικαθιστώντας τις τιμές των G_1', G_2', G_3' από τη (σχ. Η-124) στη (σχ. Η-119) βρίσκουμε:

$$[B]' = \begin{pmatrix} B_{11}' & B_{12}' & B_{13}' \\ B_{21}' & B_{22}' & B_{23}' \\ B_{31}' & B_{32}' & B_{33}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_{11}' & B_{12}' & B_{13}' \\ B_{12}'^{*} & B_{22}' & B_{23}' \\ B_{13}'^{*} & B_{23}'^{*} & B_{33}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/n_o^2 & A+iB & A-iB \\ A-iB & 1/n_o^2 & A+iB \\ A+iB & A-iB & 1/n_o^2 \end{pmatrix} \qquad \text{(H-125)}$$

όπου: $$A = (r + dp_4)\frac{E_o}{\sqrt{3}} \quad , \quad B = \frac{1}{\sqrt{3}n_o^4}\left(g_o + \frac{2}{\sqrt{3}}\zeta^{eff}E_o\right) \qquad \text{(H-126)}$$

4) Μετασχηματισμός των στοιχείων του ερμιτιανού πίνακα $[B]'$ *του σ.σ.* x_1, x_2, x_3 *στο σ.σ.* x_1'', x_2'', x_3'' *δηλ. το σ.σ. της κυματοκαθέτου* **k** $\| x_3''$

Το πρόβλημα που μας ενδιαφέρει εδώ, είναι ο προσδιορισμός των ιδιοκαταστάσεων $\mathbf{D}_1, \mathbf{D}_2$ κατά τη διεύθυνση της κυματοκαθέτου **k**, καθώς και των ιδιοτιμών (και κατά προέκταση των δ.δ. n_1, n_2) συνυπολογιζόμενων της διπλοθλαστικότητας και της οπτικής ενεργότητας (φυσικών και επαγόμενων). Τα τελευταία επιτυγχάνονται κατά τα γνωστά με το μετασχηματισμό των στοιχείων B_{11}' , B_{12}' , $B_{21}' = B_{12}'^{*}$, B_{22}' του πίνακα $[B]'$ από το σ.σ. x_1, x_2, x_3 στο σ.σ. της κυματοκαθέτου **k** (εδώ στη διεύθυνση $\langle 111 \rangle$) που είναι το x_1'', x_2'' και $x_3'' = 0$. Τα στοιχεία αυτά είναι τα B_{11}'' , B_{12}'', $B_{21}'' = B_{12}''^{*}$, B_{22}'' και δίνονται κατά τα γνωστά από τις (σχ. Η-42,44,43). Δηλ. είναι τα στοιχεία του πίνακα $[B]''$ της (σχ. Η-41):

$$[B]'' = \begin{pmatrix} B_{11}'' & B_{12}'' \\ B_{12}''^{*} & B_{22}'' \end{pmatrix} \qquad \text{(H-127)}$$

που είναι και ο ίδιος ερμιτιανός. Τότε η εξίσωση της τομής του ελλ. των δ.δ. της καθέτου στην **k** θα δίνεται κατά τα γνωστά από τη (σχ. Η-58). Αν αντικαταστή-

σουμε τώρα τις τιμές των ϕ_k, θ_k από τις (σχ. Η-122) στις (σχ. Η-42,44,43), υπολογίζουμε τα στοιχεία του $[B]''$:

$$[B]'' = \begin{pmatrix} \frac{1}{n_o^2} - (r + dp_4)\frac{E_o}{\sqrt{3}} & i\frac{1}{n_o^4}\left(g_o + \frac{2}{\sqrt{3}}\zeta^{eff}E_o\right) \\ -i\frac{1}{n_o^4}\left(g_o + \frac{2}{\sqrt{3}}\zeta^{eff}E_o\right) & \frac{1}{n_o^2} - (r + dp_4)\frac{E_o}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \qquad \text{(H-128)}$$

5) *Διαγωνιοποίηση του ερμιτιανού πίνακα* $[B]''$ *με στροφή στο μιγαδικό επίπεδο* x_1'', x_2'' *κατά γωνία* Φ

Η γωνία Φ θα δίνεται από τη (σχ. Η-50): $\tan 2\Phi = \operatorname{sgn}\operatorname{Re}(B_{12}'')\dfrac{2|B_{12}''|}{B_{11}'' - B_{22}''}$

Και επειδή $B_{11}'' = B_{22}''$ και $\operatorname{Re}(B_{12}'') \neq 0 \Rightarrow \tan 2\Phi \to \infty$. Δηλ. $\Phi = +45^o$.

6) *Προσδιορισμός των δ.δ.* n_1, n_2

Γίνεται με τη βοήθεια των (σχ. Η-51,52) οπότε βρίσκουμε:

$$\left.\begin{aligned} n_1 &= 1\Big/\sqrt{\frac{1}{n_o^2} - (r + dp_4)\frac{E_o}{\sqrt{3}} + \frac{1}{n_o^4}\left(g_o + \frac{2}{\sqrt{3}}\zeta^{eff}E_o\right)} = n_L \\ n_2 &= 1\Big/\sqrt{\frac{1}{n_o^2} - (r + dp_4)\frac{E_o}{\sqrt{3}} - \frac{1}{n_o^4}\left(g_o + \frac{2}{\sqrt{3}}\zeta^{eff}E_o\right)} = n_R \end{aligned}\right\} \qquad \text{(H-129)}$$

7) *Προσδιορισμός των ιδιοκαταστάσεων* $\mathbf{D}_1, \mathbf{D}_2$

Οι ιδιοκαταστάσεις (καταστάσεις πόλωσης) των $\mathbf{D}_1, \mathbf{D}_2$ με τη μορφή κανονικοποιημένων διανυσμάτων Jones δίνονται από τις (σχ. Η-53):

$$\mathbf{D}_1 = \begin{pmatrix} \cos\Phi \\ e^{-i\mathrm{A}}\sin\Phi \end{pmatrix} \quad , \quad \mathbf{D}_2 = \begin{pmatrix} -e^{i\mathrm{A}}\sin\Phi \\ \cos\Phi \end{pmatrix}$$

όπου $\mathrm{A} = \arg\left(B''_{12}\right) = \arctan\left(\mathrm{Im}\left(B''_{12}\right)/\mathrm{Re}\left(B''_{12}\right)\right)$ και επειδή: $\mathrm{Re}\left(B''_{12}\right) = 0 \Rightarrow$ $\mathrm{A} = +90^o$. Δεδομένου τέλος ότι: $\Phi = +45^o$ θα έχουμε:

$$\mathbf{D}_1 \equiv \mathbf{D}_L = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} \qquad \mathbf{D}_2 \equiv \mathbf{D}_R = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} \tag{H-130}$$

Δηλ. προκύπτουν κυκλικά πολωμένες ιδιοκαταστάσεις πόλωσης (αριστερόστροφη η $\mathbf{D}_1$ και δεξιόστροφη η $\mathbf{D}_2$).

8) Προσδιορισμός των μιγαδικών μεταβλητών πόλωσης $\chi_1\left(\mathbf{D}_1\right), \chi_2\left(\mathbf{D}_2\right)$

Από τη (σχ. Η-68) θα έχουμε:

$$\mathbf{D}_1 \;\rightarrow\; \chi_1 = \frac{D_1^{(2)}}{D_1^{(1)}} = \frac{\left|D_1^{(2)}\right|}{\left|D_1^{(1)}\right|} e^{i\left(\phi_1^{(2)} - \phi_1^{(1)}\right)} = \frac{\sin\Phi}{\cos\Phi} e^{-i\mathrm{A}} = \tan\Phi e^{-i\mathrm{A}} \Rightarrow \chi_1 = -i \tag{H-131α}$$

$$\mathbf{D}_2 \;\rightarrow\; \chi_2 = \frac{D_2^{(2)}}{D_2^{(1)}} = \frac{\left|D_2^{(2)}\right|}{\left|D_2^{(1)}\right|} e^{i\left(\phi_2^{(1)} - \phi_2^{(1)}\right)} = -\frac{\cos\Phi}{\sin\Phi} e^{-i\mathrm{A}} = -\cot\Phi e^{-i\mathrm{A}} \Rightarrow \chi_2 = i \tag{H-131β}$$

9) Προσδιορισμός των αζιμουθιακών γωνιών ψ_1, ψ_2

Από τη (σχ. Η-74): $\tan 2\psi_m = \dfrac{2\,\mathrm{Re}\left(\chi_m\right)}{1 - \left|\chi_m\right|^2}$ $m = 1, 2$ και τις (σχ. Η-131) έχουμε:

$$\left.\begin{aligned} \tan 2\psi_1 &= \frac{2\,\mathrm{Re}\left(\chi_1\right)}{1 - \left|\chi_1\right|^2} = \frac{0}{1 - \left|\chi_1\right|^2} = 0 \Rightarrow \psi_1 = 0 \\ \tan 2\psi_2 &= \frac{2\,\mathrm{Re}\left(\chi_2\right)}{1 - \left|\chi_2\right|^2} = \frac{0}{1 - \left|\chi_2\right|^2} = 0 \Rightarrow \psi_2 = 0 \end{aligned}\right\} \tag{H-132}$$

Πράγματι το παραπάνω αποτέλεσμα ισχύει, επειδή οι ιδιοκαταστάσεις είναι κυκλικά πολωμένες.

10) Προσδιορισμός των ελλειπτικών γωνιών $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ και των ελλειπτικοτήτων $e_1 = \tan\varepsilon_1$, $e_2 = \tan\varepsilon_2$

Από τις (σχ. Η-76): $\sin 2\varepsilon_m = \dfrac{2\,\mathrm{Im}\,\chi_m}{1+|\chi_m|^2}$ $m = 1,2$ και τις (σχ. Η-131) έχουμε:

$$\left.\begin{aligned}
&\sin 2\varepsilon_1 = \frac{2\,\mathrm{Im}\,\chi_1}{1+|\chi_1|^2} = \frac{-2}{2} = -1 \Rightarrow 2\varepsilon_1 = -90^o \Rightarrow \varepsilon_1 = -45^o \Rightarrow \\
&\qquad\qquad \tan\varepsilon_1 = -1 < 0 \Rightarrow \text{Α.Κ.Π. ιδιοκατάσταση} \\
&\sin 2\varepsilon_2 = \frac{2\,\mathrm{Im}\,\chi_2}{1+|\chi_2|^2} = \frac{2}{2} = 1 \Rightarrow 2\varepsilon_2 = 90^o \Rightarrow \varepsilon_2 = 45^o \Rightarrow \\
&\qquad\qquad \tan\varepsilon_2 = 1 > 0 \Rightarrow \text{Α.Κ.Π. ιδιοκατάσταση}
\end{aligned}\right\} \qquad \text{(Η-133)}$$

Όσον αφορά τις ελλειπτικότητες: $|e_1| = |e_2| = 1 \Rightarrow$ Κ.Π.Φ.

Προσδιορισμός του ηλεκτροστροφικού συντελεστή ζ_{14}^{eff} των κρυστάλλων των σιλλενιτών

Ο ηλεκτροστροφικός συντελεστής ζ_{14}^{eff} για κρυστάλλους του κυβικού συστήματος της τάξης (23) (σιλλενίτες), είναι δυνατόν να προσδιοριστεί τελικά μέσω των δ.δ. των ιδιοκαταστάσεών του, οι οποίοι προσδιορίζουν τη συνολική του στροφικότητα, συμπεριλαμβανομένης και αυτής που οφείλεται στο επαγόμενο φαινόμενο της ηλεκτροστροφικότητας. Τότε, για την συγκεκριμένη περίπτωση τομής του κρυστάλλου και εφαρμογής του ηλ. πεδίου δηλ. εφαρμογή πεδίου και διεύθυνση διάδοσης κατά την $\langle 111 \rangle$, η στροφική ικανότητα ρ' δίνεται από τη (σχ. 7.1.8α):

$$\rho' = \frac{\pi}{\lambda_o}\left(n_R - n_L\right) \qquad \text{(Η-134)}$$

όπου οι δ.δ. n_R, n_L θα δίνονται από τις (σχ. Η-129):

$$\left.\begin{aligned} n_L &= 1\Big/\sqrt{\frac{1}{n_o^2}-\left(r+dp_4\right)\frac{E_o}{\sqrt{3}}+\frac{1}{n_o^4}\left(g_o+\frac{2}{\sqrt{3}}\zeta^{eff}E_o\right)} \\ n_R &= 1\Big/\sqrt{\frac{1}{n_o^2}-\left(r+dp_4\right)\frac{E_o}{\sqrt{3}}-\frac{1}{n_o^4}\left(g_o+\frac{2}{\sqrt{3}}\zeta^{eff}E_o\right)} \end{aligned}\right\} \quad \text{(H-135)}$$

στις οποίες συμπεριλαμβάνεται ο προς υπολογισμό συντελεστής $\zeta_{41}=\zeta^{eff}$. Μια τυπική τιμή για το ηλ. πεδίο που χρησιμοποιείται στα πειράματα, είναι η $E_o = 1\text{kV/cm} = 10^5\,\text{V/m}$. Παρομοίως για τον ενεργό ηλεκτροοπτικό συντελεστή γνωρίζουμε ότι $r_{eff}=r+dp_4 \simeq 3.5\times10^{-12}\,\text{m/V}$. Το $g_o \simeq 28.5\times10^{-5}$ και ο δείκτης διάθλασης $n_o \simeq 2.615$. Οι τιμές αυτές αφορούν τον κρύσταλλο BGO για μήκος κύματος στο κενό $\lambda_o = 514.5\text{nm}$. Με βάση αυτά τα δεδομένα υπολογίζουμε ότι η τιμή του προσθετέου $\frac{1}{n_o^4}\left(g_o+\frac{2}{\sqrt{3}}\zeta^{eff}E_o\right)$ στην υπόριζο ποσότητα των σχέσεων που μας δίνουν τους δ.δ. n_R, n_L, είναι κατά δύο τάξεις μεγέθους μεγαλύτερη από αυτήν της ποσότητας $\left(r+dp_4\right)\frac{E_o}{\sqrt{3}}$. Επομένως η δεύτερη σε πρώτη προσέγγιση μπορεί να παραλειφθεί όσον αφορά τον προσδιορισμό των n_R, n_L. Τότε οι τελευταίοι μπορούν να γραφούν:

$$\left.\begin{aligned} n_L &= 1\Big/\sqrt{\frac{1}{n_o^2}+\frac{1}{n_o^4}\left(g_o+\frac{2}{\sqrt{3}}\zeta^{eff}E_o\right)} \Rightarrow \frac{1}{n_L^2}-\frac{1}{n_o^2}=\frac{1}{n_o^4}\left(g_o+\frac{2}{\sqrt{3}}\zeta^{ff}E_o\right) \\ n_R &= 1\Big/\sqrt{\frac{1}{n_o^2}-\frac{1}{n_o^4}\left(g_o+\frac{2}{\sqrt{3}}\zeta^{eff}E_o\right)} \Rightarrow \frac{1}{n_R^2}-\frac{1}{n_o^2}=-\frac{1}{n_o^4}\left(g_o+\frac{2}{\sqrt{3}}\zeta^{eff}E_o\right) \end{aligned}\right\} \quad \text{(H-136)}$$

Μετά από πράξεις και δεχόμενοι την προσέγγιση: $n_L \cong n_o$, $n_R \cong n_o$ βρίσκουμε τελικά:

$$\left.\begin{aligned} n_L &= n_o-\frac{1}{2n_o}\left(g_o+\frac{2}{\sqrt{3}}\zeta^{eff}E_o\right) \\ n_R &= n_o+\frac{1}{2n_o}\left(g_o+\frac{2}{\sqrt{3}}\zeta^{eff}E_o\right) \end{aligned}\right\} \quad \text{(H-137)}$$

Επομένως για να υπολογίσουμε τη στροφή του επιπέδου πόλωσης ανά μονάδα μήκους, θ' αντικαταστήσουμε τις τελευταίες στη (σχ. Η-20) από όπου και βρίσκουμε:

$$\rho' = \frac{\pi}{\lambda_o}\left(n_R - n_L\right) = \frac{\pi}{\lambda_o n_o}\left(g_o + \frac{2}{\sqrt{3}}\zeta^{eff}E_o\right) = \frac{\pi g_o}{\lambda_o n_o} + \frac{\pi}{\lambda_o n_o}\frac{2}{\sqrt{3}}\zeta^{eff}E_o \qquad \text{(H-138)}$$

Αλλά ο παράγοντας $\frac{\pi g_o}{\lambda_o n_o}$ είναι η στροφική ικανότητα του κρυστάλλου λόγω μόνο της οπτικής του ενεργότητας. Πράγματι επειδή $\rho = \frac{\pi}{\lambda_o}\left(n_R^o - n_L^o\right)$ όπου τώρα:

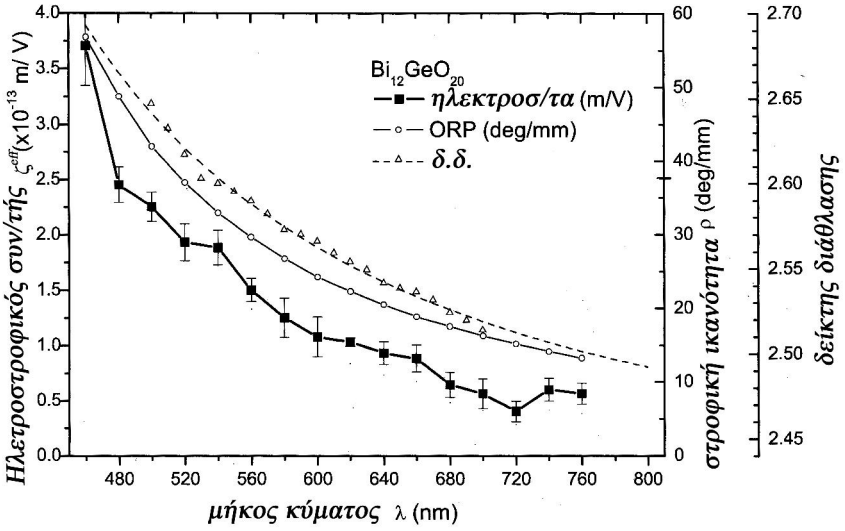
$$n_L^o = n_o - \frac{g_o}{2n_o} \quad , \quad n_R^o = n_o + \frac{g_o}{2n_o} \qquad \text{(H-139)}$$

θα έχουμε $\rho = \pi g_o / \left(\lambda_o n_o\right)$ (H-140)

Επομένως : $\Delta\rho = \rho' - \rho = \frac{2\pi}{\sqrt{3}\lambda_o n_o}\zeta^{eff}E_o$ (H-141)

Η ποσότητα $\Delta\rho = \rho' - \rho$ μπορεί να προσδιοριστεί πειραματικά. Το τελευταίο επιτυγχάνεται μετρώντας το αζιμούθιο μεταξύ ενός προσπίπτοντος γραμμικά πολωμένου φωτός στη διεύθυνση $\langle 111 \rangle$ πριν τον κρύσταλλο και του γραμμικά πολωμένου φωτός μετά την έξοδό του από αυτόν.

Στο (Σχ. Η-9) παραθέτουμε τις καμπύλες διασκεδασμού (δηλ. τις τιμές για



(Σχ. Η-9)

διάφορα μ.κ.) α) Της στροφικής ικανότητας $\rho(\lambda)$ β) Του δ.δ. $n_o(\lambda)$ και γ) Του ηλεκτροστροφικού συντελεστή $\zeta^{eff}(\lambda)$.

Τάξη μεγέθους της κυκλικής διπλοθλαστικότητας

Στην πράξη η διαφορά $n_R - n_L$ των δ.δ. των δύο ιδιοκαταστάσεων για ένα οπτικά ενεργό υλικό είναι πολύ μικρή συγκρινόμενη με την μονάδα. Στα περισσότερα από αυτά είναι της τάξης του 10^{-4} και ακόμη μικρότερη. Επίσης γνωρίζουμε ότι για τα συνήθη ανισότροπα υλικά η διπλοθλαστικότητά τους είναι της τάξης από 10^{-3} έως το πολύ 10^{-1} (Π.χ. από τον (Πίν. 5.4.5) για τον Χαλαζία και την Ισλανδική κρύσταλλο (Ασβεστίτη) με $\lambda_o = 546.72\text{nm}$: $|\Delta n| = 9\times10^{-3}$ και $|\Delta n| = 1.73\times10^{-1}$ αντίστοιχα). Παρά το μικρό όμως μέγεθος της κυκλικής διπλοθλαστικότητας $n_R - n_L$, το γεγονός είναι ότι στην εξίσωση που προκύπτει από τη (σχ. 7.1.7α):

$$\psi = \frac{\pi z}{\lambda_o}(n_R - n_L) \qquad \text{(H-142)}$$

η οποία μας δίνει τη γωνία στροφής ψ, το λ_o είναι πολύ μικρό σε σχέση με το μακροσκοπικό μέγεθος z που είναι το πάχος του διανυομένου από το φως υλικού. Συνεπώς οι τιμές της γωνίας στροφής ψ θα είναι αρκετά μεγάλες.

Σαν παράδειγμα αναφέρουμε: α) Τον οπτικά ενεργό κρύσταλλο $Bi_{12}GeO_{20}$ (BGO) του κυβικού συστήματος της τάξης (23). Τότε με την βοήθεια των (σχ. H-139,142) βρίσκουμε ότι:

$$\psi = \pi g_o / (\lambda_o n_o) \qquad \text{(H-143)}$$

Για $z = 1\text{mm}\,(\psi \equiv \rho)$ και μ.κ. $\lambda_o = 0.5145\times10^{-3}\text{mm}$ (γραμμή του Laser Ar^+). Επίσης κατά τα γνωστά $g_o \simeq 28.5\times10^{-5}$ και $n_o \simeq 2.615$. Θα έχουμε: $\psi = 0.6608\text{rad}$ δηλ. $\psi = 37.86^o$. Το αποτέλεσμα αυτό επιβεβαιώνεται και από την καμπύλη του (Σχ. H-9) που μας δίνει το διασκεδασμό της στροφικής ικανότητας ρ για το (BGO). β) Το δεύτερο παράδειγμα αναφέρεται στον κρύσταλλο του Χαλαζία (α-quartz) για τον οποίο $n_R - n_L = 7.1\times10^{-5}$. Τότε για $z = 1\text{mm}$ και $\lambda_o = 0.5893\times10^{-3}\text{mm}$ (κίτρινη γραμμή της λυχνίας του Na) από τη (σχ. H-142) βρίσκουμε: $\psi = 0.379\text{rad}$ δηλ. $\psi = 21.7^o$. Ο α-Χαλαζίας είναι ο λεγόμενος χαμηλής

θερμοκρασιακής σύνθεσης και ανήκει στο τριγωνικό σύστημα συμμετρίας στην τάξη (32) (Σχ. 5.3.4). Η προαναφερόμενη κυκλική διπλοθλαστικότητά του αφορά διάδοση κατά μήκος του οπτικού του άξονα. Το αριθμητικό αυτό αποτέλεσμα, επιβεβαιώνεται και από το διάγραμμα του (Σχ. 7.1.6).

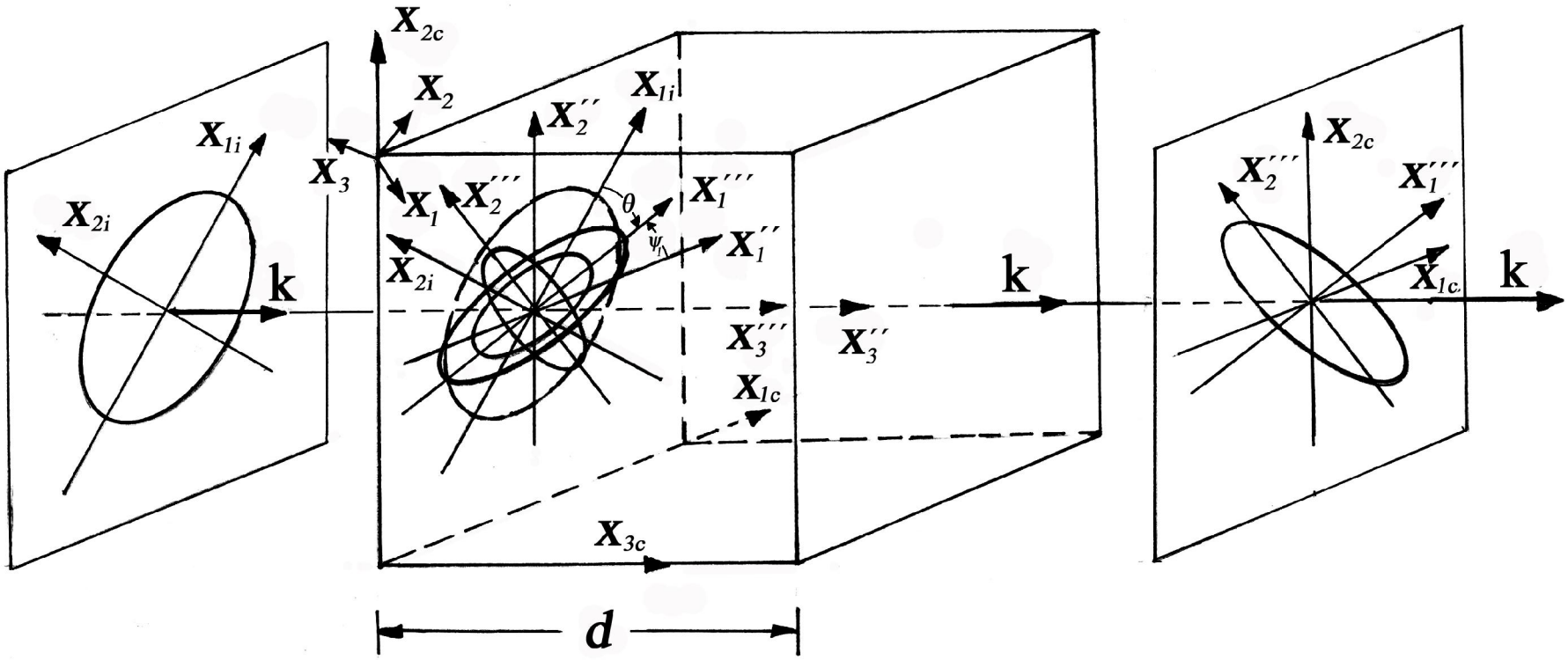
Διάδοση του φωτός μιας τυχαίας κατάστασης πόλωσης σε απόσταση d στο εσωτερικό ενός κρυστάλλου (τυχαίας τομής σε σχέση με το σ.σ. των κυρίων αξόνων), κατά τη διεύθυνση μιας κυματοκαθέτου $\mathbf{k}$, όταν σ' αυτόν δρα ένα ηλεκτρικό πεδίο σε μια τυχαία διεύθυνση

Θεωρούμε στη γενικότερη περίπτωση (Σχ. Η-10), ένα κρύσταλλο φυσικά διπλοθλαστικό και φυσικά οπτικά ενεργό τυχαίας τομής ως προς το σ.σ. των κυρίων αξόνων x_1, x_2, x_3. Ως προς το ίδιο σύστημα εφαρμόζουμε το ηλεκτρικό πεδίο $\mathbf{E}(E_1, E_2, E_3)$. Τότε κατά τα γνωστά, στη διεύθυνση μιας κυματοκαθέτου $\mathbf{k}$ είμαστε σε θέση να προσδιορίσουμε τις διαδιδόμενες ιδιοκαταστάσεις $\mathbf{D}_1, \mathbf{D}_2$ οι οποίες εν γένει είναι ελλειπτικά πολωμένες, ορθογώνιες και αντίθετης στροφικότητας δηλ. ***ορθοκανονικές (orthonormal)***. Επίσης μπορούν να προσδιοριστούν οι ιδιοτιμές $1/n_1^2$, $1/n_2^2$ από τις οποίες προσδιορίζονται οι δ.δ. n_1, n_2 και κατά προέκταση οι ταχύτητες φάσης (ταχύτητες διάδοσης των $\mathbf{D}_1, \mathbf{D}_2$) κατά τη διεύθυνση της $\mathbf{k}$. Η συνολικά τότε προκύπτουσα διπλοθλαστικότητα $\Delta n = n_2 - n_1$ και κατά προέκταση η διαφορά φάσης ϕ μεταξύ των $\mathbf{D}_1, \mathbf{D}_2$ όπου:

$$\phi = \phi_2 - \phi_1 = \frac{2\pi}{\lambda} n_2 d - \frac{2\pi}{\lambda} n_1 d = \frac{2\pi}{\lambda}\left(n_2 - n_1\right) d \qquad \text{(H-144)}$$

θα περιλαμβάνει την επίδραση της φυσικής (και επαγόμενης λόγω του ηλ. πεδίου) διπλοθλαστικότητας, καθώς και της φυσικής (και επαγόμενης λόγω του ηλ. πεδίου) κυκλικής διπλοθλαστικότητας, εξαιτίας της οπτικής ενεργότητας του κρυστάλλου. Όπου λ το μ.κ. στο κενό της προσπίπτουσας ακτινοβολίας και d το διανυόμενο πάχος το κρυστάλλου.

Το προς επίλυση πρόβλημα είναι το εξής: Έστω ότι κάθετα στην μπρος επιφάνεια του κρυστάλλου και κατά τη διεύθυνση της κυματοκαθέτου $\mathbf{k}$ προσπίπτει φως μιας εν γένει ελλειπτικής κατάστασης πόλωσης ως προς το σ.σ. x_{1i}, x_{2i}, x_{3i}. Πρόκειται για ένα σ.σ. εισόδου στο οποίο περιγράφεται η κατάσταση αυτή και του



(Σχ. Η-10)

οποίου ο άξονας x_{3i} συμπίπτει με αυτόν της κυματοκαθέτου. Το x_{1i}, x_{2i} είναι στραμμένο κατά γωνία θ σε σχέση με το σ.σ. x_1''', x_2''' που είναι αυτό των ιδιοκαταστάσεων του κρυστάλλου και $x_{3i} \parallel x_3''' \parallel \mathbf{k}$. Το σ.σ. x_1''', x_2''' είναι στραμμένο κατά γωνία ψ_1 σε σχέση με το σύστημα x_1'', x_2'' και $x_3''' \parallel x_3''$. Το τελευταίο είναι το γνωστό σ.σ. της κυματοκαθέτου $\mathbf{k}$ (Σχ. Η-10) το οποίο προσδιορίζεται αυστηρά σε σχέση με το σ.σ. x_1, x_2, x_3 των κυρίων αξόνων και κατά προέκταση ως προς αυτό της επιφάνειας εξόδου του φωτός από τον κρύσταλλο δηλ. το σ.σ. του εργαστηρίου x_{1c}, x_{2c}, x_{3c}. Ποια θα είναι τελικά τα στοιχεία της εν γένει ελλ. πολωμένης κατάστασης πόλωσης του φωτός κατά την έξοδό της από τον κρύσταλλο αφού διανύσει απόσταση d. Δηλ. ποιο θα είναι το αζιμούθιό της , η ελλειπτικότητα και η στροφικότητά της; Τέλος ποια θα είναι η ένταση I του φωτός, κατά την έξοδό του μετά την πρόσπτωσή του σ' ένα αναλυτή αζιμουθιακής γωνίας θ_A ως προς τον άξονα x_{1c};

Ταυτίζουμε κατ' αρχή το σ.σ. x_{1i}, x_{2i} με τον μεγάλο και τον μικρό άξονα της έλλειψης του προσπίπτοντος φωτός. Επομένως το αζιμούθιο του μεγάλου άξονα της έλλειψης ως προς το x_1''', x_2''' είναι η γωνία θ. Τότε το διάνυσμα Jones αυτού του φωτός ως προς το x_{1i}, x_{2i} θα δίνεται (βλ. Άσκ. 10-Λυμένη) από τη σχέση:

$$\mathbf{E}_i = \begin{pmatrix} E_{x_{1i}} \\ E_{x_{2i}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varepsilon \\ i\sin\varepsilon \end{pmatrix} \tag{H-145}$$

όπου ε η ελλειπτική γωνία της έλλειψης και το διάνυσμα είναι κανονικοποιημένο. Γνωρίζουμε όμως ότι κατά τη διεύθυνση μιας κυματοκαθέτου διαδίδονται αναλύοτες μόνο εκάστη των ιδιοκαταστάσεων πόλωσης και μόνο αυτές. Επομένως οποιοδήποτε προσπίπτον στον κρύσταλλο πεδίο ορισμένης κατάστασης πόλωσης θα πρέπει: α) Να το ανάγουμε στο σ.σ. x_1''', x_2''' (των ιδιοκαταστάσεων) και β) Να το εκφράσουμε συναρτήσει των δύο νέων διανυσμάτων βάσης, που δεν είναι άλλα παρά οι δύο εν γένει ελλειπτικά πολωμένες ιδιοκαταστάσεις $\mathbf{D}_1, \mathbf{D}_2$ οι οποίες κατά τα γνωστά δίνονται από τις (σχ. Η-53). Η έκφραση λοιπόν του $\mathbf{E}_i$ από το σ.σ. x_{1i}, x_{2i} στο x_1''', x_2''' θα γίνει με μια στροφή του πρώτου κατά γωνία θ. Δηλ.

$$\left.\begin{aligned} \underset{x_1''', x_2'''}{\mathbf{E}}(0) &= \begin{pmatrix} E_{x_1}'''(0) \\ E_{x_2}'''(0) \end{pmatrix} = R(\theta)\mathbf{E}_i = \\ &= \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_{x_{1i}} \\ E_{x_{2i}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\varepsilon \\ i\sin\varepsilon \end{pmatrix} \end{aligned}\right\} \tag{H-146}$$

Όπου $\underset{x_1''',x_2'''}{\mathbf{E}}(0)$ το προσπίπτον τελικά εν γένει ελλειπτικά πολωμένο φως στην είσοδο του κρυστάλλου (για $d=0$) εκφρασμένο στο σ.σ. x_1''',x_2'''.

Το δεύτερο στάδιο της διαδικασίας είναι να εκφράσουμε το διάνυσμα Jones $\underset{x_1''',x_2'''}{\mathbf{E}}(0)$ με τη βοήθεια όμως μιας νέας διανυσματικής βάσης. Για την περίπτωσή μας τα δύο διανύσματα βάσης θα είναι οι δύο ελλειπτικά πολωμένες ιδιοκαταστάσεις πόλωσης $\mathbf{D}_1,\mathbf{D}_2$. Από φυσική άποψη αυτό σημαίνει ότι η ελλειπτικά πολωμένη κατάσταση πόλωσης στην είσοδο του κρυστάλλου (στο σ.σ. x_1''',x_2''') ως προς τη νέα βάση των $\mathbf{D}_1,\mathbf{D}_2$ δηλ. το $\underset{\mathbf{D}_1,\mathbf{D}_2}{\mathbf{E}}(0)$ μπορεί να εκφραστεί σαν το άθροισμα δύο προσθετέων :

$$\underset{x_1''',x_2'''}{\mathbf{E}}(0)=\underset{\mathbf{D}_1,\mathbf{D}_2}{\mathbf{E}}(0)=\mathrm{E}_1\mathbf{D}_1+\mathrm{E}_2\mathbf{D}_2 \qquad \text{(H-147)}$$

Όπου $\mathrm{E}_1,\mathrm{E}_2$ δύο μιγαδικοί εν γένει αριθμοί. Δηλ. τα $\mathbf{D}_1,\mathbf{D}_2$ πολλαπλασιαζόμενα έκαστο με έναν παράγοντα πλάτους και φάσης, μας δίνουν το διάνυσμα στην είσοδο του κρυστάλλου σαν γραμμικό συνδυασμό των $\mathbf{D}_1,\mathbf{D}_2$. Αντικειμενικός μας σκοπός είναι να προσδιορίσουμε τους συντελεστές $\mathrm{E}_1,\mathrm{E}_2$ έτσι ώστε να ισχύει η (σχ. H-147). Γνωρίζουμε όμως ότι τα διανύσματα Jones $\mathbf{D}_1,\mathbf{D}_2$ είναι ορθοκανονικά και γραμμένα στο σ.σ. x_1''',x_2''' με βάση τις (σχ. H-53) είναι:

$$\mathbf{D}_1=\begin{pmatrix}\cos\Phi\\ e^{-i\mathrm{A}}\sin\Phi\end{pmatrix} \quad , \quad \mathbf{D}_2=\begin{pmatrix}-e^{i\mathrm{A}}\sin\Phi\\ \cos\Phi\end{pmatrix} \qquad \text{(H-148)}$$

Δηλ. πληρούν τις σχέσεις:

$$\left.\begin{aligned}\mathbf{D}_1\cdot\mathbf{D}_2^H&=\mathbf{D}_1^H\cdot\mathbf{D}_2=0\\ \mathbf{D}_1\cdot\mathbf{D}_1^H&=\mathbf{D}_2\cdot\mathbf{D}_2^H=1\end{aligned}\right\} \qquad \text{(H-149)}$$

Η αντικατάσταση των (σχ. H-148) στην (σχ. H-147) μας δίνει:

$$\begin{pmatrix}E_{x_1}'''(0)\\ E_{x_2}'''(0)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\Phi & -e^{i\mathrm{A}}\sin\Phi\\ e^{-i\mathrm{A}}\sin\Phi & \cos\Phi\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathrm{E}_1\\ \mathrm{E}_2\end{pmatrix} \text{ ή } \begin{pmatrix}\mathrm{E}_1\\ \mathrm{E}_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\Phi & -e^{i\mathrm{A}}\sin\Phi\\ e^{-i\mathrm{A}}\sin\Phi & \cos\Phi\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}E_{x_1}'''(0)\\ E_{x_2}'''(0)\end{pmatrix}$$

Και επειδή: $\begin{pmatrix} \cos\Phi & -e^{i\mathrm{A}}\sin\Phi \\ e^{-i\mathrm{A}}\sin\Phi & \cos\Phi \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \cos\Phi & e^{i\mathrm{A}}\sin\Phi \\ -e^{-i\mathrm{A}}\sin\Phi & \cos\Phi \end{pmatrix}$ με τη βοήθεια της (σχ. Η-146):

$$\begin{pmatrix} \mathrm{E}_1 \\ \mathrm{E}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\Phi & e^{i\mathrm{A}}\sin\Phi \\ -e^{-i\mathrm{A}}\sin\Phi & \cos\Phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\varepsilon \\ i\sin\varepsilon \end{pmatrix} \qquad \text{(H-150)}$$

ή:

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{E}_1 &= \cos\Phi\left(\cos\theta\cos\varepsilon + i\sin\theta\sin\varepsilon\right) + e^{i\mathrm{A}}\sin\Phi\left(-\sin\theta\cos\varepsilon + i\cos\theta\sin\varepsilon\right) \\ \mathrm{E}_2 &= -e^{-i\mathrm{A}}\sin\Phi\left(\cos\theta\cos\varepsilon + i\sin\theta\sin\varepsilon\right) + \cos\Phi\left(-\sin\theta\cos\varepsilon + i\cos\theta\sin\varepsilon\right) \end{aligned}\right\} \qquad \text{(H-151)}$$

Επομένως (από τις (σχ. Η-147,148)):

$$\underset{\mathbf{D}_1,\mathbf{D}_2}{\mathbf{E}}(0) = \begin{pmatrix} E_{\mathbf{D}_1}(0) \\ E_{\mathbf{D}_2}(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{E}_1\cos\Phi \\ \mathrm{E}_1 e^{-i\mathrm{A}}\sin\Phi \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\mathrm{E}_2 e^{i\mathrm{A}}\sin\Phi \\ \mathrm{E}_2\cos\Phi \end{pmatrix} \qquad \text{(H-152)}$$

Γνωρίζουμε όμως ότι: Το πεδίο που αντιστοιχεί στον πρώτο προσθετέο της (σχ. Η-152), θα διαδοθεί με ταχύτητα φάσης που καθορίζεται από το δ.δ. n_1 (διαταραχή παράλληλη με την ιδιοκατάσταση $\mathbf{D}_1$). Επίσης το πεδίο που αντιστοιχεί στο δεύτερο προσθετέο της (σχ. Η-152), θα διαδοθεί με ταχύτητα φάσης που καθορίζεται από το δ.δ. n_2 (διαταραχή παράλληλη με την ιδιοκατάσταση $\mathbf{D}_2$). Επομένως κατά την έξοδό τους από τον κρύσταλλο μετά τη διάνυση απόστασης d (όσο το πάχος του), οι συνιστώσες του πρώτου προσθετέου θα λάβουν μια 'καθυστέρηση' φάσης $e^{-i\phi_1}$ ενώ του δευτέρου $e^{-i\phi_2}$ όπου ϕ_1, ϕ_2 δίνονται από τη (σχ. Η-144). Δηλ.

$$\phi_1 = \frac{2\pi}{\lambda} n_1 d \quad , \quad \phi_2 = \frac{2\pi}{\lambda} n_2 d \qquad \text{(H-153)}$$

Επομένως το διάνυσμα Jones $\underset{\mathbf{D}_1,\mathbf{D}_2}{\mathbf{E}}(d)$ στην έξοδο του κρυστάλλου (με την προϋπόθεση ότι δεν εμφανίζει απορρόφηση) εκφρασμένο ως προς το σ.σ. x_1''', x_2''' των ιδιοκαταστάσεων θα δίνεται από τη σχέση:

$$\underset{\mathbf{D}_1,\mathbf{D}_2}{\mathbf{E}}(d) = \begin{pmatrix} E_{\mathbf{D}_1}(d) \\ E_{\mathbf{D}_2}(d) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{E}_1\cos\Phi e^{-i\phi_1} \\ \mathrm{E}_1 e^{-i\mathrm{A}}\sin\Phi e^{-i\phi_1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\mathrm{E}_2 e^{i\mathrm{A}}\sin\Phi e^{-i\phi_2} \\ \mathrm{E}_2\cos\Phi e^{-i\phi_2} \end{pmatrix} \qquad \text{(H-154)}$$

Όπου τα ϕ_1, ϕ_2 δίνονται από τις (σχ. Η-153). Οι n_1, n_2 από τις (σχ. Η-51,52) και η γωνία Φ από τη (σχ. Η-50) και επειδή $e^{i\mathrm{A}} = B''_{12} / \left| B''_{12} \right|$ η A δίνεται από τη σχέση:

$$\mathrm{A} = \arctan \frac{\mathrm{Im}\left(B''_{12}\right)}{\mathrm{Re}\left(B''_{12}\right)} \tag{H-155}$$

όπου B''_{12} στοιχείο του πίνακα $\left[B\right]''$ που δίνεται από τη (σχ. Η-41).

Ανάγουμε τελικά το διάνυσμα $\underset{\mathbf{D}_1,\mathbf{D}_2}{\mathbf{E}}\left(d\right)$ από το σ.σ. των ιδιοκαταστάσεων x'''_1, x'''_2 στο σ.σ. x_{1c}, x_{2c} του εργαστηρίου, εκτελώντας μία στροφή κατά γωνία ψ. Τότε θα έχουμε:

$$\underset{x_{1c},x_{2c}}{\mathbf{E}}\left(d\right) = \begin{pmatrix} E_{x_{1c}}\left(d\right) \\ E_{x_{2c}}\left(d\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\psi & \sin\psi \\ -\sin\psi & \cos\psi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_{\mathbf{D}_1}\left(d\right) \\ E_{\mathbf{D}_2}\left(d\right) \end{pmatrix} \tag{H-156}$$

Προσδιορισμός των στοιχείων του ελλειπτικά πολωμένου εν γένει φωτός μετά την έξοδό του από τον κρύσταλλο, στο σ.σ. x_{1c}, x_{2c} του εργαστηρίου

Έστω ότι το φως μετά την έξοδό του από τον κρύσταλλο περιγράφεται από το διάνυσμα Jones της (σχ. Η-156) ως προς το σ.σ. x_{1c}, x_{2c} του εργαστηρίου. Επειδή γενικά τα δύο στοιχεία του πίνακα αυτού δηλ. οι συνιστώσες του διανύσματος Jones είναι μιγαδικοί αριθμοί, τότε το $\underset{x_{1c},x_{2c}}{\mathbf{E}}\left(d\right)$ μπορεί να γραφεί με τη μορφή:

$$\underset{x_{1c},x_{2c}}{\mathbf{E}}\left(d\right) = \begin{pmatrix} A + iB \\ C + iD \end{pmatrix} \tag{H-157}$$

Σε πολική μορφή οι δύο συνιστώσες του μπορούν να γραφούν:

$$\underset{x_{1c},x_{2c}}{\mathbf{E}}\left(d\right) = \begin{pmatrix} A + iB \\ C + iD \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{A^2 + B^2}\, e^{i \arctan B/A} \\ \sqrt{C^2 + D^2}\, e^{i \arctan D/C} \end{pmatrix} \tag{H-158}$$

Τότε με βάση τις (σχ. Η-68) η μιγαδική μεταβλητή πόλωσης (CPV) χ θα δίνεται από τη σχέση:

$$\chi = re^{i\Delta\delta} \quad \text{όπου} \quad r = \sqrt{\frac{C^2 + D^2}{A^2 + B^2}} \ , \ \Delta\delta = \arctan\frac{D}{C} - \arctan\frac{B}{A} \qquad \text{(H-159)}$$

Οπότε:
$$\mathrm{Im}(\chi) = r\sin\Delta\delta = \sqrt{\frac{C^2 + D^2}{A^2 + B^2}}\sin\left[\arctan\frac{D}{C} - \arctan\frac{B}{A}\right] \qquad \text{(H-160)}$$

και
$$|\chi|^2 = r^2 = \left(C^2 + D^2\right)\Big/\left(A^2 + B^2\right) \qquad \text{(H-161)}$$

Τότε με τη βοήθεια της (σχ. Η-76), μπορούμε να υπολογίσουμε την ελλειπτική γωνία ξ:

$$\sin 2\xi = \frac{2\,\mathrm{Im}(\chi)}{1 + |\chi|^2} = \frac{2\sqrt{\frac{C^2 + D^2}{A^2 + B^2}}\sin\left[\arctan\frac{D}{C} - \arctan\frac{B}{A}\right]}{1 + \frac{C^2 + D^2}{A^2 + B^2}} \qquad \text{(H-162)}$$

και μέσω της σχέσης $\tan\xi = e$ την ελλειπτικότητα του ελλειπτικά πολωμένου φωτός (δηλ. τον λόγο του μικρού προς τον μεγάλο άξονα της έλλειψης).

Η στροφικότητα του εν γένει ελλειπτικά πολωμένου φωτός θα δίνεται κατά τα γνωστά από το πρόσημο του $\Delta\delta$ της (σχ. Η-159). Αν:

$$\Delta\delta > 0 \ \Rightarrow \ \text{Δ.Ε.Π. φως} \ , \ \Delta\delta < 0 \ \Rightarrow \ \text{Α.Ε.Π. φως} \ , \ \Delta\delta = 0 \ \Rightarrow \ \text{Γ.Π. φως} \qquad \text{(H-163)}$$

Το τελευταίο στάδιο είναι ο υπολογισμός της αζιμουθιακής γωνίας ψ' ως προς τον άξονα x_{1c} και θα δίνεται από τη (σχ. Η-74):

$\tan 2\psi' = \dfrac{2\,\mathrm{Re}(\chi)}{1 - |\chi|^2}$ όπου: $\mathrm{Re}(\chi) = r\cos\Delta\delta$ και τα $r, \Delta\delta, |\chi|^2$ δίνονται από τις (σχ. Η-159,161). Οπότε:

$$\tan 2\psi' = \frac{2\sqrt{\frac{C^2 + D^2}{A^2 + B^2}}\cos\left[\arctan\frac{D}{C} - \arctan\frac{B}{A}\right]}{1 - \frac{C^2 + D^2}{A^2 + B^2}} \qquad \text{(H-164)}$$

Ο πειραματικός προσδιορισμός των στοιχείων της κατάστασης πόλωσης του φωτός μετά την έξοδό του από τον κρύσταλλο, μπορεί να γίνει με δύο τουλά-

χιστον τρόπους οι οποίοι περιγράφονται αναλυτικά στο (ΠΑΡ/ΜΑ 5) μέσω του λογισμού Jones. Η πρώτη αναφέρεται στη μέθοδο Kent-Lawson και γίνεται με τη βοήθεια π.χ. ενός αντισταθμιστή Babinet (βλ. § 5.7.2). Αφορά τον προσδιορισμό του λόγου των πλατών των δύο συνιστωσών του ηλ. πεδίου καθώς και της διαφοράς φάσης μεταξύ τους και μέσω των (σχ. 1.20,23 Άσκ.1-Λυμένη) στον υπολογισμό του αζιμουθίου , της ελλειπτικότητας και της στροφικότητας του εν γένει ελλειπτικά πολωμένου φωτός. Η δεύτερη αναφέρεται στη χρήση πλακιδίου $\lambda/4$ και αναλυτή και δίνεται περιγραφικά στο: (ΠΕΙΡΑΜΑ Α5 – Ανίχνευση τυχαίας κατάστασης πόλωσης) και υπολογιστικά στο τέλος του (ΠΑΡ/ΤΟΣ 5).

Ένταση του φωτός μετά την έξοδό του από τον κρύσταλλο και τη δίοδό του από έναν αναλυτή αζιμουθιακής γωνίας θ_A ως προς τον άξονα x_{1c}

Στα προηγούμενα μελετήσαμε την πρόσπτωση και τη διάδοση σ' ένα κρύσταλλο με παράλληλες απέναντι έδρες και πάχους d, ενός επιπέδου μονοχρωματικού μετώπου μιας τυχαίας κατάστασης πόλωσης. Η τομή του κρυστάλλου αναφερόταν σε σχέση με το σύστημα συντεταγμένων των κυρίων αξόνων x_1, x_2, x_3 το οποίο εκτός του τριγωνικού και εξαγωνικού συστήματος συμπίπτει με το κρυσταλλογραφικό σύστημα συντεταγμένων. Ο κρύσταλλος μπορεί να υπόκειται σε εξωγενείς δυνάμεις όπως ηλεκτρικά πεδία, μηχανικές τάσεις, θερμοκρασιακές μεταβολές κλπ. Τότε κάτω από αυτές τις συνθήκες και για συγκεκριμένη διεύθυνση της κυματοκαθέτου $\mathbf{k}$ στο εσωτερικό του κρυστάλλου η διάδοση του πεδίου θα εξαρτάται – με βάση τη θεωρία – αποκλειστικά από τις αναπτυσσόμενες ιδιοκαταστάσεις $\mathbf{D}_1, \mathbf{D}_2$. Δηλ. τις μόνες (και μόνο αυτές) ανεξάρτητες πεδιακές συνιστώσες με η βοήθεια των οποίων οποιοδήποτε άλλο προσπίπτον πεδίο στον κρύσταλλο θα μπορούσε να διαδοθεί στο εσωτερικό του σαν γραμμικός συνδυασμός τους. Εκάστη των ιδιοκαταστάσεων αντιστοιχεί – κατά τα γνωστά – σε μια ιδιοτιμή ($1/n^2$) από την οποία συνάγουμε την τιμή του δ.δ. (n) και κατά προέκταση την ταχύτητα φάσης (διάδοσης) της αντίστοιχης ιδιοκατάστασης. Η γνώση αυτών των μεγεθών, οδηγεί στο να μπορούμε να υπολογίζουμε επακριβώς την κατάσταση πόλωσης του εξερχόμενου από τον κρύσταλλο επιπέδου μετώπου κύματος.

Η προαναφερόμενη κατάσταση πόλωσης θα εξαρτάται από παράγοντες που υπεισέρχονται στην καταστατική εξίσωση του κρυστάλλου. Δηλ. τη σχέση μεταξύ των $\mathbf{D}, \mathbf{E}$ μέσω των στοιχείων του πίνακα του τανυστή της αδιαπερατότητας. Εξίσωση που ως γνωστόν προσδιορίζει τις οπτικές του ιδιότητες. Όμως γνωρίζουμε ότι τα στοιχεία του πίνακα του τανυστή της αδιαπερατότητας περιλαμβάνουν τις πλη-

ροφορίες που αφορούν: Τους δείκτες διάθλασης, τους ηλεκτροοπτικούς συντελεστές (γραμμικούς και τετραγωνικούς) στην πρωτεύουσα και δευτερεύουσα έκφρασή τους. Επίσης για την περίπτωση που οι κρύσταλλοι είναι οπτικά ενεργοί, περιλαμβάνονται οι συντελεστές που προσδιορίζουν την οπτική ενεργότητα την ηλεκτροστροφικότητα κλπ. Επομένως το αζιμούθιο, η ελλειπτικότητα και η στροφικότητα του εν γένει ελλειπτικά πολωμένου φωτός στην έξοδο του κρυστάλλου – στοιχεία που μπορούν να προσδιοριστούν πειραματικά – (βλ. ΠΑΡ/ΜΑ 5) και που περιλαμβάνουν τους προαναφερόμενους συντελεστές, είναι δυνατόν να μας οδηγήσουν στον προσδιορισμό τους.

Μια άλλη διαδικασία προσδιορισμού των συντελεστών των ιδιοτήτων των κρυστάλλων, γίνεται με τη βοήθεια μετρήσεων της έντασης του φωτός και πιο συγκεκριμένα αφού αυτό (μετά την έξοδό του από τον κρύσταλλο), προσπέσει σε γραμμικό πολωτή (αναλυτή), με αζιμούθιο του άξονα διέλευσής του θ_A σε σχέση με τον άξονα x_{1c} του συστήματος συντεταγμένων του εργαστηρίου. Κατά τα γνωστά μετρήσεις έντασης του φωτός μπορούν να γίνουν με τη βοήθεια κατάλληλα ηλεκτρικά πολωμένων φωτοδιόδων, φωτοπολλαπλασιαστών (PM) κλπ.

Ο υπολογισμός της έντασης I του φωτός μετά τον πολωτή μπορεί να γίνει ως εξής: Η (σχ. Η-156) μας δίνει το διάνυσμα Jones $\begin{pmatrix} E_{x_{1c}}(d) \\ E_{x_{2c}}(d) \end{pmatrix}$ (πεδίο μετά την έξοδό του από τον κρύσταλλο) εκφρασμένο στο σ.σ. x_{1c}, x_{2c} του εργαστηρίου, συναρτήσει του πεδίου $\begin{pmatrix} E_{D_1}(d) \\ E_{D_2}(d) \end{pmatrix}$ εκφρασμένο στο σ.σ. των ιδιοκαταστάσεων. Επομένως μετά τον πολωτή του οποίου ο πίνακας Jones δίνεται από τη σχέση:

$$J = \begin{pmatrix} \cos^2\theta_A & \sin\theta_A\cos\theta_A \\ \sin\theta_A\cos\theta_A & \sin^2\theta_A \end{pmatrix} \tag{H-165}$$

(σχ. 5.2- ΠΑΡ/ΜΑ 5), το πεδίο $\begin{pmatrix} E_{1\theta_A} \\ E_{2\theta_A} \end{pmatrix}$ θα εκφράζεται με τη μορφή:

$$\left.\begin{aligned} \begin{pmatrix} E_{1\theta_A} \\ E_{2\theta_A} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \cos^2\theta_A & \sin\theta_A\cos\theta_A \\ \sin\theta_A\cos\theta_A & \sin^2\theta_A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_{x_{1c}}(d) \\ E_{x_{2c}}(d) \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \cos^2\theta_A & \sin\theta_A\cos\theta_A \\ \sin\theta_A\cos\theta_A & \sin^2\theta_A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\psi & \sin\psi \\ -\sin\psi & \cos\psi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_{x_{1c}}(d) \\ E_{x_{2c}}(d) \end{pmatrix} \end{aligned}\right\} \tag{H-166}$$

όπου ψ η γωνία στροφής από το σ.σ. $\mathbf{D}_1, \mathbf{D}_2$ στο x_{1c}, x_{2c}. Τελικά με βάση τον ορισμό της κανονικοποιημένης έντασης του φωτός:

$$I = \mathbf{E}^H \cdot \mathbf{E} \tag{H-167}$$

όπου $\mathbf{E}^H$ το μιγαδικό ανάστροφο του διανύσματος Jones: $\mathbf{E} = \begin{pmatrix} E_{1\theta_A} \\ E_{2\theta_A} \end{pmatrix}$, θα έχουμε από την έξοδο του πολωτή :

$$I = \begin{pmatrix} E^*_{1\theta_A} & E^*_{2\theta_A} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_{1\theta_A} \\ E_{2\theta_A} \end{pmatrix} = E^*_{1\theta_A} E_{1\theta_A} + E^*_{2\theta_A} E_{2\theta_A} \tag{H-168}$$

Είναι αυτονόητο ότι η ένταση του φωτός I θα έχει επίσης μια συγκεκριμένη συναρτησιακή εξάρτηση από όλους τους παράγοντες του εξεταζόμενου προβλήματος (συντελεστές ιδιοτήτων του κρυστάλλου, εφαρμοζόμενες εξωγενείς δυνάμεις, είδος της τομής του κρυστάλλου καθώς και τη διεύθυνση της κυματοκαθέτου). Επομένως μετρήσεις της έντασης του φωτός μπορούν να μας οδηγήσουν μέσω μαθηματικής προσαρμογής (fitting) των πειραματικών τιμών με τη συνάρτηση που δίνεται από τη (σχ.Η-168), σε προσδιορισμό ορισμένων συντελεστών του κρυστάλλου με την προϋπόθεση ότι είναι γνωστά τα υπόλοιπα στοιχεία.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ (ΠΑΡΑΡΤΗΜΑΤΟΣ 4) (ΟΠΤΙΚΗ ΤΩΝ ΚΡΥΣΤΑΛΛΩΝ)

1. J.F.Nye: 'Physical properties of crystals'. Clarendon Press – Oxford (1989).
2. Yu I Sirotin, M.P. Shaskolskaya: 'Fundamentals of Crystal Physics'. Mir Publishers Moscow (1982).
3. S.Haussühl: 'Physical properties of crystals'. Wiley – VCH Weiheim (2007).
4. A.Yariv, P.Yeh: 'Optical waves in crystals'. Wiley series in Pure and Applied Optics. N.Y. (1984).
5. A.Yariv: 'Optical Electronics'. Saunters College Publishing (Fourth Ed.) Montreal (1991).
6. A. Ghatak and K.Thyagarajan 'Optical Electronics', Cambridge University Press (1989) .
7. Max Born, Emil. Wolf: 'Principles of Optics'. (7th expanded edition). Cambridge Univ. Press (1999).

8. N. Perelomova, M. M. Tageiva: 'Problems in Crystal Physics'. Mir Publishers Moscow (1983)

9. G. Fowles: 'Introduction to Modern Optics'. Dover Pub. Inc. N.Y. (1978).

10. Th. A. Maldonato and Th. K. Gaylord. 'Electro-optic effect calculations: Simplified procedure for arbitrary cases'. Appl. Optics vol. 27 No. 24 Dec. 1988.

11. Th. A. Maldonato and Th. K. Gaylord. 'Accurate method to determine the eigenstates of polarization in gyrotropic media'. Appl. Optics vol. 28, No. 11 June 1989.

12. Th. A. Maldonato. 'Electro-optic modulators' 'Handbook of Optics' Vol. II 2th edition. O.S.A. 1995. Part 1. Ch. 13.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ 5

Περιγραφή των καταστάσεων πόλωσης και των πολωτικών στοιχείων με τη βοήθεια του λογισμού Jones

Στην (§ 1.3) ασχοληθήκαμε με την ανάδειξη του φαινομένου της πόλωσης των Η/Μ κυμάτων και πιο συγκεκριμένα με αυτά του φωτός. Αποδείξαμε ότι η ένταση **E** ενός επιπέδου αρμονικού κύματος το οποίο διαδίδεται προς τη διεύθυνση z, είναι δυνατόν να παρασταθεί από την επαλληλία (ακριβέστερα σύζευξη) δύο αρμονικών συνιστωσών (κατά x, y) ορθογωνίων μεταξύ τους και καθέτων προς αυτήν. Δηλ.

$$\mathbf{E} = E_x\mathbf{i} + E_y\mathbf{j} \tag{5.1}$$

Οι συνιστώσες του πεδίου E_x, E_y σε μιγαδική μορφή καθώς και τα πραγματικά τους μέρη περιγράφονται κατά τα γνωστά ως εξής:

$$\begin{aligned} E_x &= A_x e^{i(\omega t - kz + \phi_x)} \quad \text{ή} \quad E_x = A_x \cos(\omega t - kz + \phi_x) \\ E_y &= A_y e^{i(\omega t - kz + \phi_y)} \quad \text{ή} \quad E_y = A_y \cos(\omega t - kz + \phi_y) \end{aligned} \tag{5.2}$$

Ανάλογα τώρα με την τιμή του λόγου των πλατών A_y / A_x και τη διαφορά φάσης ϕ όπου $\phi = \phi_y - \phi_x$, μπορούμε να περιγράψουμε όλες τις καταστάσεις πόλωσης (βλ. (Κεφ. 3) και Άσκ.1-Λυμένη). Η σύζευξη βέβαια των δύο συνιστωσών E_x, E_y της διαταραχής, εννοείται μέσα στα όρια του μήκους και του χρόνου συμφωνίας, που καθορίζεται κατά τα γνωστά από τον τρόπο παραγωγής του φωτός στην εκάστοτε πηγή.

Για την επίλυση όμως προβλημάτων διάδοσης του φωτός μέσω πολλών πολωτικών στοιχείων (π.χ. πολωτών, πλακιδίων καθυστέρησης κ.λ.π.) με τη βοήθεια των συνιστωσών της έντασης του ηλεκτρικού πεδίου προκύπτει η εξής δυσκολία: Η αναλυτική έκφραση των E_x, E_y γίνεται όλο και πιο περίπλοκη κατά τη διάδοση από στοιχείο σε στοιχείο, με συνέπεια την ανάδειξη υπολογιστικών λαθών.

Προκειμένου να ελαχιστοποιηθούν τα σφάλματα και οι πράξεις να διεξάγονται με τη μέγιστη ευκολία, ο R. C. Jones το 1941 πρότεινε ένα λογισμό με βάση τον οποίο τα πεδία του φωτός και τα πολωτικά στοιχεία των διαφόρων οπτικών διατάξεων θα μπορούσαν να παρασταθούν από μαθηματική άποψη με τη βοήθεια του λογισμού των πινάκων.

Περιγραφή των καταστάσεων πόλωσης μέσω του λογισμού Jones

Θα πρέπει κατ' αρχή ν' αναφέρουμε ότι ο λογισμός Jones εφαρμόζεται για μονοχρωματικά επίπεδα μέτωπα κύματος και τελείως πολωμένα. Δηλ. δεν μπορεί να περιγράψει το σύνολο των μερικά πολωμένων φώτων, ούτε βέβαια το φυσικό φως. Κάτω από αυτές τις συνθήκες μια κατάσταση πόλωσης περιγράφεται από ένα διάνυσμα $\mathbf{E}$ το ***διάνυσμα Jones(Jones vector)*** με μορφή στήλης δηλ. πίνακα (2×1):

$$\mathbf{E} = \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \end{pmatrix} \tag{5.3}$$

όπου οι συνιστώσες E_x, E_y εκφράζονται με τη μιγαδική τους μορφή από τη (σχ. 5.2). Άρα:

$$\mathbf{E} = e^{i(\omega t - kz)} \begin{pmatrix} A_x e^{i\phi_x} \\ A_y e^{i\phi_y} \end{pmatrix} \tag{5.4}$$

Επειδή όμως κατά τα γνωστά η πληροφορία που αφορά την κατάσταση πόλωσης μιας δέσμης φωτός σχετίζεται με τα πλάτη A_x, A_y και τη διαφορά φάσης μεταξύ των δύο συνιστωσών του $\phi = \phi_y - \phi_x$, υπάρχει η δυνατότητα να παραλείψουμε τον χωροχρονικό κυματικό όρο: $e^{i(\omega t - kz)}$ από το δεύτερο μέλος της (σχ. 5.4). Οπότε το διάνυσμα Jones μπορούμε να το παριστάνουμε στο εξής από τη σχέση:

$$\mathbf{E} = \begin{pmatrix} A_x e^{i\phi_x} \\ A_y e^{i\phi_y} \end{pmatrix} \tag{5.5}$$

Επίσης η κατάσταση πόλωσης δεν εξαρτάται από τις απόλυτες τιμές των πλατών A_x, A_y. Για το λόγο αυτό στα επόμενα θα φροντίσουμε να κανονικοποιήσουμε τα στοιχεία της στήλης του διανύσματος $\mathbf{E}$.

Για να συμβεί το τελευταίο πρέπει προηγουμένως να δούμε ποια είναι η μορφή που παίρνει η ένταση του φωτός της δέσμης που περιγράφεται από το διάνυσμα Jones της (σχ. 5.5). Κατά τα γνωστά η ένταση του φωτός I θα είναι: $I = \mathbf{E}\cdot\mathbf{E}^*$ (στην πραγματικότητα ανάλογη), όπου το $\mathbf{E}$ δίνεται από τη (σχ. 5.1) και $\mathbf{E}^*$ το συζυγές του $\mathbf{E}$. Τότε:

$$I = \mathbf{E}\cdot\mathbf{E}^* = \left(E_x\mathbf{i} + E_y\mathbf{j}\right)\cdot\left(E_x^*\mathbf{i} + E_y^*\mathbf{j}\right) = E_xE_x^* + E_yE_y^* = A_x^2 + A_y^2 \tag{5.6}$$

όπου οι συνιστώσες E_x, E_y δίνονται από τις (σχ. 5.2). Μπορούμε να καταλήξουμε εύκολα στην τελευταία σχέση για την ένταση I, εάν ορίσουμε το συζυγές ανάστροφο $\mathbf{E}^{T*}$ του διανύσματος Jones $\mathbf{E}$ (σχ. 5.5). Αυτό θα δίνεται από τη σχέση:

$$\mathbf{E}^H = \mathbf{E}^{T*} = \begin{pmatrix} E_x^* & E_y^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_xe^{-i\phi_x} & A_ye^{-i\phi_y} \end{pmatrix} \tag{5.7}$$

Τότε:

$$I = \mathbf{E}^{T*}\mathbf{E} = \begin{pmatrix} A_xe^{-i\phi_x} & A_ye^{-i\phi_y} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_xe^{i\phi_x} \\ A_ye^{i\phi_y} \end{pmatrix} = A_x^2 + A_y^2 \tag{5.8}$$

Τη (σχ. 5.8) μπορούμε να τη χρησιμοποιούμε από εδώ και στο εξής για υπολογισμούς της έντασης I, όταν τα πεδία $\mathbf{E}$ περιγράφονται με τη μορφή των διανυσμάτων Jones.

Προκειμένου τώρα να κανονικοποιήσουμε το διάνυσμα Jones της μορφής της (σχ. 5.5), πολλαπλασιάζουμε τα στοιχεία της στήλης του επί τον παράγοντα:

$$\frac{1}{\sqrt{A_x^2 + A_y^2}}e^{-i\phi_x}e^{-i(\phi/2)} \tag{5.9}$$

όπου με βάση τη (σχ. 5.8) $A_x^2 + A_y^2 = I$ είναι η ένταση της ακτινοβολίας της διαταραχής που περιγράφεται από τη (σχ. 5.5) και $\phi = \phi_y - \phi_x$ η διαφορά φάσης των δύο συνιστωσών της. Ο πολλαπλασιασμός αυτός δεν μεταβάλει την κατάσταση πόλωσης της δέσμης επειδή στις δύο συνιστώσες της προστίθεται μια σταθερή διαφορά φάσης και ο έτερος παράγοντας που καθορίζει την κατάσταση είναι ο λόγος των πλατών. Κάτω από αυτές τις συνθήκες η κανονικοποιημένη μορφή του διανύσματος Jones της (σχ. 5.5) θα είναι:

$$\mathbf{E}_{nor.} = \begin{pmatrix} \cos a e^{-i(\phi/2)} \\ \sin a e^{i(\phi/2)} \end{pmatrix} \tag{5.10}$$

όπου: $\cos a = A_x \Big/ \sqrt{A_x^2 + A_y^2}$, $\sin a = A_y \Big/ \sqrt{A_x^2 + A_y^2}$, $\tan a = A_y \big/ A_x$ (5.11α)

Αυτού του είδους η κανονικοποίηση οδηγεί στο αποτέλεσμα ότι η ένταση $I_{nor.}$ του πεδίου (του διανύσματος Jones) $\mathbf{E}_{nor.}$ της (σχ. 5.10), είναι ίση με τη μονάδα. Πράγματι με τη βοήθεια της (σχ. 5.8) θα έχουμε:

$$I = \mathbf{E}_{nor.}^{T*}\mathbf{E}_{nor.} = \begin{pmatrix} \cos ae^{i(\phi/2)} & \sin ae^{-i(\phi/2)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos ae^{-i(\phi/2)} \\ \sin ae^{i(\phi/2)} \end{pmatrix} = \cos^2 a + \sin^2 a = 1 \qquad (5.11\beta)$$

Στα επόμενα θα περιγράψουμε τα διανύσματα Jones καθώς και τις κανονικοποιημένες τους μορφές για όλες τις καταστάσεις πόλωσης του φωτός.

α) Ελλειπτικά πολωμένο φως

Το διάνυσμα Jones θα δίνεται από τη (σχ. 5.5) και η κανονικοποιημένη του μορφή από τη (σχ. 5.10) για πλάτη A_x, A_y ($A_x \neq A_y$ ή $A_x = A_y$) και $0 < \phi < 2\pi$ όπου $\phi = \phi_y - \phi_x$. Αν $0 < \phi < \pi$ τότε το φως είναι Δ.Ε.Π. και αν $\pi < \phi < 2\pi$ Α.Ε.Π.

β) Κυκλικά πολωμένο φως

1) Για το δεξιόστροφα κυκλικά πολωμένο φως : $A_x = A_y = A$ και η διαφορά φάσης $\phi = \phi_y - \phi_x = \pi/2$. Οπότε: $\phi_y = \phi_x + \pi/2$. Τότε το διάνυσμα Jones θα δίνεται από τη σχέση:

$$\mathbf{E}_R = \begin{pmatrix} A_x e^{i\phi_x} \\ A_y e^{i\phi_y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Ae^{i\phi_x} \\ Ae^{i(\phi_x + \pi/2)} \end{pmatrix} \qquad (5.12)$$

Η κανονικοποιημένη του μορφή επειδή: $\cos a = \sin a = 1/\sqrt{2}$ και $\phi = \pi/2$ θα έχουμε από τη (σχ. 5.10):

$$\mathbf{E}_R = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} e^{-i(\pi/4)} \\ e^{i(\pi/4)} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ e^{i(\pi/2)} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} \qquad (5.13)$$

2) Για το αριστερόστροφα κυκλικά πολωμένο φως : $A_x = A_y = A$ και η διαφορά φάσης $\phi = \phi_y - \phi_x = -\pi/2$. Οπότε: $\phi_y = \phi_x - \pi/2$. Τότε το διάνυσμα Jones θα δίνεται από τη σχέση:

$$\mathbf{E}_R = \begin{pmatrix} A_x e^{i\phi_x} \\ A_y e^{i\phi_y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A e^{i\phi_x} \\ A e^{i(\phi_x - \pi/2)} \end{pmatrix} \tag{5.14}$$

Η κανονικοποιημένη του μορφή επειδή: $\cos a = \sin a = 1/\sqrt{2}$ και $\phi = -\pi/2$ δίνεται από τη (σχ. 5.10):

$$\mathbf{E}_L = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} e^{i(\pi/4)} \\ e^{-i(\pi/4)} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ e^{-i(\pi/2)} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} \tag{5.15}$$

όπου για τις μετατροπές πολλαπλασιάσαμε τα δύο στοιχεία της στήλης με τον ίδιο παράγοντα φάσης, γεγονός το οποίο δεν μεταβάλει την κατάσταση πόλωσης που περιγράφεται από το αντίστοιχο διάνυσμα Jones. Η διαδικασία αυτή θα επαναληφθεί και στα επόμενα.

γ) Γραμμικά πολωμένο φως

1) Για γραμμικά πολωμένο φως κατά τον άξονα των x θα έχουμε: $A_y = 0$, $\phi = \phi_x$, $\phi_y = 0$. Τότε το διάνυσμα Jones θα δίνεται από τη σχέση:

$$\mathbf{E}_x = \begin{pmatrix} A_x e^{i\phi_x} \\ 0 \end{pmatrix} \tag{5.16}$$

Η κανονικοποιημένη του μορφή επειδή: $\cos a = 1$, $\sin a = 0$ και ο παράγοντας $e^{-i(\phi_x/2)}$ μπορεί να θεωρηθεί κοινός στα στοιχεία της στήλης θα είναι:

$$\mathbf{E}_x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{5.17}$$

2) Για γραμμικά πολωμένο φως κατά τον άξονα των y θα έχουμε: $A_x = 0$, $\phi = \phi_y$, $\phi_x = 0$. Τότε το διάνυσμα Jones θα δίνεται από τη σχέση:

$$\mathbf{E}_y = \begin{pmatrix} 0 \\ A_y e^{i\phi_y} \end{pmatrix} \tag{5.18}$$

Η κανονικοποιημένη του μορφή επειδή: $\cos a = 1$, $\sin a = 0$ και ο παράγοντας $e^{i(\phi_y/2)}$ μπορεί να θεωρηθεί κοινός στα στοιχεία της στήλης θα είναι:

$$\mathbf{E}_y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{5.19}$$

3) Για γραμμικά πολωμένο φως με αζιμούθιο a ως προς τον άξονα x, το πρόσημο της γωνίας a καθορίζεται από την τιμή της διαφοράς φάσης ϕ, για πλάτη A_x, A_y ($A_x \neq A_y$ ή $A_x = A_y = A$). Όταν $\phi = 0$ τότε $\phi_y = \phi_x$ και το διάνυσμα Jones θα δίνεται από τη σχέση:

$$\mathbf{E}_{\phi=0} = \begin{pmatrix} A_x e^{i\phi_x} \\ A_y e^{i\phi_x} \end{pmatrix} = e^{i\phi_x} \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \end{pmatrix} \tag{5.20}$$

Η κανονικοποιημένη του μορφή για $A_x \neq A_y$ ($\phi = 0$) θα δίνεται από την σχέση:

$$\mathbf{E}_{\phi=0} = \begin{pmatrix} \cos a \\ \sin a \end{pmatrix} \tag{5.21}$$

Όταν $\phi = \pi$ τότε $\phi_y = \phi_x + \pi$ και το διάνυσμα Jones θα δίνεται από τη σχέση:

$$\mathbf{E}_{\phi=\pi} = \begin{pmatrix} A_x e^{i\phi_x} \\ A_y e^{i(\phi_x+\pi)} \end{pmatrix} = e^{i\phi_x} \begin{pmatrix} A_x \\ -A_y \end{pmatrix} \tag{5.22}$$

Η κανονικοποιημένη του μορφή για $A_x \neq A_y$ ($\phi = \pi$) θα δίνεται από τη σχέση:

$$\mathbf{E}_{\phi=\pi} = \begin{pmatrix} \cos a \\ -\sin a \end{pmatrix} \tag{5.23}$$

Για την περίπτωση όπου $a = 45^0$, $A_x = A_y = A$ και οι κανονικοποιημένες μορφές των διανυσμάτων Jones για $\phi = 0$ και $\phi = \pi$ θα είναι αντίστοιχα:

$$\mathbf{E}_{a=45^0} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{και} \quad \mathbf{E}_{a=-45^0} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \tag{5.24}$$

Περιγραφή των πολωτικών στοιχείων μέσω του λογισμού Jones

Αποδεικνύεται ότι για τις οπτικές συχνότητες και για χαμηλές σχετικά εντάσεις ακτινοβολίας, η απόκριση ενός οπτικού συστήματος στα Η/Μ πεδία είναι γραμμική. Τέτοιου είδους συστήματα μπορεί να είναι πολωτικά στοιχεία όπως γραμμικοί πολωτές , καθυστερητές κ.λ.π. ή οτιδήποτε άλλο όπως ουδέτερα φίλτρα κ.ά. Αν λοιπόν υποθέσουμε ότι:

$$\mathbf{E}_1 = \begin{pmatrix} A_{1x} e^{i\phi_{1x}} \\ A_{1y} e^{i\phi_{1y}} \end{pmatrix}$$

είναι το διάνυσμα Jones της προσπίπτουσας στο οπτικό σύστημα διαταραχής – η οποία χαρακτηρίζεται από μια ορισμένη κατάσταση πόλωσης – τότε η εξερχόμενη $\mathbf{E}_2$ θα εκφράζεται από μια σχέση της μορφής:

$$\mathbf{E}_2 = \begin{pmatrix} A_{2x} e^{i\phi_{2x}} \\ A_{2y} e^{i\phi_{2y}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J_{11} & J_{12} \\ J_{21} & J_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{1x} e^{i\phi_{1x}} \\ A_{1y} e^{i\phi_{1y}} \end{pmatrix} = \mathbf{J}_{ij} \mathbf{E}_1 \tag{5.25}$$

Όπου:

$$\mathbf{J}_{ij} = \begin{pmatrix} J_{11} & J_{12} \\ J_{21} & J_{22} \end{pmatrix} \tag{5.26}$$

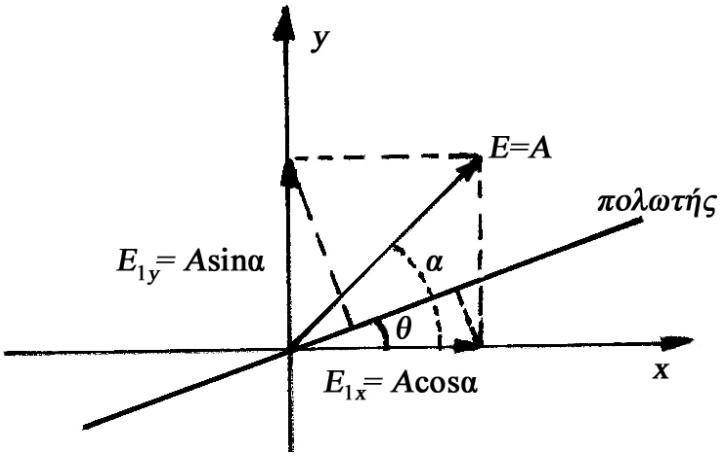
είναι ο (2×2) πίνακας Jones που προσδιορίζει τις ιδιότητες του οπτικού συστήματος. Αν $\mathbf{E}_1$ είναι το διάνυσμα Jones του προσπίπτοντος φωτός διαδοχικά σε δύο οπτικά συστήματα που χαρακτηρίζονται από τους πίνακες $\mathbf{J}_{ij}^1$ και $\mathbf{J}_{ij}^2$ τότε θα έχουμε τις σχέσεις: $\mathbf{E}_2 = \mathbf{J}_{ij}^1 \mathbf{E}_1$ και $\mathbf{E}_3 = \mathbf{J}_{ij}^2 \mathbf{E}_2$. Τελικά: $\mathbf{E}_3 = \mathbf{J}_{ij}^2 \mathbf{J}_{ij}^1 \mathbf{E}_1$. Κατ' ακολουθία αν το προσπίπτον φως $\mathbf{E}_1$ διέρχεται διαδοχικά από N τον αριθμό συστήματα, το εξερχόμενο $\mathbf{E}_{N+1}$ θα δίνεται από τη σχέση:

$$\mathbf{E}_{N+1} = \mathbf{J}_{ij}^N \mathbf{J}_{ij}^{N-1} \cdots\cdots \mathbf{J}_{ij}^2 \mathbf{J}_{ij}^1 \mathbf{E}_1 \tag{5.27}$$

Τα στοιχεία των πινάκων Jones των οπτικών συστημάτων, είναι εν γένει μιγαδικοί αριθμοί και προσδιορίζονται με τη βοήθεια ορισμένων διαδικασιών, όπως θα δούμε στα επόμενα.

Πίνακας Jones γραμμικού πολωτή

Θα υποθέσουμε στη γενικότερη περίπτωση ότι ο πολωτής είναι ιδανικός και ότι ο άξονας διέλευσής του έχει αζιμούθιο θ σε σχέση με τον άξονα x (Σχ. 5.1). Στον πολωτή προσπίπτει γραμμικά πολωμένο φως με αζιμούθιο a σε σχέση πάλι με τον



(Σχ. 5.1)

x, του οποίου το πλάτος είναι A. Τότε τα στοιχεία του διανύσματος Jones αυτής της κατάστασης πόλωσης θα δίνονται από τις σχέσεις: $E_{1x} = A\cos a$, $E_{1y} = A\sin a$

Το πλάτος του πεδίου μετά τον πολωτή, θα είναι το άθροισμα των δύο προβολών των συνιστωσών E_{1x}, E_{1y} πάνω σ' αυτόν. Δηλ.

$$E_{\pi\rho.} = A\cos a\cos\theta + A\sin a\sin\theta = E_{1x}\cos\theta + E_{1y}\sin\theta$$

και οι συνιστώσες του E_{2x}, E_{2y} ως προς x, y θα είναι:

$$E_{2x} = E_{\pi\rho.}\cos\theta = E_{1x}\cos^2\theta + E_{1y}\sin\theta\cos\theta$$
$$E_{2y} = E_{\pi\rho.}\sin\theta = E_{1x}\sin\theta\cos\theta + E_{1y}\sin^2\theta$$

όπου E_{2x}, E_{2y} τα στοιχειά του διανύσματος Jones της κατάστασης πόλωσης στην έξοδο μετά τον πολωτή. Οι δύο τελευταίες σχέσεις με την μορφή πίνακα μπορούν να γραφούν:

$$\begin{pmatrix} E_{2x} \\ E_{2y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos^2\theta & \sin\theta\cos\theta \\ \sin\theta\cos\theta & \sin^2\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_{1x} \\ E_{1y} \end{pmatrix}$$

από την οποία προκύπτει ότι ο πίνακας Jones $\mathbf{J}_{ij}$ ενός ιδανικού γραμμικού πολωτή που ο άξονας διέλευσής του σχηματίζει αζιμούθιο θ σε σχέση με τον άξονα x θα είναι:

$$\mathbf{J}_{ij} = \begin{pmatrix} \cos^2\theta & \sin\theta\cos\theta \\ \sin\theta\cos\theta & \sin^2\theta \end{pmatrix} \tag{5.28}$$

Από τη γενική αυτή σχέση μπορούμε να υπολογίσουμε π.χ. τους πίνακες Jones όταν $\theta = 45^0$ και $\theta = -45^0$. Τότε επειδή: $\sin 45^0 = \cos 45^0 = 1/\sqrt{2}$ $\sin\left(-45^0\right) = -1/\sqrt{2}$ θα έχουμε:

$$\mathbf{J}_{ij} = \tfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad (5.29) \qquad \mathbf{J}_{ij} = \tfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \tag{5.30}$$

Επίσης μπορούμε να βρούμε τους πίνακες Jones όταν $\theta = 0^0$ και $\theta = 90^0$, δηλ. για την περίπτωση που ο άξονας διέλευσης του πολωτή είναι οριζόντιος (κατά τον άξονα x) και κατακόρυφος (κατά τον άξονα y). Αυτοί θα είναι:

$$\mathbf{J}_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (5.31) \qquad \mathbf{J}_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{5.32}$$

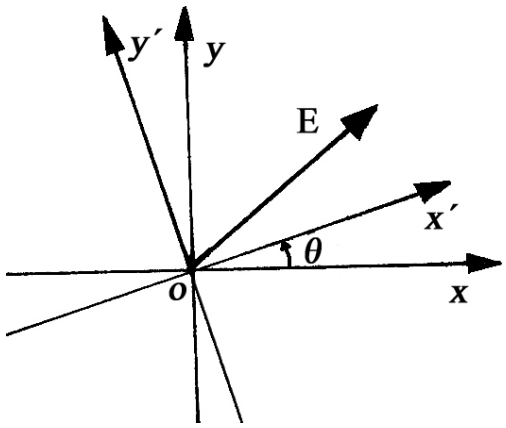
Σχέσεις μετασχηματισμού των συνιστωσών ενός διανύσματος σε διαφορετικά συστήματα συντεταγμένων. Πίνακας Jones εκφρασμένος σε νέο σ.σ. που προέκυψε με τη στροφή του παλαιού κατά γωνία θ

Θεωρούμε το σύστημα συντεταγμένων x, y και ένα διάνυσμα $\mathbf{E}$ (Σχ. 5.2) του οποίου οι συνιστώσες ως προς αυτό είναι οι E_x, E_y. Έστω ότι το σύστημα x, y εκτελεί μία στροφή στο επίπεδό του περί την αρχή O κατά γωνία θ και με θετική φορά (αντίθετη της φοράς των δεικτών του ρολογιού). Η θέση αυτή αφορά ένα νέο σύστημα συντεταγμένων x', y' στο οποίο οι συνιστώσες του διανύσματος $\mathbf{E}$ είναι οι E'_x, E'_y. Στα επόμενα θα προσπαθήσουμε να εκφράσουμε τις συνιστώσες E'_x, E'_y του νέου συστήματος, σε συνάρτηση με τις E_x, E_y του παλαιού.

Αν $\mathbf{E} = E_x\mathbf{i} + E_y\mathbf{j}$ είναι η έκφραση του διανύσματος $\mathbf{E}$ στο σύστημα x, y όπου $\mathbf{i}, \mathbf{j}$ τα μοναδιαία διανύσματα κατά μήκος των x, y τότε οι E'_x, E'_y θα είναι οι προβολές του $\mathbf{E}$ στους άξονες x', y'. Δηλ. αν $\mathbf{i}', \mathbf{j}'$ τα μοναδιαία διανύσματα κατά μήκος των αξόνων x', y' τότε θα έχουμε:

$$E'_x = \mathbf{E}\cdot\mathbf{i}' = \left(E_x\mathbf{i} + E_y\mathbf{j}\right)\cdot\mathbf{i}' \qquad E'_y = \mathbf{E}\cdot\mathbf{j}' = \left(E_x\mathbf{i} + E_y\mathbf{j}\right)\cdot\mathbf{j}'$$

ή
$$\left.\begin{aligned} E'_x &= E_x\cos\theta + E_y\sin\theta \\ E'_y &= -E_x\sin\theta + E_y\cos\theta \end{aligned}\right\} \tag{5.33}$$



(Σχ. 5.2)

όπου: $\mathbf{i}\cdot\mathbf{i}' = \cos\theta$, $\mathbf{j}\cdot\mathbf{i}' = \sin\theta$, $\mathbf{i}\cdot\mathbf{j}' = -\sin\theta$, $\mathbf{j}\cdot\mathbf{j}' = \cos\theta$

Οι (σχ. 5.33) με την μορφή πινάκων γράφονται:

$$\begin{pmatrix} E'_x \\ E'_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E_x \\ E_y \end{pmatrix} \tag{5.34}$$

όπου ο πίνακας: $\mathbf{R}(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ (5.35)

ονομάζεται ***πίνακας στροφής (matrix rotation)***.

Στα επόμενα θ' αποδείξουμε ότι εάν $\mathbf{J}_{ij}$ είναι ο πίνακας Jones ενός οπτικού συστήματος ως προς το σύστημα x, y τότε ο πίνακας Jones $\mathbf{J}_{ij}(\theta)$ του ίδιου οπτικού συστήματος, το οποίο όμως έχει στραφεί κατά γωνία θ ως προς τον άξονα x (στο ίδιο σύστημα x, y) θα δίνεται από τη σχέση:

$$\mathbf{J}_{ij}(\theta) = \mathbf{R}(-\theta)\mathbf{J}_{ij}\mathbf{R}(\theta) \tag{5.36}$$

όπου $\mathbf{R}(\theta)$ είναι ο πίνακας στροφής που δίνεται από τη (σχ. 5.35).

Πράγματι αν $\mathbf{J}_{ij}(\theta)$ είναι ο στραμμένος κατά θ πίνακας του οπτικού συστήματος ως προς το x, y τότε θα ισχύει:

$$\begin{pmatrix} E_{2x} \\ E_{2y} \end{pmatrix} = \mathbf{J}_{ij}(\theta) \begin{pmatrix} E_{1x} \\ E_{1y} \end{pmatrix} \tag{5.37}$$

όπου $\begin{pmatrix} E_{1x} \\ E_{1y} \end{pmatrix}$ και $\begin{pmatrix} E_{2x} \\ E_{2y} \end{pmatrix}$ τα διανύσματα Jones των πεδίων εισόδου και εξόδου από το οπτικό σύστημα. Αν θεωρήσουμε τώρα ότι το σύστημα συντεταγμένων x, y στρέφεται κατά γωνία θ, τότε για το νέο σύστημα συντεταγμένων x', y' θα ισχύει:

$$\begin{pmatrix} E'_{2x} \\ E'_{2y} \end{pmatrix} = \mathbf{J}_{ij} \begin{pmatrix} E'_{1x} \\ E'_{1y} \end{pmatrix} \tag{5.38}$$

όπου $\begin{pmatrix} E'_{1x} \\ E'_{1y} \end{pmatrix}$ και $\begin{pmatrix} E'_{2x} \\ E'_{2y} \end{pmatrix}$ τα διανύσματα Jones των πεδίων εισόδου και εξόδου από το οπτικό σύστημα, εκφρασμένα όμως στο σύστημα συντεταγμένων x', y'. Γνωρίζουμε όμως από τη (σχ. 5.34) τον τρόπο μετασχηματισμού των συνιστωσών των διανυσμάτων Jones μεταξύ των x, y και x', y'. Οπότε:

$$\begin{pmatrix} E'_{1x} \\ E'_{1y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_{1x} \\ E_{1y} \end{pmatrix} \quad \text{και} \quad \begin{pmatrix} E'_{2x} \\ E'_{2y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_{2x} \\ E_{2y} \end{pmatrix}$$

Αντικαθιστώντας τις σχέσεις αυτές στη (σχ. 5.38) θα έχουμε:

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_{2x} \\ E_{2y} \end{pmatrix} = \mathbf{J}_{ij} \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_{1x} \\ E_{1y} \end{pmatrix}$$

Κατόπιν στην τελευταία σχέση, αντικαθιστούμε το διάνυσμα Jones $\begin{pmatrix} E_{2x} \\ E_{2y} \end{pmatrix}$ από την (σχ. 5.37) οπότε θα έχουμε:

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \mathbf{J}_{ij}(\theta) = \mathbf{J}_{ij} \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

Πολλαπλασιάζοντας τώρα από αριστερά τα μέλη αυτής της εξίσωσης με τον αντίστροφο του πίνακα στροφής θα έχουμε:

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \mathbf{J}_{ij}(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}^{-1} \mathbf{J}_{ij} \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

ή $$\mathbf{J}_{ij}(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}^{-1} \mathbf{J}_{ij} \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

Επειδή όμως: $$\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

θα είναι: $$\mathbf{J}_{ij}(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \mathbf{J}_{ij} \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

και τελικά: $\mathbf{J}_{ij}(\theta) = \mathbf{R}(-\theta)\mathbf{J}_{ij}\mathbf{R}(\theta)$, δηλ. αποδεικνύεται η (σχ. 5.36).

Ένα από τα παράδειγμα το οποίο αναδεικνύει τη χρησιμότητα αυτής της σχέσης είναι το εξής: Γνωρίζουμε τον πίνακα Jones για τον ιδανικό οριζόντιο πολωτή, ότι δίνεται από τη σχέση: $\mathbf{J}_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Ποιος θα είναι ο πίνακάς του όταν ο τελευταίος στραφεί κατά γωνία θ ως προς τον άξονα x.

Θα είναι μετά την αντικατάσταση και την εκτέλεση των πράξεων:

$$\mathbf{J}_{ij}(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos^2\theta & \sin\theta\cos\theta \\ \sin\theta\cos\theta & \sin^2\theta \end{pmatrix}$$

Δηλ. βρίσκουμε τη (σχ. 5.28).

Πίνακας Jones πλακιδίου καθυστέρησης

Θα υποθέσουμε στη γενικότερη περίπτωση ότι ο ταχύς άξονας του πλακιδίου σχηματίζει γωνία θ με τον άξονα x (Σχ. 5.3). Έστω επίσης ότι η καθυστέρηση φάσης που εισάγεται μεταξύ της τακτικής και της έκτακτης διαταραχής είναι Φ. Μας είναι επίσης γνωστό ότι γραμμικά πολωμένο φως που προσπίπτει κάθετα στο πλακίδιο και η διεύθυνση του πεδίου του είναι αυτή του ταχύ άξονα, διέρχεται από αυτό χωρίς αλλαγή της κατάστασης πόλωσής του. Αν A είναι το πλάτος του, τότε τα διανύσματα Jones στην είσοδο και την έξοδο του πλακιδίου θα είναι:

$$\begin{pmatrix} E_{1x} \\ E_{1y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A\cos\theta \\ A\sin\theta \end{pmatrix} \quad \text{και} \quad \begin{pmatrix} E_{2x} \\ E_{2y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A\cos\theta \\ A\sin\theta \end{pmatrix}$$

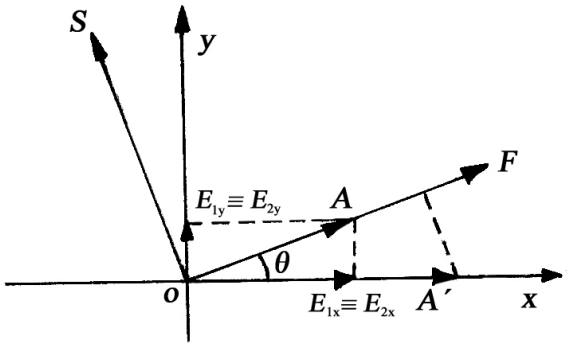
Τότε με βάση τη γενική σχέση ορισμού του πίνακα Jones ενός οπτικού στοιχείου (σχ. 5.25) θα έχουμε:

$$\begin{pmatrix} A\cos\theta \\ A\sin\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J_{11} & J_{12} \\ J_{21} & J_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A\cos\theta \\ A\sin\theta \end{pmatrix}$$

από την οποία προκύπτουν οι σχέσεις:

$$\cos\theta = J_{11}\cos\theta + J_{12}\sin\theta \quad \text{και} \quad \sin\theta = J_{21}\cos\theta + J_{22}\sin\theta$$

και τελικά: $$\tan\theta = \frac{1-J_{11}}{J_{12}} = \frac{J_{21}}{1-J_{22}} \tag{5.39}$$



(Σχ. 5.3)

Φωτίζουμε κατόπιν τη διάταξη με γραμμικά πολωμένο φως του οποίου το πεδίο είναι παράλληλο με τον άξονα x. Αν το πλάτος του είναι A' τότε το διάνυσμα Jones στην είσοδο του πλακιδίου θα είναι:

$$\begin{pmatrix} E'_{1x} \\ E'_{1y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A' \\ 0 \end{pmatrix} \tag{5.40}$$

Οι συνιστώσες του διανύσματος αυτού ως προς το σύστημα συντεταγμένων F, S δηλ. του ταχύ και του βραδύ άξονα του πλακιδίου θα δίνονται με τη βοήθεια της (σχ. 5.34):

$$\begin{pmatrix} E_{1F} \\ E_{1S} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A' \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A'\cos\theta \\ -A'\sin\theta \end{pmatrix} \tag{5.41}$$

Το εξερχόμενο από το πλακίδιο καθυστέρησης πεδίο ως προς το σύστημα συντεταγμένων F,S (λαμβάνοντας υπόψη την διαφορά φάσης Φ μεταξύ τακτικής και έκτακτης διαταραχής) θα περιγράφεται από το διάνυσμα Jones:

$$\begin{pmatrix} E_{2F} \\ E_{2S} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A'\cos\theta e^{i\Phi} \\ -A'\sin\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A'\cos\theta e^{i(\Phi/2)} \\ -A'\sin\theta e^{-i(\Phi/2)} \end{pmatrix} \tag{5.42}$$

όπου για να πάρουμε τον τελευταίο πίνακα, πολλαπλασιάσαμε τα στοιχεία του δευτέρου με τον παράγοντα σταθερής φάσης $e^{-i(\Phi/2)}$. Προκειμένου όμως να εκφράσουμε το διάνυσμα Jones $\begin{pmatrix} E_{2F} \\ E_{2S} \end{pmatrix}$ στο σύστημα συντεταγμένων x,y θα πρέπει να το υποβάλουμε σε ένα μετασχηματισμό στροφής κατά $-\theta$. Τότε θα έχουμε:

$$\left.\begin{aligned} \begin{pmatrix} E'_{2x} \\ E'_{2y} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A'\cos\theta e^{i(\Phi/2)} \\ -A'\sin\theta e^{-i(\Phi/2)} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} A'\cos^2\theta e^{i(\Phi/2)} + A'\sin^2\theta e^{-i(\Phi/2)} \\ A'\sin\theta\cos\theta e^{i(\Phi/2)} - A'\sin\theta\cos\theta e^{-i(\Phi/2)} \end{pmatrix} \end{aligned}\right\} \tag{5.43}$$

Όμως με βάση τον ορισμό του πίνακα Jones ενός οπτικού συστήματος στο σύστημα x,y θα έχουμε:

$$\begin{pmatrix} E'_{2x} \\ E'_{2y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J_{11} & J_{12} \\ J_{21} & J_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A' \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A'J_{11} \\ A'J_{21} \end{pmatrix} \tag{5.44}$$

Τελικά κατόπιν σύγκρισης των (σχ. 5.43,5.44) βρίσκουμε:

$$\left.\begin{aligned} J_{11} &= \cos^2\theta e^{i(\Phi/2)} + \sin^2\theta e^{-i(\Phi/2)} \\ J_{21} &= \sin\theta\cos\theta e^{i(\Phi/2)} - \sin\theta\cos\theta e^{-i(\Phi/2)} \end{aligned}\right\} \tag{5.45}$$

Επίσης με τη βοήθεια των τελευταίων σχέσεων και των (σχ. 5.39) βρίσκουμε:

$$\left.\begin{aligned} J_{22} &= \sin^2\theta e^{i(\Phi/2)} + \cos^2\theta e^{-i(\Phi/2)} \\ J_{12} &= \sin\theta\cos\theta e^{i(\Phi/2)} - \sin\theta\cos\theta e^{-i(\Phi/2)} \end{aligned}\right\} \tag{5.46}$$

Τελικά η γενική μορφή ενός πίνακα Jones για ένα πλακίδιο καθυστέρησης Φ στραμμένου κατά γωνία θ σε σχέση με τον άξονα x θα είναι:

$$\mathbf{J}_{ij} = \begin{pmatrix} e^{i(\Phi/2)}\cos^2\theta + e^{-i(\Phi/2)}\sin^2\theta & \left(e^{i(\Phi/2)} - e^{-i(\Phi/2)}\right)\sin\theta\cos\theta \\ \left(e^{i(\Phi/2)} - e^{-i(\Phi/2)}\right)\sin\theta\cos\theta & e^{i(\Phi/2)}\sin\theta^2 + e^{-i(\Phi/2)}\cos^2\theta \end{pmatrix} \tag{5.47}$$

Δύο άλλες μορφές τις οποίες μπορεί να πάρει ο πίνακας είναι οι εξής:

$$\mathbf{J}_{ij} = \begin{pmatrix} \cos^2\theta + e^{-i\Phi}\sin^2\theta & \left(1 - e^{-i\Phi}\right)\sin\theta\cos\theta \\ \left(1 - e^{-i\Phi}\right)\sin\theta\cos\theta & \sin^2\theta + e^{-i\Phi}\cos^2\theta \end{pmatrix} \tag{5.48}$$

$$\mathbf{J}_{ij} = \begin{pmatrix} \cos\frac{\Phi}{2} + i\sin\frac{\Phi}{2}\cos 2\theta & i\sin\frac{\Phi}{2}\sin 2\theta \\ i\sin\frac{\Phi}{2}\sin 2\theta & \cos\frac{\Phi}{2} - i\sin\frac{\Phi}{2}\cos 2\theta \end{pmatrix} \tag{5.49}$$

Πίνακας Jones για πλακίδιο $\lambda/4$ (Ταχύς άξονας στη διεύθυνση x)

Όταν $\Phi = \pi/2$ τότε από τη (σχ. 5.49) θα έχουμε:

$$\mathbf{J}_{ij}\left(\frac{\lambda}{4},\theta\right) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}}\cos 2\theta & \frac{i}{\sqrt{2}}\sin 2\theta \\ \frac{i}{\sqrt{2}}\sin 2\theta & \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{i}{\sqrt{2}}\cos 2\theta \end{pmatrix} \tag{5.50}$$

Για $\theta = 0^0$ η (σχ. 5.50) γίνεται:

$$\mathbf{J}_{ij}\left(\frac{\lambda}{4}\right) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}(1+i) & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}}(1-i) \end{pmatrix} \tag{5.51}$$

Πίνακας Jones για πλακίδιο $\lambda/2$ (Ταχύς άξονας στη διεύθυνση x)

Όταν $\Phi = \pi$ τότε από τη (σχ. 5.49) θα έχουμε:

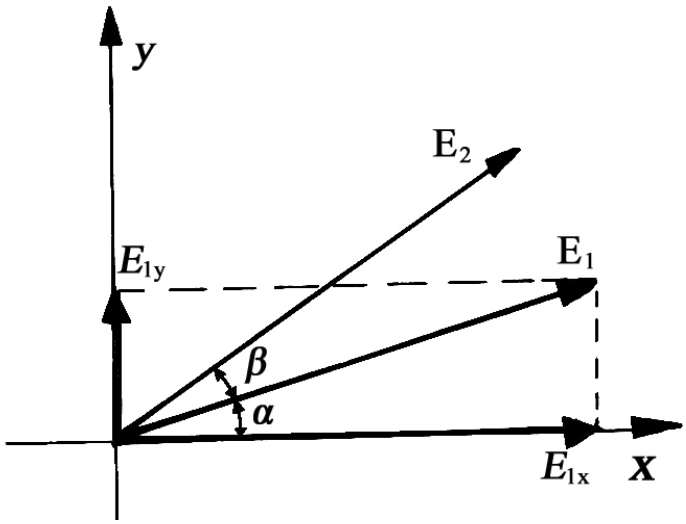
$$\mathbf{J}_{ij}\left(\frac{\lambda}{2},\theta\right) = i\begin{pmatrix}\cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta\end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix}\cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta\end{pmatrix} \tag{5.52}$$

όπου απαλείψαμε τον κοινό παράγοντα i ***(unimodular)*** επειδή αντιπροσωπεύει μια σταθερή φάση για όλα τα στοιχεία του πίνακα Jones. Για $\theta = 0^0$ η (σχ. 5.52) γίνεται:

$$\mathbf{J}_{ij}\left(\frac{\lambda}{2}\right) = \begin{pmatrix}1 & 0 \\ 0 & -1\end{pmatrix} \tag{5.53}$$

Πίνακας Jones για οπτικά ενεργό πλακίδιο

Η δράση ενός οπτικά ενεργού πλακιδίου σ' ένα προσπίπτον σ' αυτό πεδίο, είναι ότι στρέφει το διάνυσμα της έντασης του ηλ. πεδίου κατά μία ορισμένη γωνία $\pm\beta$. Έστω λοιπόν ότι $\mathbf{E}_1 = \begin{pmatrix}E_{1x} \\ E_{1y}\end{pmatrix}$ το διάνυσμα Jones του προσπίπτοντος πεδίου και $\mathbf{E}_2 = \begin{pmatrix}E_{2x} \\ E_{2y}\end{pmatrix}$ αυτό του εξερχόμενου (Σχ. 5.4). Επειδή: $|\mathbf{E}_1| = |\mathbf{E}_2| = E$



(Σχ. 5.4)

$$E_{2x} = E\cos(a+\beta) = \mathrm{E}\cos a\cos\beta - E\sin a\sin\beta$$
$$E_{2y} = E\sin(a+\beta) = \mathrm{E}\cos a\sin\beta - E\sin a\cos\beta$$

ή
$$E_{2x} = E_{1x}\cos\beta - E_{1y}\sin\beta$$
$$E_{2y} = E_{1x}\sin\beta + E_{1y}\cos\beta$$

ή
$$\begin{pmatrix} E_{2x} \\ E_{2y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_{1x} \\ E_{1y} \end{pmatrix}$$

από την οποία με βάση τον ορισμό του πίνακα Jones για το οπτικό σύστημα του οπτικά ενεργού πλακιδίου βρίσκουμε:

$$\mathbf{J}_{ij}^{ROT} = \begin{pmatrix} \cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix} \tag{5.54}$$

Παρουσιάζει ενδιαφέρον να δούμε την επίδραση στον πίνακα Jones, της στροφής κατά γωνία θ ενός οπτικά ενεργού πλακιδίου. Έστω $\mathbf{J}_{ij}^{ROT}(\theta)$ είναι αυτός ο πίνακας και $\mathbf{J}_{ij}^{ROT}$ ο πίνακας σε σχέση με τον άξονα x. Τότε με τη βοήθεια της (σχ. 5.36) θα έχουμε:

$$\mathbf{J}_{ij}^{ROT}(\theta) = \mathbf{R}(-\theta)\mathbf{J}_{ij}^{ROT}\mathbf{R}(\theta) =$$

$$= \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = \mathbf{J}_{ij}^{ROT} \tag{5.55}$$

Βλέπουμε δηλ. ότι η μηχανική περιστροφή ενός οπτικά ενεργού πλακιδίου δεν μπορεί να 'περιστρέψει' την συγκεκριμένη κατάσταση πόλωσης (να μεταβάλλει δηλ. το αζιμούθιο). Π.χ. αν το προσπίπτον είναι ελλειπτικά πολωμένο φως, κατά την περιστροφή του οπτικά ενεργού πλακιδίου δεν 'περιστρέφεται' η 'έλλειψη'. Ο μόνος τρόπος με τον οποίο μπορούμε να 'περιστρέψουμε μηχανικά' την 'έλλειψη', είναι π.χ. με την μηχανική περιστροφή ενός πλακιδίου $\lambda/2$.

Παραδείγματα

Ανάδειξη του νόμου του Malus μέσω του λογισμού Jones

Θεωρούμε ότι οριζόντια γραμμικά πολωμένο φως με διάνυσμα Jones

$$\mathbf{E}_1 = \begin{pmatrix} E_{1x} \\ E_{2x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_x \\ 0 \end{pmatrix} \tag{5.56}$$

στο σύστημα συντεταγμένων x, y προσπίπτει σ ένα ιδανικό πολωτή που το αζιμούθιό του ως προς τον x είναι θ. Δεδομένου ότι ο πίνακας Jones του πολωτή ως προς το x, y (σχ. 5.28) είναι: $\mathbf{J}_{ij} = \begin{pmatrix} \cos^2\theta & \sin\theta\cos\theta \\ \sin\theta\cos\theta & \sin^2\theta \end{pmatrix}$, τότε το διάνυσμα Jones του πεδίου στην έξοδο θα δίνεται από τη σχέση:

$$\mathbf{E}_2 = \begin{pmatrix} E_{2x} \\ E_{2y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos^2\theta & \sin\theta\cos\theta \\ \sin\theta\cos\theta & \sin^2\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_x \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_x\cos^2\theta \\ A_x\sin\theta\cos\theta \end{pmatrix} \tag{5.57}$$

Θα επιδιώξουμε κατ' αρχή να δούμε ποια είναι η κατάσταση πόλωσης που αντιπροσωπεύει το διάνυσμα Jones $\mathbf{E}_2$. Για το λόγο αυτό μπορούμε στη γενικότερη περίπτωση να το εξισώσουμε με το διάνυσμα Jones ενός ελλειπτικά πολωμένου φωτός της γνωστής μορφής (σχ. 5.5):

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_2 = \begin{pmatrix} E_{2x} \\ E_{2y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ae^{i\phi_x} \\ be^{i\phi_y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ be^{i\phi} \end{pmatrix} \tag{5.58}$$

Επομένως από τις (σχ. 5.57,5.58) βρίσκουμε:

$$E_{2x} = A_x\cos^2\theta = \alpha \tag{5.59}$$

$$E_{2y} = A_x\cos\theta\sin\theta = be^{i\phi} \tag{5.60}$$

και διαιρώντας κατά μέλη τις δύο τελευταίες σχέσεις θα έχουμε:

$$\frac{E_{2y}}{E_{2x}} = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{b}{a}e^{i\phi} \tag{5.61}$$

Εξισώνοντας τέλος τα πραγματικά και φανταστικά μέρη της (σχ. 5.61) προκύπτει:

$$\frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{b}{a}\cos\phi \tag{5.62}$$

και

$$0 = \frac{b}{a}\sin\phi \quad b \neq a \tag{5.63}$$

Από την (σχ. 5.63) βρίσκουμε: $\phi = 0$ οπότε από την (σχ. 5.62): $\frac{b}{a} = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$. Τότε η έλλειψη που θα αντιστοιχεί στην (σχ. 5.58) στο σύστημα $x.y$ θα είναι (βλ. Άσκ.1-Λυμένη (σχ. 1.5)):

$$\left(\frac{E_{2x}}{a}\right)^2 + \left(\frac{E_{2y}}{b}\right)^2 - 2\left(\frac{E_{2x}}{a}\right)\left(\frac{E_{2y}}{b}\right)\cos\phi = \sin^2\phi \tag{5.64}$$

η οποία για $\phi = 0$ γίνεται: $\left(\frac{E_{2x}}{a} - \frac{E_{2y}}{b}\right)^2 = 0$ και από την οποία :

$$E_{2y} = \frac{b}{a}E_{2x} = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}E_{2x} = \tan\theta E_{2x} \tag{5.65}$$

Δηλαδή τελικά το διάνυσμα Jones $\mathbf{E}_2$ παριστάνει ένα πεδίο το οποίο είναι γραμμικά πολωμένο με κλίση $\tan a = \tan\theta$ ως προς τον άξονα των x. Η ένταση του φωτός στην έξοδο του πολωτή με βάση τη (σχ. 5.8):

$$I_2 = E_2^{*T} E_2$$

θα είναι: $$I_2 = \left(A_x^* \cos^2\theta \quad A_x^* \sin\theta\cos\theta\right)\begin{pmatrix} A_x \cos^2\theta \\ A_x \sin\theta\cos\theta \end{pmatrix} = A_x A_x^* \cos^2\theta$$

Δηλαδή: $$I_2 = I_1 \cos^2\theta \tag{5.66}$$

όπου: $I_1 = A_x A_x^*$ η ένταση του προσπίπτοντος φωτός. Η (σχ. 5.66) αποτελεί τη γνωστή έκφραση του νόμου του Malus.

Έστω τώρα μετά τον περιστρεφόμενο πολωτή τοποθετούμε ένα δεύτερο, του οποίου ο άξονας διέλευσης είναι κατακόρυφος. Ο πίνακας Jones του τελευταίου θα είναι κατά τα γνωστά (σχ. 5.32): $\mathbf{J}_{ij}\left(90^0\right) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Τότε το διάνυσμα Jones στην έξοδό του με βάση τη (σχ. 5.57) θα είναι:

$$\mathbf{E}_3 = \begin{pmatrix} E_{3x} \\ E_{3y} \end{pmatrix} = \mathbf{J}_{ij}\left(90^0\right)\mathbf{E}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_x \cos^2\theta \\ A_x \sin\theta\cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ A_x \sin\theta\cos\theta \end{pmatrix} \tag{5.67}$$

και η ένταση $I_3 = E_3^{*T} E_3$, η οποία με βάση την (σχ. 5.67):

$$I_3 = \begin{pmatrix} 0 & A_x^* \sin\theta\cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ A_x \sin\theta\cos\theta \end{pmatrix} = A_x A_x^* \sin^2\theta\cos^2\theta = \frac{I_1}{8}\left(1-\cos 4\theta\right) \qquad (5.68)$$

Κάτω από αυτές τις συνθήκες αν ο πρώτος πολωτής περιστρέφεται, τότε από τον δεύτερο θ' ανιχνεύουμε τέσσερα μηδενικά ελάχιστα για $\theta = 0^0, 90^0, 180^0, 270^0$.

Πλακίδιο καθυστέρησης με τον ταχύ του άξονα σε γωνία $\theta = 45^0$, που βρίσκεται μεταξύ δύο πολωτών με τους άξονες διέλευσης παράλληλους ή διασταυρωμένους

Θεωρούμε κατ' αρχή την περίπτωση ενός πλακιδίου καθυστέρησης με τον ταχύ (ή τον βραδύ του) άξονα σε γωνία $\theta = 45^0$ σε σχέση με τον άξονα x. Το τελευταίο βρίσκεται μεταξύ δύο πολωτών με του άξονες διέλευσης παράλληλους με τον y (Σχ. 5.5). Στον πρώτο πολωτή προσπίπτει φυσικό μονοχρωματικό φως έντασης $I = 1$. Θέλουμε να υπολογίσουμε την κατανομή της έντασης του φωτός κατά την έξοδό του από τον δεύτερο πολωτή.

Αν Φ είναι η καθυστέρηση φάσης που εισάγει το πλακίδιο τότε θα είναι:

$$\Phi = 2\pi\left(n_e - n_o\right)\left(d/\lambda\right) \qquad (5.69)$$

Με βάση τη (σχ. 5.48) το στραμμένο κατά θ πλακίδιο καθυστέρησης φάσης Φ θα έχει σαν πίνακα Jones: $\mathbf{J}_{ij} = \begin{pmatrix} \cos^2\theta + e^{-i\Phi}\sin^2\theta & \left(1-e^{-i\Phi}\right)\sin\theta\cos\theta \\ \left(1-e^{-i\Phi}\right)\sin\theta\cos\theta & \sin^2\theta + e^{i\Phi}\cos^2\theta \end{pmatrix}$ ο οποίος για $\theta = 45^0$ γίνεται: $\mathbf{J}\left(\theta = 45^0, \Phi\right) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1+e^{-i\Phi} & 1-e^{-i\Phi} \\ 1-e^{-i\Phi} & 1+e^{-i\Phi} \end{pmatrix}$. Και επειδή:

$e^{-i\Phi} = \cos\Phi - i\sin\Phi$ και $1+\cos\Phi = 2\cos^2\left(\Phi/2\right), 1-\cos\Phi = 2\sin^2\left(\Phi/2\right)$ τελικά:

$$\mathbf{J}\left(\theta = 45^0, \Phi\right) = \begin{pmatrix} \cos\left(\Phi/2\right) & i\sin\left(\Phi/2\right) \\ i\sin\left(\Phi/2\right) & \cos\left(\Phi/2\right) \end{pmatrix} \qquad (5.70)$$

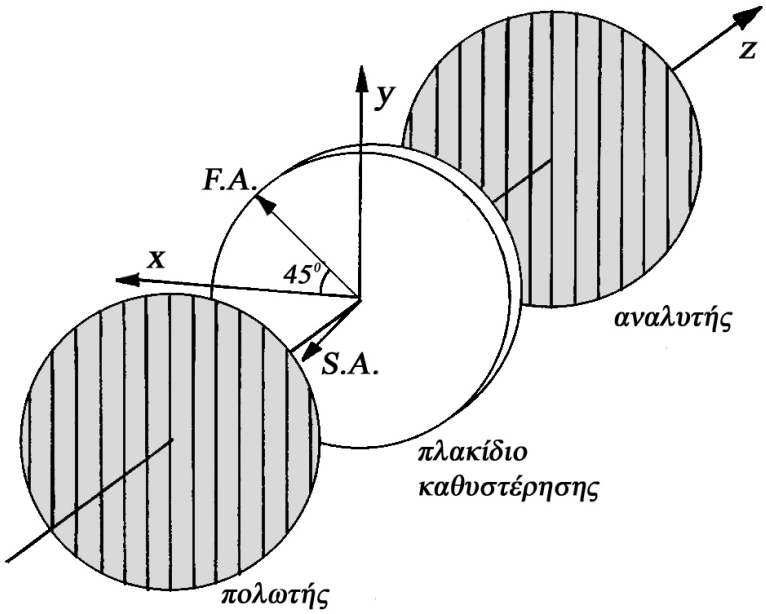
όπου απαλείψαμε από τα στοιχεία του πίνακα τον κοινό όρο $e^{-i(\Phi/2)}$ που είναι ένας παράγοντας σταθερής φάσης.

Εφόσον υποθέσαμε ότι το προσπίπτον φως είναι φυσικό και ένσταση $I = 1$ τότε το πεδίο κατά την έξοδό του από τον πρώτο πολωτή θα έχει διάνυσμα Jones:

$$\mathbf{E}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{5.71}$$

Επομένως το διάνυσμα Jones μετά τον δεύτερο πολωτή θα δίνεται από τη σχέση:

$$\mathbf{E}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos(\Phi/2) & i\sin(\Phi/2) \\ i\sin(\Phi/2) & \cos(\Phi/2) \end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 \\ \cos(\Phi/2) \end{pmatrix} \tag{5.72}$$



(Σχ. 5.5)

όπου: $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ο πίνακας Jones του δεύτερου πολωτή. Τότε η ένταση του φωτός της εξερχόμενης δέσμης θα είναι $I_2 = \mathbf{E}_2^{*T}\mathbf{E}_2$ δηλαδή:

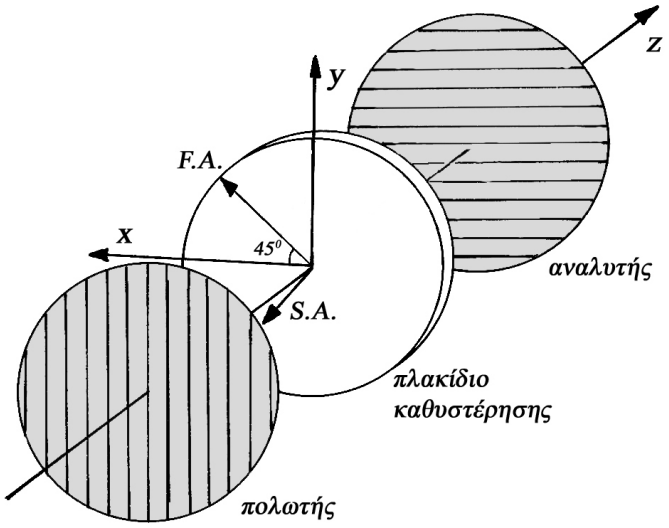
$$I_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & \cos(\Phi/2) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ \cos(\Phi/2) \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\cos^2\left(\frac{\Phi}{2}\right) = \frac{1}{2}\cos^2\left[\frac{\pi(n_e - n_o)d}{\lambda}\right] \tag{5.73}$$

Είναι ενδιαφέρον να παρατηρήσουμε ότι η ένταση του φωτός είναι συνάρτηση του μήκους κύματος λ. Αυτό σημαίνει ότι αν το προσπίπτον στον πρώτο πολωτή φως είναι λευκό, τότε το φάσμα του διερχομένου από τον δεύτερο δεν θα είναι συνεχές όπως το προσπίπτον. Πράγματι επειδή είναι διαμορφωμένο κατά τον παράγοντα

$\cos^2\left[\pi\left(n_e - n_o\right)d/\lambda\right]$, μορφολογικά θα συντίθεται από ένα ορισμένο αριθμό 'κροσσών' (στη πραγματικότητα πρόκειται για φασματικές ταινίες), που τα μέγιστά τους θα βρίσκονται στις θέσεις για τις οποίες: $\lambda = \left(n_e - n_o\right)d$, $\lambda = \left(n_e - n_o\right)d/2$, $\lambda = \left(n_e - n_o\right)d/3$ … Δηλ. το σύστημα των δύο πολωτών και του πλακιδίου καθυστέρησης ενεργεί σαν φίλτρο, αποκόπτοντας κατά διαστήματα περιοχές του ορατού φάσματος. Η περιοδικότητα των μεγίστων των φασματικών ταινιών φθίνει συναρτήσει του μ.κ. Επίσης όσο πιο μεγάλο είναι το πάχος d του πλακιδίου, τόσο πιο μεγάλος είναι και ο αριθμός φασματικών ταινιών που περιλαμβάνεται στα όρια του ορατού φάσματος. Στην (§ 8.1) είδαμε πως χρησιμοποιείται αυτό το σύστημα, προκειμένου να κατασκευαστούν φίλτρα (φίλτρα Lyot), πολύ μικρού φασματικού εύρους $\Delta\lambda$ (βλ. Σχ. 8.1.2), (Εικ. 8.1.10).

Έστω ότι τώρα περιστρέφουμε τον δεύτερο πολωτή (αναλυτή) κατά 90^0 όπως φαίνεται στο (Σχ. 5.6). Τότε πολωτής και αναλυτής θα είναι διασταυρωμένοι. Ο πίνακας Jones του αναλυτή θα είναι (σχ. 5.31): $\mathbf{J}_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ και το διάνυσμα Jones του πεδίου στην έξοδό του θα δίνεται από τη σχέση:

$$\mathbf{E}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos(\Phi/2) & i\sin(\Phi/2) \\ i\sin(\Phi/2) & \cos(\Phi/2) \end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} i\sin(\Phi/2) \\ 0 \end{pmatrix} \tag{5.74}$$



(Σχ. 5.6)

Τελικά η ένταση του φωτός μετά τον αναλυτή θα δίνεται κατά τα γνωστά από τη σχέση: $I_2 = \mathbf{E}_2^{*T}\mathbf{E}_2$. Επομένως:

$$I_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -i\sin(\Phi/2) & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} i\sin(\Phi/2) \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\sin^2\left(\frac{\Phi}{2}\right) = \frac{1}{2}\sin^2\left[\frac{\pi(n_e - n_o)d}{\lambda}\right] \qquad (5.75)$$

Και στην περίπτωση αυτή, για προσπίπτον λευκό φως στον πολωτή, η κατανομή της έντασης μετά τον αναλυτή θα είναι διαμορφωμένη κατά τον παράγοντα $\sin^2\left[\pi(n_e - n_o)d/\lambda\right]$. Δηλ. μορφολογικά θα συντίθεται από ένα ορισμένο αριθμό 'κροσσών' (στη πραγματικότητα πρόκειται για φασματικές ταινίες), που τα μέγιστά τους θα βρίσκονται στις θέσεις για τις οποίες: $\lambda = 2(n_e - n_o)d$, $\lambda = 2(n_e - n_o)d/3$, $\lambda = 2(n_e - n_o)d/5$ …Επομένως αυτά τα μήκη κύματος με βάση τη (σχ. 5.69) θα αντιστοιχούν σε καθυστέρηση φάσης $\Phi = \pi, 3\pi, 5\pi....$ δηλ. θα καθιστούν το πλακίδιο, πλακίδιο $\lambda/2$, ή περιττό ακέραιο πολλαπλάσιο του $\lambda/2$. Και γι' αυτή την περίπτωση όσο πιο μεγάλο είναι το πάχος d του πλακιδίου, τόσο πιο μεγάλος είναι και ο αριθμός φασματικών ταινιών που περιλαμβάνεται στα όρια του ορατού φάσματος.

Η μέθοδος των Kent-Lawson για τον υπολογισμό των στοιχείων ενός ελλειπτικά πολωμένου φωτός

Γνωρίζουμε ότι η κανονικοποιημένη μορφή του διανύσματος Jones δίνεται από τη (σχ. 5.10):

$$\mathbf{E}_{nor.} = \begin{pmatrix} \cos a e^{-i(\phi/2)} \\ \sin a e^{i(\phi/2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos a \\ \sin a e^{i\phi} \end{pmatrix} \qquad (5.76)$$

όπου από τις (σχ. 5.11):

$$\cos a = A_x \Big/ \sqrt{A_x^2 + A_y^2} \ , \ \sin a = A_y \Big/ \sqrt{A_x^2 + A_y^2} \ , \ \tan a = A_y / A_x \qquad (5.77)$$

Δηλ. η διαφορά φάσης $\phi = \phi_y - \phi_x$ και η γωνία $a = \arctan A_y / A_x$ η οποία εξαρτάται από το λόγο των πλατών A_y / A_x καθορίζουν πλήρως την κατάσταση πόλωσης ενός εν γένει ελλειπτικά πολωμένου φωτός. Πράγματι με βάση τα αποτελέσματα της (Άσκ.1-Λυμένη) βρίσκουμε ότι εφόσον είναι γνωστά τα a, ϕ τότε: α) Ο προσανατολισμός της έλλειψης, δηλ. η γωνία ψ (αζιμούθιο) που σχηματίζει ο μεγάλος άξονας της έλλειψης με τον άξονα x δίνεται από τη ((σχ. 1.20) Άσκ.1-Λυμένη):

$$\tan 2\psi = \tan 2a \cos\phi \tag{5.78}$$

β) Η ελλειπτικότητα της έλλειψης $e = A_\eta / A_\xi$ δηλ. ο λόγος του μικρού προς τον μεγάλο της άξονά της δίνεται από τη ((σχ. 1.23), Άσκ.1-Λυμένη):

$$\sin 2\varepsilon = \sin 2a \sin\phi \tag{5.79}$$

όπου $\tan\varepsilon = \pm\left(A_\eta / A_\xi\right)$ ((σχ. 1.19), Άσκ.1-Λυμένη). γ) Τέλος η φορά διαγραφής του ελλειπτικά πολωμένου φωτός δίνεται από το πρόσημο της ((σχ. 1.19) Άσκ.1-Λυμένη). $(-)$ για το δεξιόστροφα ελλειπτικά πολωμένο φως και $(+)$ για το αριστερόστροφο. Η μέθοδος των Kent-Lawson αποσκοπεί στον πειραματικό προσδιορισμό των στοιχείων a, ϕ και ακολουθεί την εξής διαδικασία:

Ελλειπτικά εν γένει πολωμένο φως του οποίου το διάνυσμα Jones δίνεται από τη (σχ. 5.76), προσπίπτει σε πλακίδιο καθυστέρησης $\mathbf{J}_{ij}(\theta, \Phi)$ του οποίου μπορούμε να μεταβάλουμε τη στροφή θ και την καθυστέρηση φάσης Φ. Το τελευταίο μπορεί να είναι π.χ. ένας αντισταθμιστής Babinet (βλ. § 5.7.2). Ρυθμίζουμε τα θ, Φ έτσι ώστε το εξερχόμενο από το πλακίδιο φως να είναι κυκλικά πολωμένο. Ο έλεγχος αυτής της κατάστασης πόλωσης γίνεται με την περιστροφή ενός γραμμικού πολωτή μπροστά από έναν ανιχνευτή. Στην περίπτωση που το φως είναι κυκλικά πολωμένο, τότε ο ανιχνευτής κατά την περιστροφή του πολωτή θα μας δίνει συνεχώς σταθερή ένταση.

Έστω
$$\mathbf{E} = \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos a \\ \sin a e^{i\phi} \end{pmatrix} \tag{5.80}$$

είναι το διάνυσμα Jones του προσπίπτοντος ελλειπτικά πολωμένου φωτός σε στραμμένο κατά θ πλακίδιο, το οποίο εισάγει καθυστέρηση φάσης Φ και το αποτέλεσμα στην έξοδο είναι έστω δεξιόστροφα κυκλικά πολωμένο φως. Τότε η εξίσωση που διέπει αυτήν την κατάσταση θα είναι:

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{-i\Phi} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \end{pmatrix} = \tfrac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} \tag{5.81}$$

όπου: $\mathbf{J}_{ij}(\theta, \Phi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{-i\Phi} \end{pmatrix}$ ο πίνακας Jones του πλακιδίου για $\theta = 0^0$. Η επίλυση

της (σχ. 5.81) ως προς E_x, E_y και η απλοποίηση έγινε με τη βοήθεια της Mathematica η οποία μας έδωσε:

```
In[1]:= a =
        Solve[(Cos[θ]  -Sin[θ]) · (1   0) · (Cos[θ]  Sin[θ]) · (Ex) == 1/√2 (1), {Ex, Ey}] //
                (Sin[θ]  Cos[θ])   (0  e^(-iφ))   (-Sin[θ]  Cos[θ])   (Ey)        (i)
          ExpToTrig // ComplexExpand

Out[1]= {{Ex → -(Cos[θ]/√2 + i Sin[θ]/√2) (-Cos[θ] + i e^(iφ) Sin[θ]),
          Ey → -(e^(iφ) Cos[θ] - i Sin[θ]) (-i Cos[θ]/√2 + Sin[θ]/√2)}}

In[2]:= a // FullSimplify

Out[2]= {{Ex → e^(iθ) (Cos[θ] + Sin[θ] (-i Cos[φ] + Sin[φ]))/√2, Ey → e^(iθ) (i e^(iφ) Cos[θ] + Sin[θ])/√2}}
```

$$\mathbf{E} = \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos a \\ \sin a e^{i\phi} \end{pmatrix} = \left(1/\sqrt{2}\right) \begin{pmatrix} \cos\theta - ie^{i\Phi}\sin\theta \\ \sin\theta + ie^{i\Phi}\cos\theta \end{pmatrix} \tag{5.82}$$

όπου από τα στοιχεία E_x, E_y απαλείψαμε τον κοινό όρο $e^{i\theta}$. Το διάνυσμα Jones $\mathbf{E}$ που δίνεται από τη (σχ. 5.82) είναι κανονικοποιημένο επειδή εύκολα αποδεικνύεται ότι: $\mathbf{E}^{*T}\mathbf{E} = 1$. Εξισώνοντας τώρα τα αντίστοιχα στοιχεία των πινάκων της (σχ. 5.82) βρίσκουμε:

$$\left.\begin{aligned} \sin a e^{i\phi} &= \left(1/\sqrt{2}\right)\left(\sin\theta + ie^{i\Phi}\cos\theta\right) \\ \cos a &= \left(1/\sqrt{2}\right)\left(\cos\theta - ie^{i\Phi}\sin\theta\right) \end{aligned}\right\} \tag{5.83}$$

Διαιρώντας τώρα τις (σχ. 5.83) μεταξύ τους βρίσκουμε:

$$\tan a e^{i\phi} = \frac{\sin\theta + ie^{i\Phi}\cos\theta}{\cos\theta - ie^{i\Phi}\sin\theta} \tag{5.84}$$

και καθιστώντας τον παρονομαστή της πραγματικό αριθμό, μετατρέπεται στην:

$$\tan a e^{i\phi} = \frac{-\sin\Phi\cos 2\theta + i\cos\Phi}{1 + \sin 2\theta \sin\Phi} \tag{5.85}$$

Εξισώνοντας κατόπιν τα πραγματικά και φανταστικά μέρη της (σχ. 5.85) έχουμε:

$$\tan a \cos\phi = \frac{-\sin\Phi\cos 2\theta}{1+\sin 2\theta\sin\Phi} \tag{5.86}$$

και
$$\tan a \sin\phi = \frac{\cos\Phi}{1+\sin 2\theta\sin\Phi} \tag{5.87}$$

Αν τώρα διαιρέσουμε μεταξύ τους τις (σχ. 5.86, 5.87) βρίσκουμε:

$$\cot\phi = -\tan\Phi\cos 2\theta \tag{5.88}$$

Κατόπιν υψώνοντας στο τετράγωνο τις (σχ. 5.86, 5.87) και προσθέτοντάς έχουμε:

$$\tan a = \frac{\sqrt{1-\sin 2\theta\sin\Phi}}{\sqrt{1+\sin 2\theta\sin\Phi}} \tag{5.89}$$

Όμως:
$$\cos a = \frac{\sqrt{1+\sin 2\theta\sin\Phi}}{\sqrt{2}} \qquad \left(\cos q = \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2 q}}\right) \tag{5.90}$$

$$\sin a = \frac{\sqrt{1-\sin 2\theta\sin\Phi}}{\sqrt{2}} \qquad \left(\sin q = \frac{\tan q}{\sqrt{1+\tan^2 q}}\right) \tag{5.91}$$

Κατόπιν υψώνοντας στο τετράγωνο τις (σχ. 5.90, 5.91) και αφαιρώντας έχουμε:

$$\cos 2a = \sin 2\theta\sin\Phi \tag{5.92}$$

Με τη βοήθεια λοιπόν των (σχ. 5.88,5.92) γνωρίζοντας τα στοιχεία θ,Φ (δηλ. το αζιμούθιο και την καθυστέρηση φάσης) του πλακιδίου, μπορούμε να βρούμε τα στοιχεία a,ϕ (δηλ. το λόγο των πλατών και τη διαφορά φάσης) του ελλειπτικά πολωμένου φωτός. Κατόπιν με τη βοήθεια των (σχ. 5.78,5.79) βρίσκουμε το αζιμούθιο και την ελλειπτικότητα της έλλειψης.

Σύμφωνη επαλληλία (σύζευξη) διανυσμάτων Jones

Αν δύο Η/Μ διαταραχές συσχετίζονται μέσα στα όρια του χρόνου συμφωνίας τους (βρισκόμενες σε σύζευξη), τότε με βάση την αρχή της επαλληλίας, το συνολικό τους πλάτος θα είναι ίσο με το άθροισμα των επί μέρους πλατών. Επομένως αν

$\mathbf{E}_1 = \begin{pmatrix} A_{1x}e^{i\phi_{1x}} \\ A_{1y}e^{i\phi_{1y}} \end{pmatrix}$ και $\mathbf{E}_2 = \begin{pmatrix} A_{2x}e^{i\phi_{2x}} \\ A_{2y}e^{i\phi_{2y}} \end{pmatrix}$ αντιπροσωπεύουν τα διανύσματα Jones δύο σε σύζευξη διαταραχών, τότε το διάνυσμα Jones της συνολικής διαταραχής θα δίνεται από τη σχέση:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2 = \begin{pmatrix} A_{1x}e^{i\phi_{1x}} \\ A_{1y}e^{i\phi_{1y}} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} A_{2x}e^{i\phi_{2x}} \\ A_{2y}e^{i\phi_{2y}} \end{pmatrix} \tag{5.93}$$

Σαν παράδειγμα χρησιμοποιούμε το οριζόντια γραμμικά πολωμένο φως του οποίου το διάνυσμα Jones (σχ. 5.16) είναι $\mathbf{E}_{\mathrm{O}} = \begin{pmatrix} A_x e^{i\phi_x} \\ 0 \end{pmatrix}$ και το κατακόρυφα γραμμικά πολωμένο φως του οποίου το διάνυσμα Jones (σχ. 5.18) είναι $\mathbf{E}_{\mathrm{K}} = \begin{pmatrix} 0 \\ A_y e^{i\phi_y} \end{pmatrix}$. Τα τελευταία θεωρούμε ότι βρίσκονται μεταξύ τους σε σύζευξη. Τότε η επαλληλία τους θα μας δώσει:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_{\mathrm{O}} + \mathbf{E}_{\mathrm{K}} = \begin{pmatrix} A_x e^{i\phi_x} \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ A_y e^{i\phi_y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_x e^{i\phi_x} \\ A_y e^{i\phi_y} \end{pmatrix} \tag{5.94}$$

Όπως βλέπουμε από τη σχέση αυτή, το τελικό αποτέλεσμα είναι εν γένει ένα ελλειπτικά πολωμένο φως (σχ. 5.5). Στην περίπτωση για την οποία $A_x = A_y = A$ και $\phi_y = \phi_x = \phi$ τότε από την (σχ. 5.94) βρίσκουμε:

$$\mathbf{E} = Ae^{i\phi} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{5.95}$$

που παριστάνει το διάνυσμα Jones για ένα γραμμικά πολωμένο φως με κλίση $+45^0$ σε σχέση με τον άξονα x (σχ. 5.20).

Ένα δεύτερο παράδειγμα αποτελεί η σύμφωνη επαλληλία δύο κυκλικά πολωμένων φώτων (ενός δεξιόστροφου και ενός αριστερόστροφου) με ίδια πλάτη. Αν τα θεωρήσουμε στην κανονικοποιημένη τους μορφή τότε:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_R + \mathbf{E}_L = \tfrac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} + \tfrac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} = \tfrac{2}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{5.96}$$

Δηλ. το τελικό αποτέλεσμα (ανεξάρτητα από τον παράγοντα κανονικοποίησης) είναι ένα γραμμικά πολωμένο φως παράλληλο προς τον άξονα των x.

Στη γενικότερη περίπτωση μπορούμε ν' αποδείξουμε ότι ένα ελλειπτικά πολωμένο φως, μπορεί να επιτευχθεί από την σύμφωνη επαλληλία δύο κυκλικά πολωμένων φώτων (αντίθετης στροφικότητας) και διαφορετικών πλατών. Πράγματι αν A_1, A_2 $\left(A_1 > A_2\right)$ είναι τα πλάτη τους τότε θα έχουμε:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_R + \mathbf{E}_L = A_1\begin{pmatrix}1\\ i\end{pmatrix} + A_2\begin{pmatrix}1\\ -i\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}A_1 + A_2\\ i\left(A_1 - A_2\right)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}E_x\\ E_y\end{pmatrix} \tag{5.97}$$

Και εφόσον λάβουμε υπόψη μας τον χωροχρονικό παράγοντα $e^{i(\omega t - kz)}$ (σχ. 5.4),

$$\mathbf{E} = \begin{pmatrix}E_x\\ E_y\end{pmatrix} = e^{i(\omega t - kz)}\begin{pmatrix}A_1 + A_2\\ i\left(A_1 - A_2\right)\end{pmatrix} = e^{i(\omega t - kz)}\begin{pmatrix}A_1 + A_2\\ \left(A_1 - A_2\right)e^{i\pi/2}\end{pmatrix} \tag{5.98}$$

από την οποία: $$\left.\begin{aligned} E_x &= \left(A_1 + A_2\right)e^{i(\omega t - kz)}\\ E_y &= \left(A_1 - A_2\right)e^{i(\omega t - kz + \pi/2)}\end{aligned}\right\}$$

Και παίρνοντας τα πραγματικά τους μέρη:

$$E_x = \left(A_1 + A_2\right)\cos\left(\omega t - kz\right) \tag{5.99}$$

και $$\begin{aligned} E_y &= \left(A_1 - A_2\right)\cos\left(\omega t - kz + \pi/2\right)\\ &= \left(A_1 - A_2\right)\sin\left(\omega t - kz\right)\end{aligned} \tag{5.100}$$

Υψώνοντας στο τετράγωνο και προσθέτοντας τις (σχ. 5.99,100) βρίσκουμε:

$$\frac{E_x^2}{\left(A_1 + A_2\right)^2} + \frac{E_y^2}{\left(A_1 - A_2\right)^2} = 1 \tag{5.101}$$

Η τελευταία σχέση συνιστά εξίσωση έλλειψης με τον μεγάλο της άξονα $\left(A_1 + A_2\right)$ κατά τον x και τον μικρό $\left(A_1 - A_2\right)$ κατά τον y.Το φως είναι δεξιόστροφα ελλειπτικά πολωμένο. Η (σχ. 5.101) θα μπορούσε να προκύψει κατ' ευθεία από την ((σχ. 1.5) Άσκ.1-Λυμένη):

$$\left(\frac{E_x}{A_x}\right)^2+\left(\frac{E_y}{A_y}\right)^2-2\left(\frac{E_x}{A_x}\right)\left(\frac{E_y}{A_y}\right)\cos\phi=\sin^2\phi$$

όπου: $A_x = A_1 + A_2$, $A_y = A_1 - A_2$ και $\phi = \pi/2$.

Ανίχνευση τυχαίας κατάστασης πόλωσης με τη βοήθεια πλακιδίου καθυστέρησης $\lambda/4$ και αναλυτή

Η κλασσική μεθοδολογία ανίχνευσης μιας τυχαίας κατάστασης πόλωσης είναι γνωστό ότι γίνεται με τη βοήθεια ενός πλακιδίου $\lambda/4$ και ενός πολωτή (αναλυτή). Η όλη διαδικασία περιγράφεται λεπτομερώς (βλ. Γενικές οδηγίες για την εκτέλεση των πειραμάτων: Πείραμα A_5), όπου περιλαμβάνονται και οι περιπτώσεις των μερικά πολωμένων φώτων. Στα επόμενα θα δώσουμε ένα παράδειγμα ανίχνευσης ελλειπτικά πολωμένου φωτός. Δηλ. με τη βοήθεια του λογισμού Jones θ' ανιχνεύσουμε την κατάστασή του καθώς και τον προσανατολισμό της έλλειψης (αζιμούθιο του μεγάλου άξονά) όπως και την ελλειπτικότητά της. Η πειραματική διαδικασία αφορά στην περιστροφή του πλακιδίου κατά μία γωνία (πάντα σε σχέση με τον άξονα x) έτσι ώστε το προσπίπτον σ' αυτόν φως να μετατραπεί σε γραμμικά πολωμένο. Κατόπιν περιστρέφοντας τον αναλυτή, μπορούμε σε μία θέση να πάρουμε μηδενικό ελάχιστο έντασης (κατάσβεση).

Για να συμβούν τα προαναφερόμενα, έστω ότι περιστρέψαμε το πλακίδιο κατά γωνία θ και τον αναλυτή κατά ω. Τότε ο πίνακας Jones των δύο συνδυασμένων πολωτικών στοιχείων θα είναι:

$$\mathbf{J}_{ij}=\mathbf{J}_{\text{AN.}}(\omega)\mathbf{J}\left(\frac{\lambda}{4},\theta\right) \tag{5.102}$$

όπου από τις (σχ. 5.28,50) θα έχουμε:

$$\mathbf{J}_{\text{AN.}}(\omega)=\begin{pmatrix}\cos^2\omega & \sin\omega\cos\omega\\ \sin\omega\cos\omega & \sin^2\omega\end{pmatrix}\ ,\ \mathbf{J}\left(\frac{\lambda}{4},\theta\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1+i\cos2\theta & i\sin2\theta\\ i\sin2\theta & 1-i\cos2\theta\end{pmatrix}$$

και τελικά:

$$\mathbf{J}_{ij}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}\cos^2\omega & \sin\omega\cos\omega\\ \sin\omega\cos\omega & \sin^2\omega\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1+i\cos2\theta & i\sin2\theta\\ i\sin2\theta & 1-i\cos2\theta\end{pmatrix} \tag{5.103}$$

Υποθέτουμε ότι κατά την εκτέλεση του πειράματος βρήκαμε: $\theta = 45^0$ και $\omega = 30^0$. Τότε: $\mathbf{J}_{\text{AN.}}(\omega) = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{J}\left(\frac{\lambda}{4}, \theta\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix}$ και από τη (σχ. 5.102) βρίσκουμε:

$$\mathbf{J} = \frac{1}{4\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 3 + i\sqrt{3} & i3 + \sqrt{3} \\ \sqrt{3} + i & i\sqrt{3} + 1 \end{pmatrix} \tag{5.104}$$

Αν $\mathbf{E} = \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \end{pmatrix}$ το διάνυσμα Jones του προσπίπτοντος φωτός στο σύστημα πλακιδίου-αναλυτή, για συνθήκες κατάσβεσης στην έξοδό του θα έχουμε:

$$\frac{1}{4\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 3 + i\sqrt{3} & i3 + \sqrt{3} \\ \sqrt{3} + i & i\sqrt{3} + 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E_x \\ E_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{5.105}$$

όπου οι δύο εξισώσεις του συστήματος θα είναι:

$$\left(3 + i\sqrt{3}\right)E_x + \left(i3 + \sqrt{3}\right)E_y = 0 \tag{5.106}$$

$$\left(\sqrt{3} + i\right)E_x + \left(i\sqrt{3} + 1\right)E_y = 0 \tag{5.107}$$

Οι τελευταίες δύο εξισώσεις είναι ίδιες εκτός ενός πολλαπλασιαστικού παράγοντα $\left(\sqrt{3}\right)$. Οπότε από την (σχ. 5.107) βρίσκουμε:

$$\frac{E_y}{E_x} = -\frac{\sqrt{3}}{2} + i\left(\frac{1}{2}\right) \tag{5.108}$$

Στην πολική του μορφή: $\frac{E_y}{E_x} = \left(\frac{A_y}{A_x}\right)e^{i\phi} = \left(\frac{A_y}{A_x}\right)\cos\phi + i\left(\frac{A_y}{A_x}\right)\sin\phi$ (5.109)

οπότε εξισώνοντας τα πραγματικά και φανταστικά μέρη των (σχ. 5.108, 109) θα έχουμε:

$$\frac{A_y}{A_x}\cos\phi = -\frac{\sqrt{3}}{2} \tag{5.110}$$

$$\frac{A_y}{A_x}\sin\phi = \frac{1}{2} \tag{5.111}$$

Η ύψωση των δύο τελευταίων σχέσεων στο τετράγωνο και η πρόσθεσή τους μας δίνει:

$$A_y / A_x = \pm 1 \tag{5.112}$$

και η διαίρεσή τους: $\phi = \arctan\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = -30^0$ (5.113)

Δηλ. βρήκαμε το λόγο των πλατών των ορθογωνίων συνιστωσών του προσπίπτοντος φωτός καθώς και τη διαφορά φάσης μεταξύ τους. Τότε με βάση αυτά τα συμπεράσματα, είναι δυνατόν να βρούμε τα χαρακτηριστικά στοιχεία του συγκεκριμένου φωτός όπως: α) Το αζιμούθιο ψ της έλλειψης (δηλ. τη γωνία του μεγάλου άξονά της με τον x) β) Την ελλειπτικότητα $e = A_\eta / A_\xi$ (το λόγο του μικρού προς μεγάλο άξονα της έλλειψης) και γ) Τη στροφικότητά της (δεξιόστροφο ή αριστερόστροφο φως). Τα στοιχεία αυτά προκύπτουν από τις εξής σχέσεις (βλ. Άσκ.1-Λυμένη):

$$\tan a = \frac{A_y}{A_x} \rightarrow (\text{σχ. } 1.18) \quad \tan\varepsilon = \pm\frac{A_\eta}{A_\xi} \rightarrow (\text{σχ. } 1.19)$$

$$\tan 2\psi = \tan 2a\cos\phi \rightarrow (\text{σχ. } 1.20) \quad \sin 2\varepsilon = \sin 2a\sin\phi \rightarrow (\text{σχ. } 1.23)$$

Α) Για $A_y / A_x = 1$ και $\phi = -30^0 \Rightarrow \tan a = A_y / A_x = 1 \Rightarrow a = 45^0$

$$\tan 2\psi = \tan 2a\cos\phi = \tan 90^0 \cos\phi \rightarrow \infty \Rightarrow 2\psi = 90^0 \Rightarrow \psi = 45^0$$

$$\sin 2\varepsilon = \sin 2a\sin\phi = \sin 90^0 \sin\left(-30^0\right) = -1/2 \Rightarrow \varepsilon = -15^0$$

$$\tan\varepsilon = \pm\frac{A_\eta}{A_\xi} \Rightarrow \tan\left(-15^0\right) = -0.267949 = \frac{A_\eta}{A_\xi} = e \Rightarrow \text{Δ.Ε.Π. φως.}$$

Β) Για $A_y / A_x = -1$ και $\phi = -30^0 \Rightarrow \tan a = A_y / A_x = -1 \Rightarrow a = -45^0$

$$\tan 2\psi = \tan 2a\cos\phi = \tan 90^0 \cos\phi \rightarrow -\infty \Rightarrow 2\psi = -90^0 \Rightarrow \psi = -45^0$$

$$\sin 2\varepsilon = \sin 2a\sin\phi = \sin\left(-90^0\right)\sin\left(-30^0\right) = 1/2 \Rightarrow \varepsilon = 15^0$$

$$\tan\varepsilon = \pm\frac{A_\eta}{A_\xi} \Rightarrow \tan\left(15^0\right) = 0.267949 = \frac{A_\eta}{A_\xi} = e \Rightarrow \text{Α.Ε.Π. φως.}$$

Θα προσπαθήσουμε στα επόμενα να προσεγγίσουμε τα τελευταία αποτελέσματα με περισσότερο διαφορετικό τρόπο, προκειμένου να δούμε αν προσδιορίζεται επακριβώς η φορά περιστροφής του Ε.Π.Φ.

Για το λόγο αυτό θεωρούμε την περίπτωση για την οποία $A_x = A_y = A''$ και $\phi = -30^0$. Τότε από τη ((σχ. 1.5) Άσκ.1-Λυμένη):

$$\left(\frac{E_x}{A_x}\right)^2 + \left(\frac{E_y}{A_y}\right)^2 - 2\left(\frac{E_x}{A_x}\right)\left(\frac{E_y}{A_y}\right)\cos\phi = \sin^2\phi \tag{5.114}$$

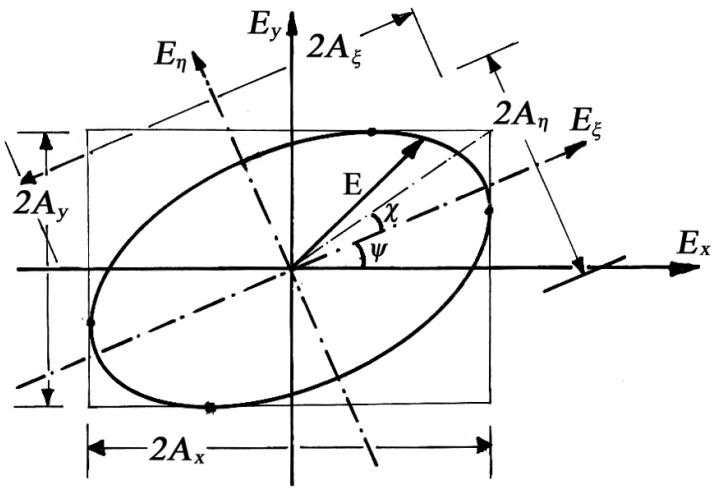
ή:

$$E_x^2 - \sqrt{3}E_xE_y + E_y^2 = a^2 \tag{5.115}$$

η οποία είναι της μορφής:

$$AE_x^2 + 2BE_xE_y + CE_y^2 = a^2 \tag{5.116}$$

όπου: $a = A''/2$. Η τελευταία σχέση περιγράφει μια έλλειψη στο σύστημα συντεταγμένων E_x, E_y της οποίας όμως το σύστημα συντεταγμένων E_ξ, E_η των κυρίων αξόνων της, είναι στραμμένο ως προς το πρώτο κατά γωνία ψ (Σχ. 5.7). Δηλ. η γωνία ψ



(Σχ. 5.7)

είναι το αζιμούθιο του μεγάλου άξονα της έλλειψης, σε σχέση με τον άξονα των x. Τα στοιχεία που θέλουμε να υπολογίσουμε είναι το αζιμούθιο ψ και η ελλειπτικότητα της έλλειψης $e = A_\eta / A_\xi$.

Για το λόγο αυτό εκτελούμε μία στροφή του E_x, E_y κατά γωνία ψ έτσι ώστε αυτό να ταυτιστεί με το σύστημα E_ξ, E_η που είναι κατά τη διεύθυνση των κυρίων αξόνων της έλλειψης. Κατόπιν εκφράζουμε τις συνιστώσες E_x, E_y του παλαιού συστήματος συναρτήσει των E_ξ, E_η στο νέο. Η διαδικασία αυτή μας είναι ήδη γνωστή και γίνεται με τη βοήθεια του πίνακα στροφής (σχ. 5.35) και της (σχ. 5.34):

$$\begin{pmatrix} E_x \\ E_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\psi & -\sin\psi \\ \sin\psi & \cos\psi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_\xi \\ E_\eta \end{pmatrix} \tag{5.117}$$

από την οποία:

$$\left.\begin{aligned} E_x &= E_\xi \cos\psi - E_\eta \sin\psi \\ E_y &= E_\xi \sin\psi + E_\eta \cos\psi \end{aligned}\right\} \tag{5.118}$$

Αντικαθιστούμε τις (σχ. 5.118) στη (σχ. 5.116) και μετά από πράξεις βρίσκουμε:

$$\left.\begin{aligned} &\left(A\cos^2\psi + 2B\sin\psi\cos\psi + C\sin^2\psi\right)E_\xi^2 + \\ &\left[2B\cos 2\psi - 2\left(A-C\right)\sin 2\psi\right]E_\xi E_\eta + \\ &\left(A\sin^2\psi - 2B\sin\psi\cos\psi + C\cos^2\psi\right)E_\eta^2 = a^2 \end{aligned}\right\} \tag{5.119}$$

Προκειμένου η έλλειψη αυτή να μην είναι στραμμένη στο σύστημα συντεταγμένων E_ξ, E_η θα πρέπει: $2B\cos 2\psi - \left(A-C\right)\sin 2\psi = 0$ από την οποία έχουμε:

$$\tan 2\psi = \frac{2B}{A-C} \tag{5.120}$$

Τότε η (σχ. 5.119) γίνεται: $$\frac{E_\xi^2}{A_\xi^2} + \frac{E_\eta^2}{A_\eta^2} = 1 \tag{5.121}$$

Οπότε:

$$\left(A\cos^2\psi + 2B\sin\psi\cos\psi + C\sin^2\psi\right)/a^2 = 1/A_\xi^2 \tag{5.122}$$

$$\left(A\sin^2\psi - 2B\sin\psi\cos\psi + C\cos^2\psi\right)/a^2 = 1/A_\eta^2 \tag{5.123}$$

και A_ξ, A_η τα μήκη των ημιαξόνων της έλλειψης.

Ο λόγος των δύο τελευταίων θα είναι:

$$\frac{A_\eta^2}{A_\xi^2} = \frac{A\cos^2\psi + 2B\sin\psi\cos\psi + C\sin^2\psi}{A\sin^2\psi - 2B\sin\psi\cos\psi + C\cos^2\psi} \tag{5.124}$$

Από τη σύγκριση μεταξύ των (σχ. 5.115, 116) βρίσκουμε: $A = C = 1$ και $2B = -\sqrt{3}$. Και επειδή $\phi = -30^0$ από τη (σχ. 5.120) έχουμε:

$$\tan 2\psi = \frac{2B}{A-C} = -\frac{\sqrt{3}}{0} \to -\infty \;\Rightarrow\; 2\psi = -90^0 \;\Rightarrow\; \psi = -45^0$$

από την οποία προκύπτει ότι το αζιμούθιο είναι $\psi = -45^0$. Επίσης από τη (σχ. 5.124) για $A = C = 1$, $2B = -\sqrt{3}$ και $\phi = -30^0$ βρίσκουμε:

$$\frac{A_\eta^2}{A_\xi^2} = \frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}} \;\Rightarrow\; \frac{A_\eta}{A_\xi} = \pm\tan\varepsilon \;\Rightarrow\; \varepsilon = \pm\arctan\sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}} = \pm 15^0 \Rightarrow e = 0.267945$$

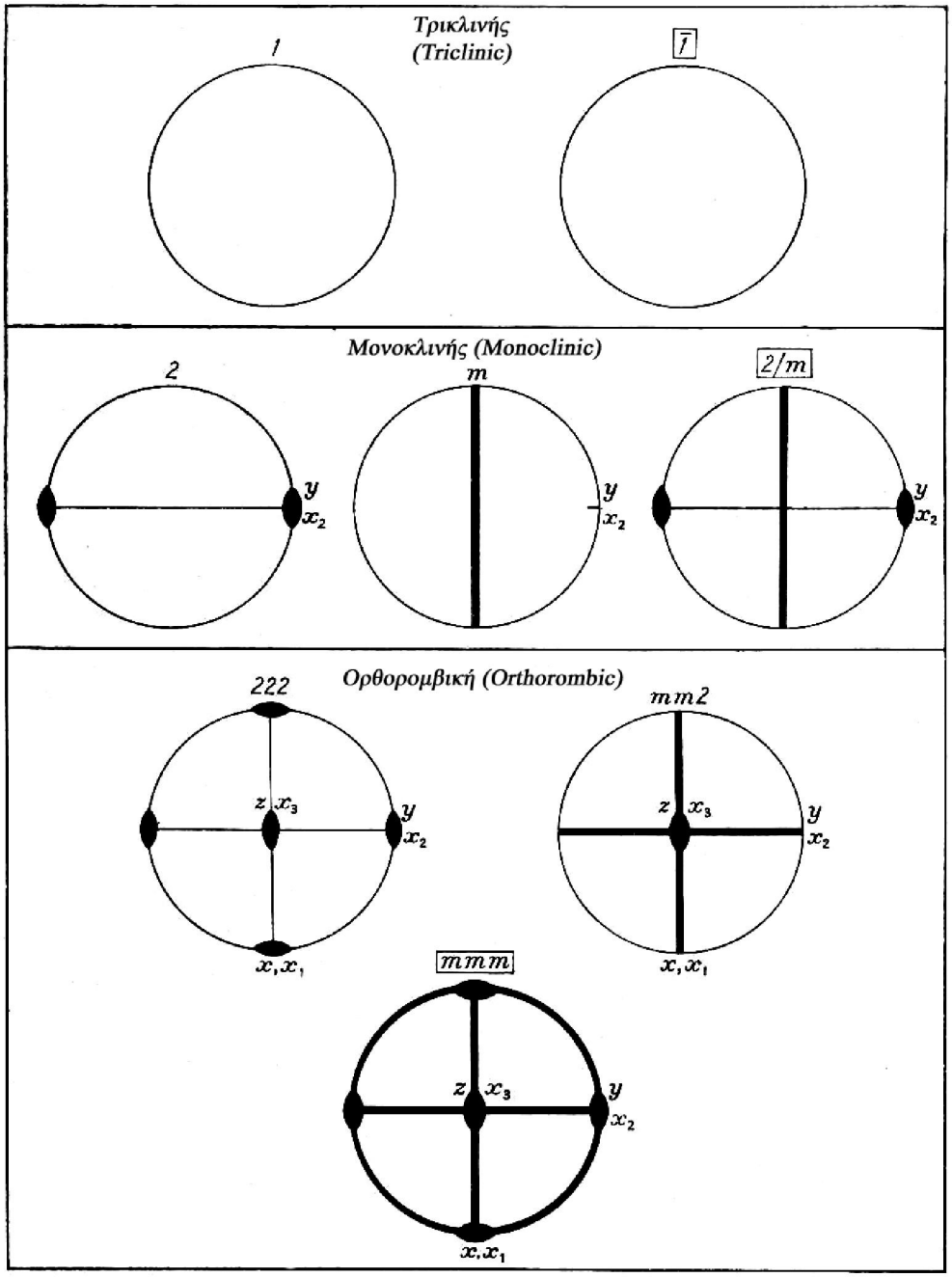
όπου e η ελλειπτικότητα της έλλειψης. Θα πρέπει να σημειώσουμε ότι με βάση την προαναφερόμενη διαδικασία, όταν $A_y / A_x = -1$ τότε βρίσκουμε $\psi = 45^0$. Αλλά ο υπολογισμός της ε μας οδηγεί στην τιμή $\varepsilon = \pm 75^0$ η οποία θα πρέπει ν' αποκλειστεί επειδή $-45^0 \le \varepsilon \le 45^0$. Άρα το φως τελικά είναι αριστερόστροφα ελλειπτικά πολωμένο με αζιμούθιο $\psi = -45^0$ και ελλειπτικότητα $e = 0.267945$.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ 6 ΠΙΝΑΚΕΣ ΣΥΜΜΕΤΡΙΑΣ

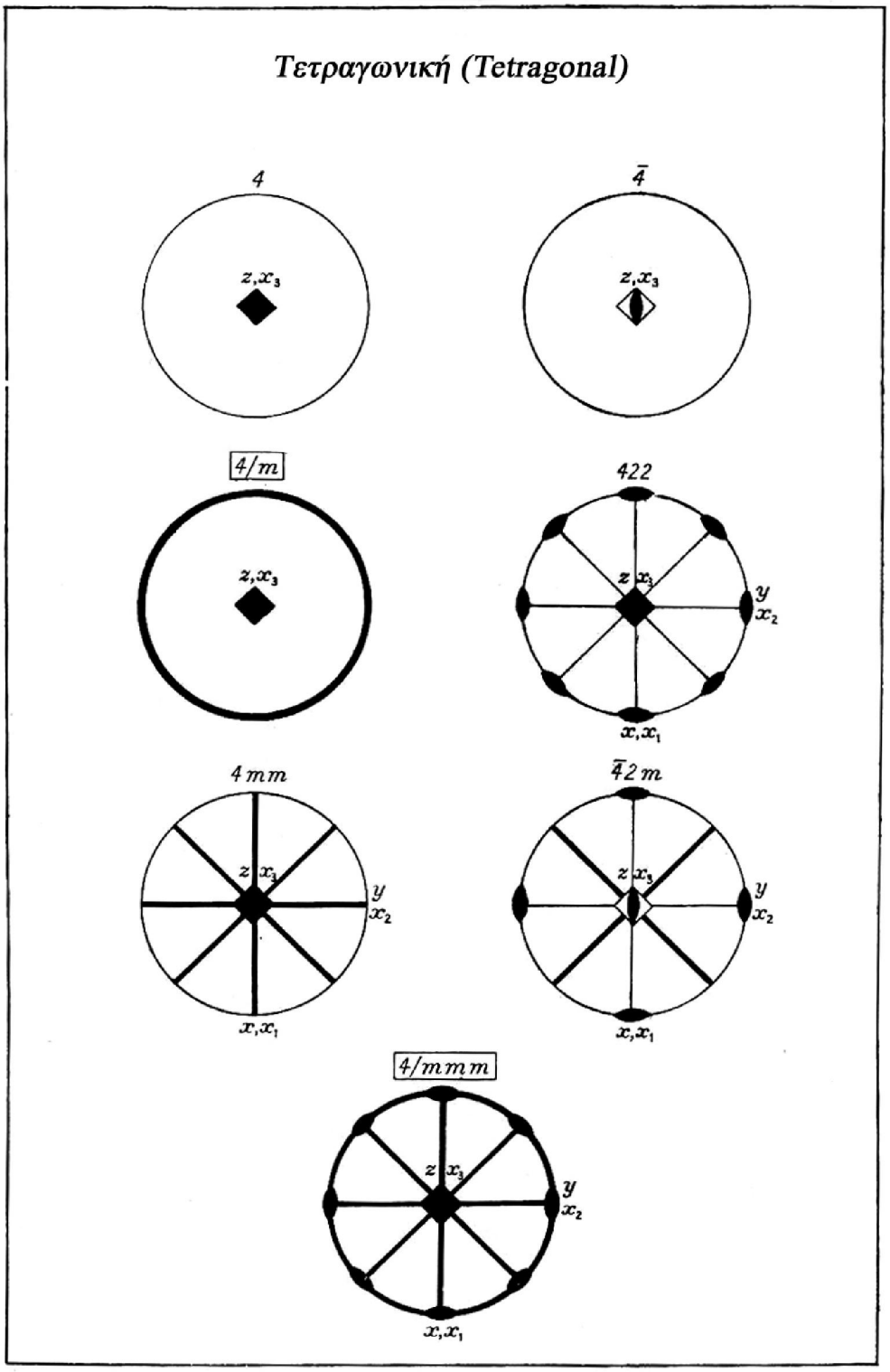
(Πίν.1α)

Στοιχεία συμμετρίας και τρόποι εκλογής των κυρίων αξόνων x_1,x_2,x_3, για τις 32 κρυσταλλικές τάξεις

(x_1,x_2,x_3 σ.σ. κυρίων αξόνων) (x ,y ,z κρυσταλλογραφικό σύστημα αξόνων)

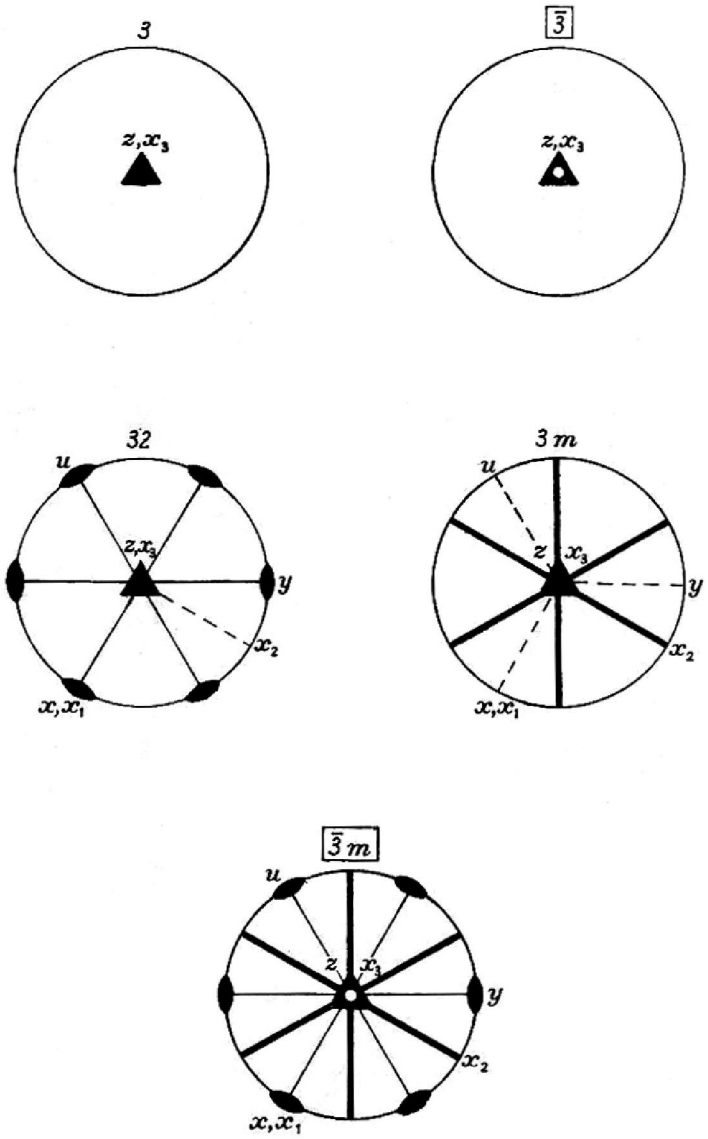


(Πίν.1β)


Τετραγωνική (Tetragonal)
4
z,x3
4̄
z,x3
4/m
z,x3
422
z x3
y
x2
x,x1
4mm
z x3
y
x2
x,x1
4̄2m
z x3
y
x2
x,x1
4/mmm
z x3
y
x2
x,x1

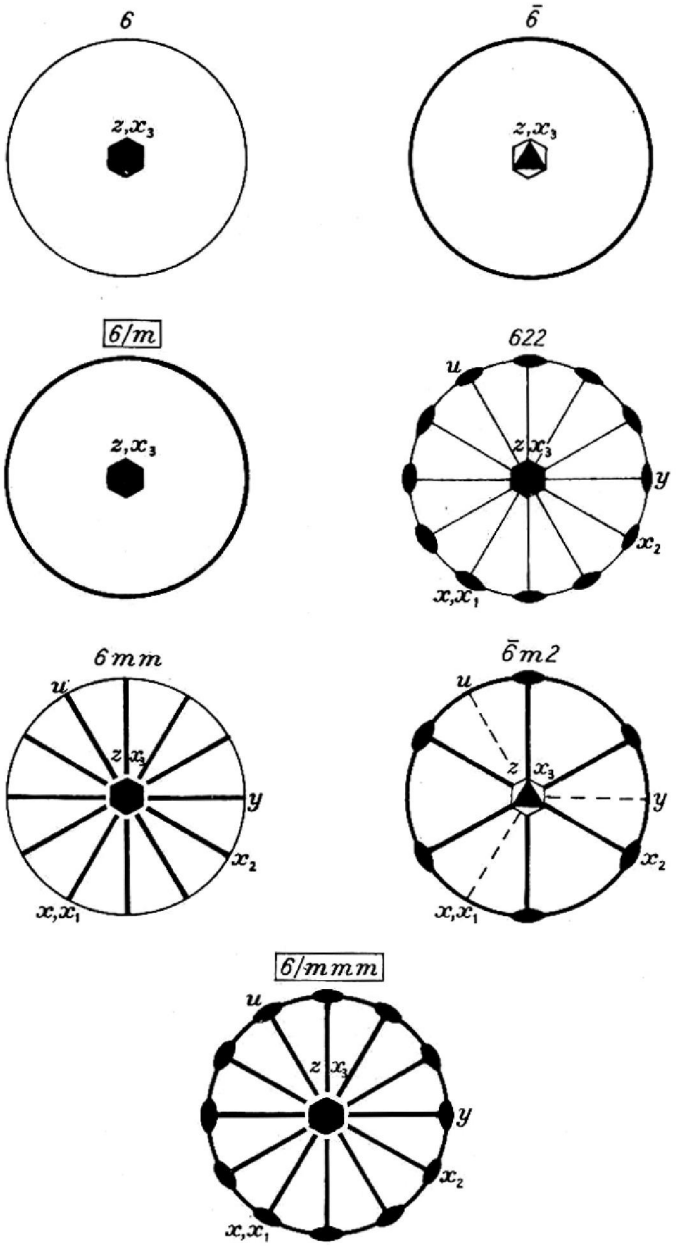
(Πίν.1γ)

Τριγωνική (Trigonal)



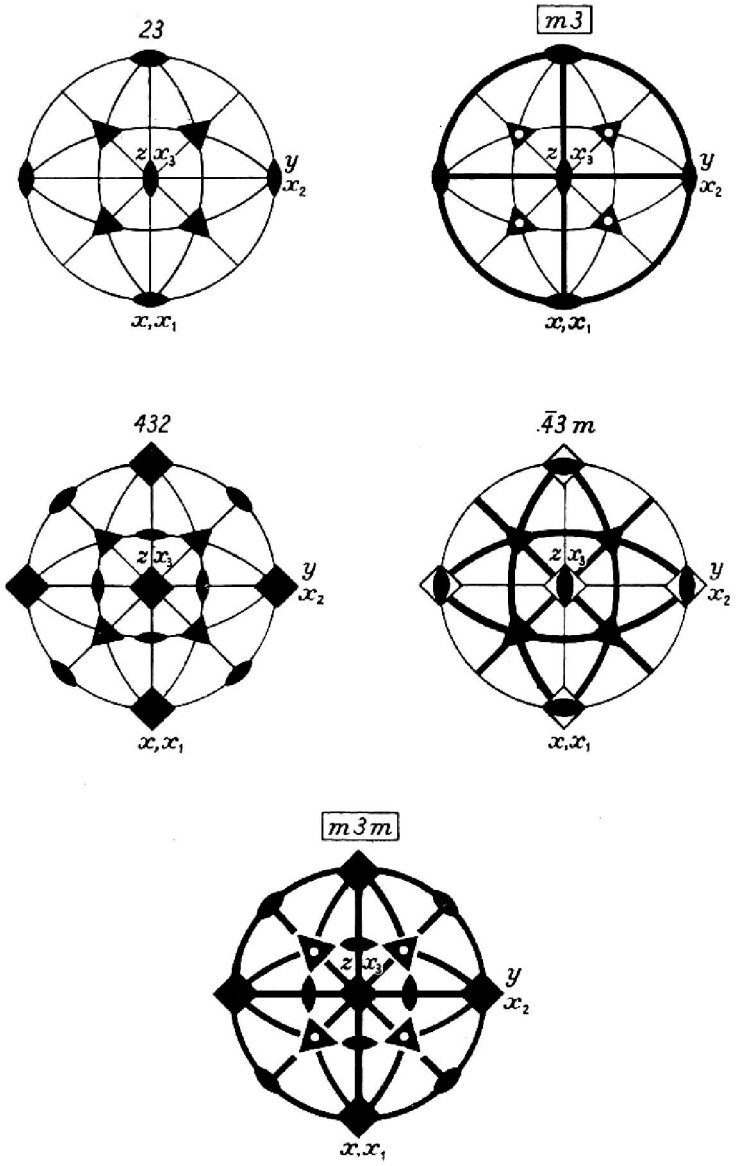
(Πίν.1δ)

Εξαγωνική (Hexagonal)



(Πίν.1ε)

Κυβική (Cubic)



(Πίν.2α)

ΠΙΕΖΟΗΛΕΚΤΡΙΚΟ ΦΑΙΝΟΜΕΝΟ

Πίνακες των στοιχείων d_{ij} $i=1,2,3$ $j=1,2,...,6$

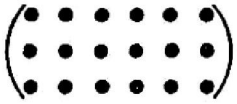
Στοιχεία με:

- • *μηδενικό μέτρο*
- ● *μέτρο διάφορο του μηδενός*
- ●—● *με ίσο μέτρο*
- ●—○ *με ίσο μέτρο αλλά αντίθετο πρόσημο*
- ◎ *με μέτρο ίσο με μείον το διπλάσιο αυτού που έχει η σκούρα κηλίδα με την οποία συνδέεται*

Κεντ/συμμετρικές τάξεις: $\bar{1}$,2/m,mmm,4/m,4/mmm,$\bar{3}$,$\bar{3}$m,6/m,6/mmm,m3,m3m: *Όλα τα στοιχεία μηδέν*

Τρικλινής

τάξη: 1



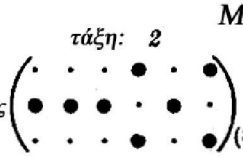
(18)

(αριθμός στοιχείων με διαφορετικές τιμές)

Μονοκλινής

τάξη: 2

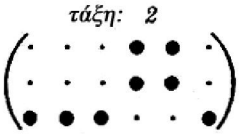
$2 \parallel x_2$ *stantdart προσανατολισμός*



(8)

τάξη: 2

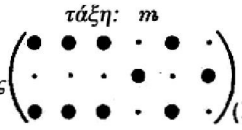
$2 \parallel x_3$



(8)

τάξη: m

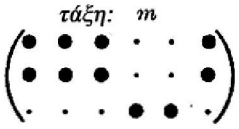
$m \perp x_2$ *stantdart προσανατολισμός*



(10)

τάξη: m

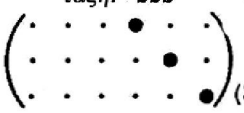
$m \perp x_3$



(10)

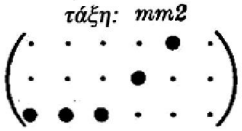
Ορθορομβική

τάξη: 222



(3)

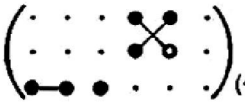
τάξη: mm2



(5)

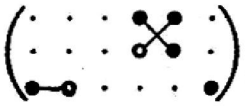
Τετραγωνική

τάξη: 4



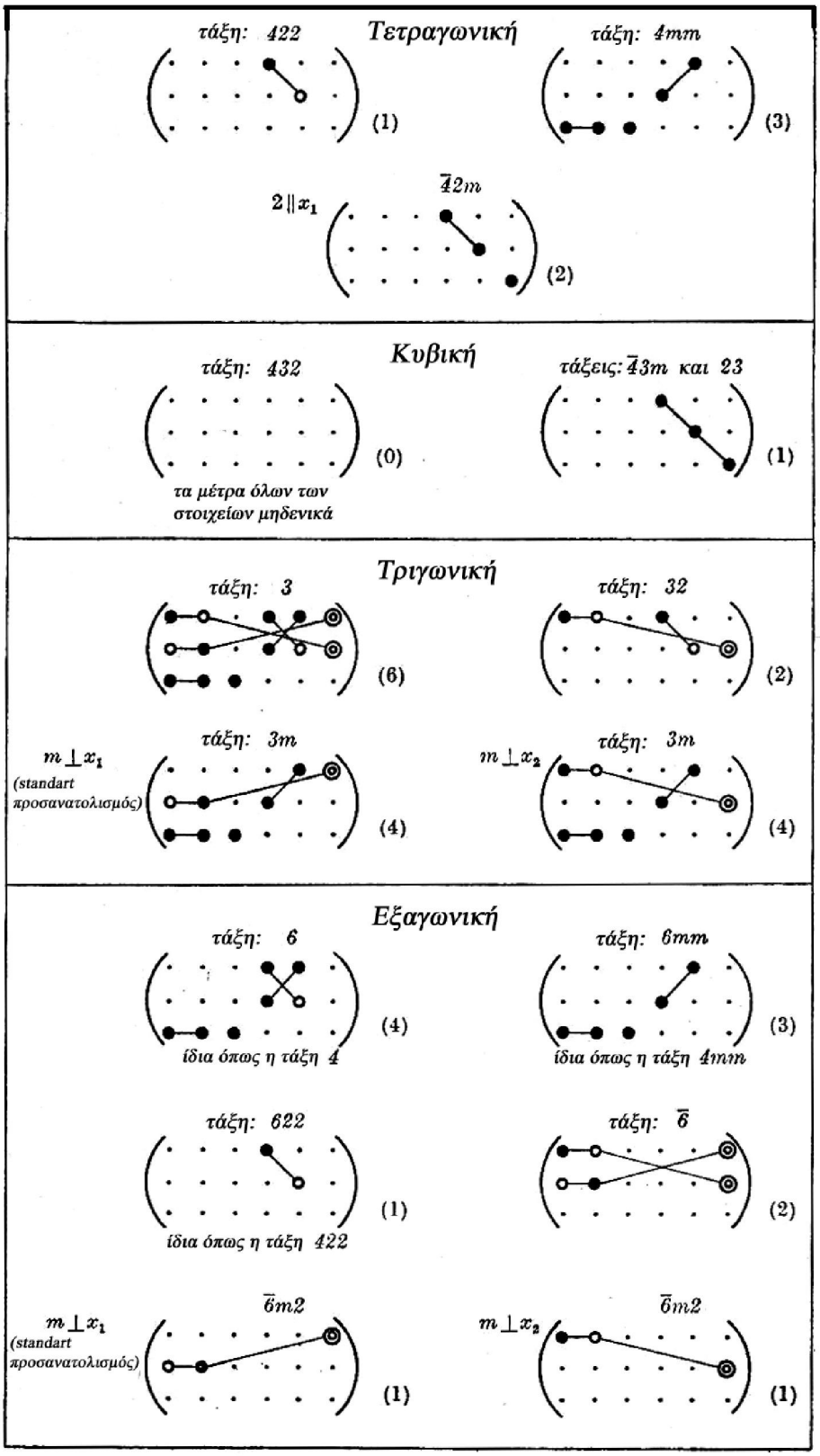
(4)

τάξη: $\bar{4}$



(4)

(Πίν.2β)
ΠΙΕΖΟΗΛΕΚΤΡΙΚΟ ΦΑΙΝΟΜΕΝΟ



(Πίν.3α)

ΕΛΑΣΤΙΚΟ ΦΑΙΝΟΜΕΝΟ

Πίνακες των στοιχείων s_{ij} και c_{ij} $(i, j=1,2,...,6)$

Στοιχεία :

- *με μηδενικό μέτρο*
- *με μέτρο διάφορο του μηδενός*
- *με ίσο μέτρο*
- *με ίσο μέτρο αλλά αντίθετο πρόσημο*

Για την s ◉ *με μέτρο ίσο με το διπλάσιο αυτού που έχει η σκούρα κηλίδα με την οποία συνδέεται*

Για την c ◉ *με μέτρο ίσο με αυτό που έχει η σκούρα κηλίδα με την οποία συνδέεται*

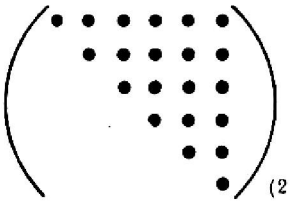
Για την s X $2(s_{11}-s_{12})$

Για την c X $\frac{1}{2}(c_{11}-c_{12})$

(Όλοι οι πίνακες είναι συμμετρικοί ως προς την κύρια διαγώνιο)

Τρικλινής

Όλες οι τάξεις



(21)

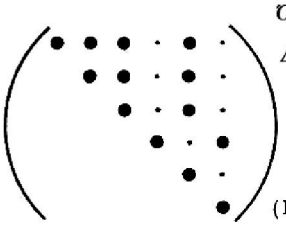
(αριθμός στοιχείων με διαφορετικές τιμές)

Μονοκλινής

Όλες οι τάξεις

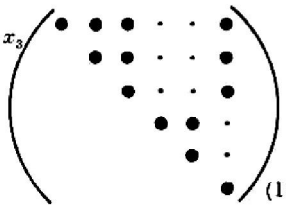
Δεύτερης τάξης $\| x_2$

Standart προσανατολισμός



(13)

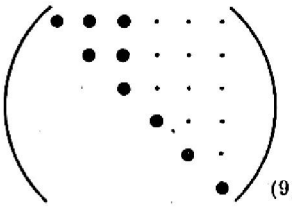
Δεύτερης τάξης $\| x_3$



(13)

Ορθορομβική

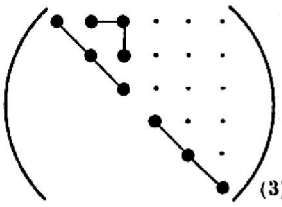
Όλες οι τάξεις



(9)

Κυβική

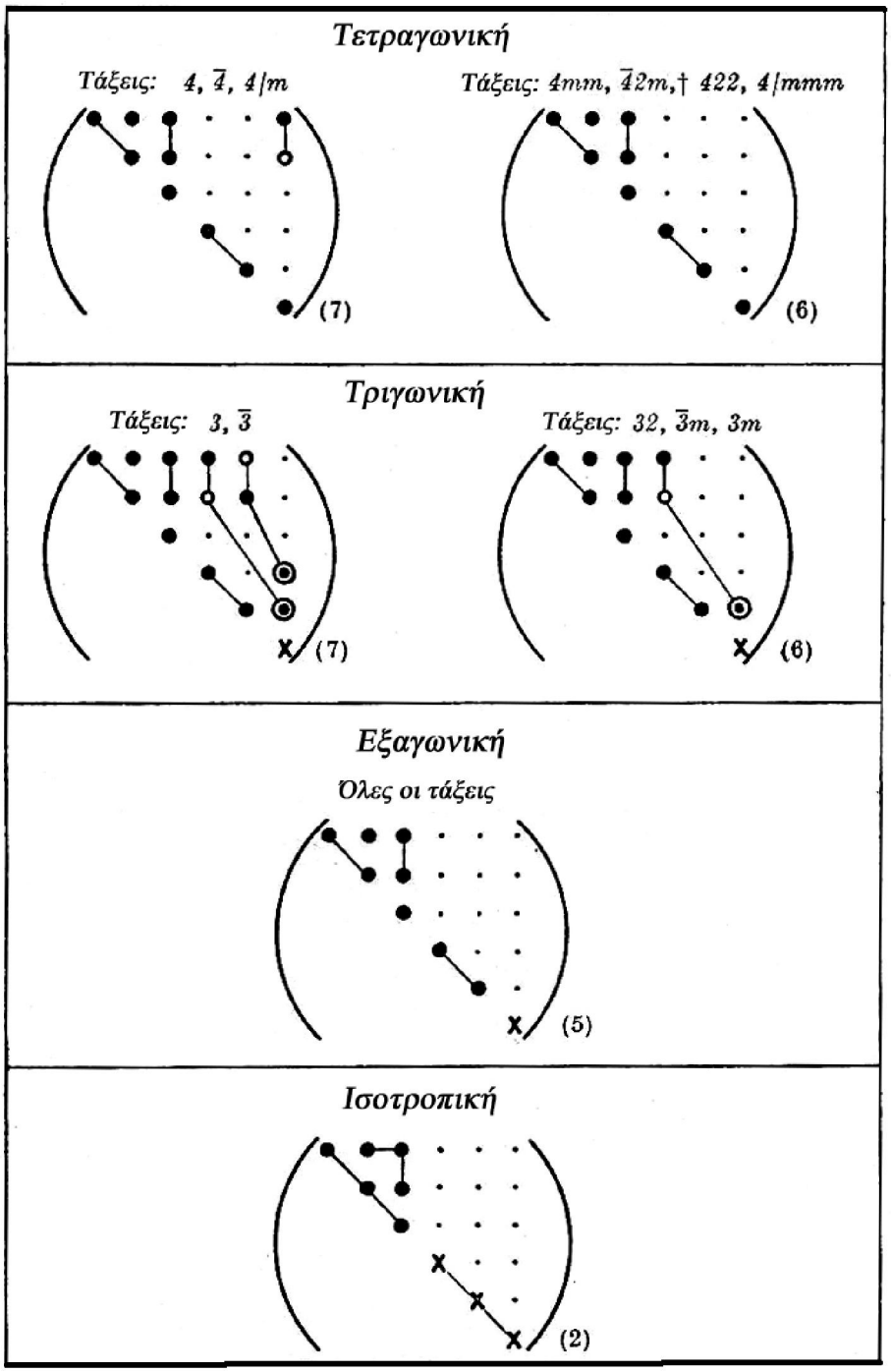
Όλες οι τάξεις



(3)

(Πίν.3β)

ΕΛΑΣΤΙΚΟ ΦΑΙΝΟΜΕΝΟ



(Πίν.4α)

ΦΩΤΟΕΛΑΣΤΙΚΟ ΦΑΙΝΟΜΕΝΟ

Πίνακες των στοιχείων p_{ij} και π_{ij} (i, j=1,2,...,6)

ΓΙΑ ΤΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ p *και* π

Στοιχεία :

- *με μηδενικό μέτρο*
- *με μέτρο διάφορο του μηδενός*
- *με ίσο μέτρο*
- *με ίσο μέτρο αλλά αντίθετο πρόσημο*

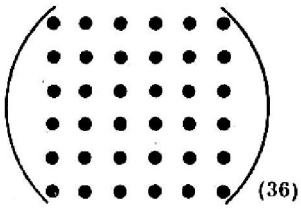
ΓΙΑ ΤΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ π

- *με μέτρο ίσο με το διπλάσιο αυτού που έχει η σκούρα κηλίδα με την οποία συνδέεται*
- *με μέτρο ίσο με μείον το διπλάσιο αυτού που έχει η σκούρα κηλίδα με την οποία συνδέεται*
- $(\pi_{11} - \pi_{12})$.

ΓΙΑ ΤΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ p

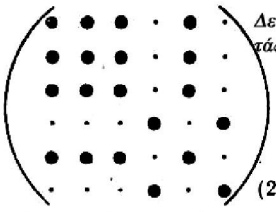
- *με μέτρο ίσο με το διπλάσιο αυτού που έχει η σκούρα κηλίδα με την οποία συνδέεται*
- *με μέτρο ίσο με μείον το διπλάσιο αυτού που έχει η σκούρα κηλίδα με την οποία συνδέεται*
- $\frac{1}{2}(p_{11} - p_{12})$.

Τρικλινής (όλες οι τάξεις)

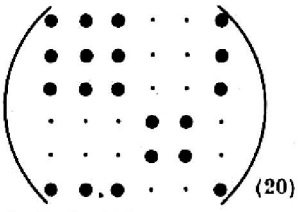


Μονοκλινής (όλες οι τάξεις)

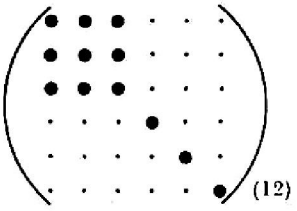
Δεύτερης τάξης $\parallel x_2$ *(standart προ-σανατολισμός)*



Δεύτερης τάξης $\parallel x_3$

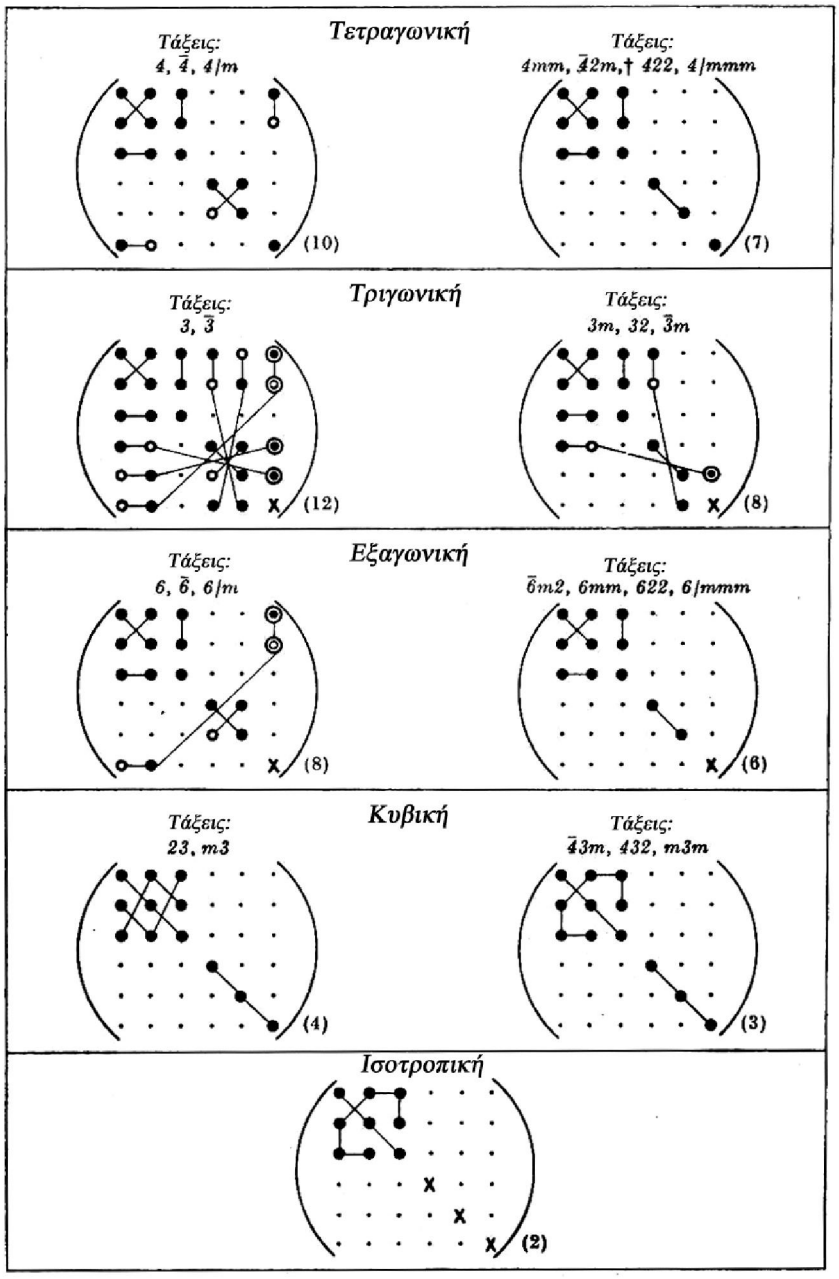


Ορθορομβική (όλες οι τάξεις)



(Πίν.4β)

ΦΩΤΟΕΛΑΣΤΙΚΟ ΦΑΙΝΟΜΕΝΟ



(Πίν.5α)

ΓΡΑΜΜΙΚΟ ΗΛΕΚΤΡΟΟΠΤΙΚΟ ΦΑΙΝΟΜΕΝΟ

Πίνακες των στοιχείων r_{ij} $i=1,2,\ldots,6$ $j=1,2,3$

Κεντροσυμμετρικές τάξεις

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1, 2/m, mmm, 4/m, 4/mmm
$\bar{3}$, $\bar{3}$m, 6/m, 6/mmm, m3, m3m

Τρικλινής

1

$$\begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \\ r_{41} & r_{42} & r_{43} \\ r_{51} & r_{52} & r_{53} \\ r_{61} & r_{62} & r_{63} \end{pmatrix}$$

Μονοκλινής

2 (2 ∥ x_2)

$$\begin{pmatrix} 0 & r_{12} & 0 \\ 0 & r_{22} & 0 \\ 0 & r_{32} & 0 \\ r_{41} & 0 & r_{43} \\ 0 & r_{52} & 0 \\ 6_{61} & 0 & r_{63} \end{pmatrix}$$

2 (2 ∥ x_3)

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & r_{13} \\ 0 & 0 & r_{23} \\ 0 & 0 & r_{33} \\ r_{41} & r_{42} & 0 \\ r_{51} & r_{52} & 0 \\ 0 & 0 & r_{63} \end{pmatrix}$$

m (m ⊥ x_2)

$$\begin{pmatrix} r_{11} & 0 & r_{13} \\ r_{21} & 0 & r_{23} \\ r_{31} & 0 & r_{33} \\ 0 & r_{42} & 0 \\ r_{51} & 0 & r_{53} \\ 0 & r_{62} & 0 \end{pmatrix}$$

m (m ⊥ x_3)

$$\begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & 0 \\ r_{21} & r_{22} & 0 \\ r_{31} & r_{32} & 0 \\ 0 & 0 & r_{43} \\ 0 & 0 & r_{53} \\ r_{61} & r_{62} & 0 \end{pmatrix}$$

Ορθορομβική

222

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ r_{41} & 0 & 0 \\ 0 & r_{52} & 0 \\ 0 & 0 & r_{63} \end{pmatrix}$$

2mm

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & r_{13} \\ 0 & 0 & r_{23} \\ 0 & 0 & r_{33} \\ 0 & r_{42} & 0 \\ r_{51} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Εξαγωνική

6

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & r_{13} \\ 0 & 0 & r_{13} \\ 0 & 0 & r_{33} \\ r_{41} & r_{51} & 0 \\ r_{51} & -r_{41} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

6mm

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & r_{13} \\ 0 & 0 & r_{13} \\ 0 & 0 & r_{33} \\ 0 & r_{51} & 0 \\ r_{51} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

622

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ r_{41} & 0 & 0 \\ 0 & -r_{41} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\bar{6}$

$$\begin{pmatrix} r_{11} & -r_{22} & 0 \\ -r_{11} & r_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -r_{22} & r_{11} & 0 \end{pmatrix}$$

$\bar{6}$m2 (m ⊥ x_1)

$$\begin{pmatrix} 0 & -r_{22} & 0 \\ 0 & r_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -r_{22} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\bar{6}$m2 (m ⊥ x_2)

$$\begin{pmatrix} r_{11} & 0 & 0 \\ -r_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -r_{11} & 0 \end{pmatrix}$$

(Πίν.5β)

ΓΡΑΜΜΙΚΟ ΗΛΕΚΤΡΟΟΠΤΙΚΟ ΦΑΙΝΟΜΕΝΟ

Πίνακες στοιχείων r_{ij}

Κυβική

$\bar{4}3m, 23$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ r_{41} & 0 & 0 \\ 0 & r_{41} & 0 \\ 0 & 0 & r_{41} \end{pmatrix}$$

432

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Τετραγωνική

4

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & r_{13} \\ 0 & 0 & r_{13} \\ 0 & 0 & r_{33} \\ r_{41} & r_{51} & 0 \\ r_{51} & -r_{41} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\bar{4}$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & r_{13} \\ 0 & 0 & -r_{13} \\ 0 & 0 & 0 \\ r_{41} & -r_{51} & 0 \\ r_{51} & r_{41} & 0 \\ 0 & 0 & r_{63} \end{pmatrix}$$

422

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ r_{41} & 0 & 0 \\ 0 & -r_{41} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

4mm

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & r_{13} \\ 0 & 0 & r_{13} \\ 0 & 0 & r_{33} \\ 0 & r_{51} & 0 \\ r_{51} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\bar{4}2m\ (2 \parallel x_1)$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ r_{41} & 0 & 0 \\ 0 & r_{41} & 0 \\ 0 & 0 & r_{63} \end{pmatrix}$$

Τριγωνική

3

$$\begin{pmatrix} r_{11} & -r_{22} & r_{13} \\ -r_{11} & r_{22} & r_{13} \\ 0 & 0 & r_{33} \\ r_{41} & r_{51} & 0 \\ r_{51} & -r_{41} & 0 \\ -r_{22} & -r_{11} & 0 \end{pmatrix}$$

32

$$\begin{pmatrix} r_{11} & 0 & 0 \\ -r_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ r_{41} & 0 & 0 \\ 0 & -r_{41} & 0 \\ 0 & -r_{11} & 0 \end{pmatrix}$$

$3m\ (m \perp x_1)$

$$\begin{pmatrix} 0 & -r_{22} & r_{13} \\ 0 & r_{22} & r_{13} \\ 0 & 0 & r_{33} \\ 0 & r_{51} & 0 \\ r_{51} & 0 & 0 \\ -r_{22} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$3m\ (m \perp x_2)$

$$\begin{pmatrix} r_{11} & 0 & r_{13} \\ -r_{11} & 0 & r_{13} \\ 0 & 0 & r_{33} \\ 0 & r_{51} & 0 \\ r_{51} & 0 & 0 \\ 0 & -r_{11} & 0 \end{pmatrix}$$

(Πίν. 6α)

ΤΕΤΡΑΓΩΝΙΚΟ ΗΛΕΚΤΡΟΟΠΤΙΚΟ ΦΑΙΝΟΜΕΝΟ

Πίνακες των στοιχείων s_{ij} $(i,j = 1,2,\ldots,6)$

τάξεις: $1,\bar{1}$

Τρικλινής

$$\begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} & s_{14} & s_{15} & s_{16} \\ s_{21} & s_{22} & s_{23} & s_{24} & s_{25} & s_{26} \\ s_{31} & s_{32} & s_{33} & s_{34} & s_{35} & s_{36} \\ s_{41} & s_{42} & s_{43} & s_{44} & s_{45} & s_{46} \\ s_{51} & s_{52} & s_{53} & s_{54} & s_{55} & s_{56} \\ s_{61} & s_{62} & s_{63} & s_{64} & s_{65} & s_{66} \end{pmatrix}$$

τάξεις: 2,m,2/m

Μονοκλινής

$$\begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} & 0 & s_{15} & 0 \\ s_{21} & s_{22} & s_{23} & 0 & s_{25} & 0 \\ s_{31} & s_{32} & s_{33} & 0 & s_{35} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & s_{44} & 0 & s_{46} \\ s_{51} & s_{52} & s_{53} & 0 & s_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & s_{64} & 0 & s_{66} \end{pmatrix}$$

τάξεις: 2mm,222,mmm

Ορθορομβική

$$\begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} & 0 & 0 & 0 \\ s_{21} & s_{22} & s_{23} & 0 & 0 & 0 \\ s_{31} & s_{32} & s_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & s_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & s_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & s_{66} \end{pmatrix}$$

τάξεις: $4,\bar{4},4/m$

$$\begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} & 0 & 0 & s_{16} \\ s_{12} & s_{11} & s_{13} & 0 & 0 & -s_{16} \\ s_{31} & s_{31} & s_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & s_{44} & s_{45} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -s_{45} & s_{44} & 0 \\ s_{61} & -s_{61} & 0 & 0 & 0 & s_{66} \end{pmatrix}$$

Τετραγωνική *τάξεις:* $422,4mm,\bar{4}2m,4/mm$

$$\begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} & 0 & 0 & 0 \\ s_{12} & s_{11} & s_{13} & 0 & 0 & 0 \\ s_{31} & s_{31} & s_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & s_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & s_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & s_{66} \end{pmatrix}$$

τάξεις: $3,\bar{3}$

$$\begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} & s_{14} & s_{15} & -s_{61} \\ s_{12} & s_{11} & s_{13} & -s_{14} & -s_{15} & s_{61} \\ s_{31} & s_{31} & s_{33} & 0 & 0 & 0 \\ s_{41} & -s_{41} & 0 & s_{44} & s_{45} & -s_{51} \\ s_{51} & -s_{51} & 0 & -s_{45} & s_{44} & s_{41} \\ s_{61} & -s_{61} & 0 & -s_{15} & s_{14} & \frac{1}{2}(s_{11} - s_{12}) \end{pmatrix}$$

Τριγωνική *τάξεις:* $32,3m,\bar{3}m$

$$\begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} & s_{14} & 0 & 0 \\ s_{12} & s_{11} & s_{13} & -s_{14} & 0 & 0 \\ s_{13} & s_{13} & s_{33} & 0 & 0 & 0 \\ s_{41} & -s_{41} & 0 & s_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & s_{44} & s_{41} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & s_{14} & \frac{1}{2}(s_{11} - s_{12}) \end{pmatrix}$$

(Πίν.6β)

ΤΕΤΡΑΓΩΝΙΚΟ ΗΛΕΚΤΡΟΟΠΤΙΚΟ ΦΑΙΝΟΜΕΝΟ

τάξεις: $6,\bar{6},6/m$

$$\begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} & 0 & 0 & -s_{61} \\ s_{12} & s_{11} & s_{13} & 0 & 0 & s_{61} \\ s_{31} & s_{31} & s_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & s_{44} & s_{45} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -s_{45} & s_{44} & 0 \\ s_{61} & -s_{61} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(s_{11}-s_{12}) \end{pmatrix}$$

Εξαγωνική *τάξεις:* $622,6mm,\bar{6}m2,6/mmm$

$$\begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} & 0 & 0 & 0 \\ s_{12} & s_{11} & s_{13} & 0 & 0 & 0 \\ s_{31} & s_{31} & s_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & s_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & s_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(s_{11}-s_{12}) \end{pmatrix}$$

$23,m3$

$$\begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} & 0 & 0 & 0 \\ s_{13} & s_{11} & s_{12} & 0 & 0 & 0 \\ s_{12} & s_{13} & s_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & s_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & s_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & s_{44} \end{pmatrix}$$

Κυβική *τάξεις:* $432,m3m,\bar{4}3m$

$$\begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{12} & 0 & 0 & 0 \\ s_{12} & s_{11} & s_{12} & 0 & 0 & 0 \\ s_{12} & s_{12} & s_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & s_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & s_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & s_{44} \end{pmatrix}$$

Ισοτροπική

$$\begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{12} & 0 & 0 & 0 \\ s_{12} & s_{11} & s_{12} & 0 & 0 & 0 \\ s_{12} & s_{12} & s_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(s_{11}-s_{12}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(s_{11}-s_{12}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(s_{11}-s_{12}) \end{pmatrix}$$

(Πίν. 8)

ΓΡΑΜΜΙΚΟ ΗΛΕΚΤΡΟΣΤΡΟΦΙΚΟ ΦΑΙΝΟΜΕΝΟ

Πίνακες στοιχείων ζ_{ij} i = 1,2,...,6 j = 1,2,3

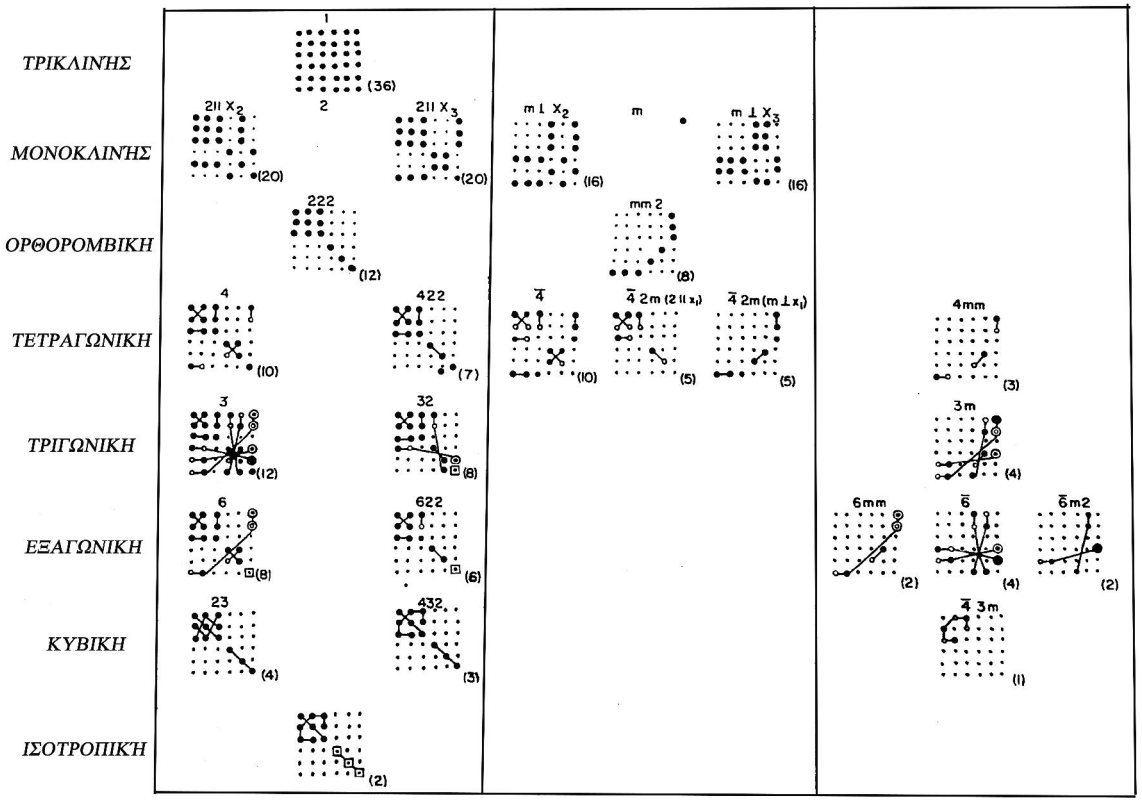
Κλάσεις	ζ_{ij}	***Κλάσεις***	ζ_{ij}
$1, \bar{1}$ (18 στοιχεία) (15 inv.)	$\begin{pmatrix} \zeta_{11} & \zeta_{21} & \zeta_{31} \\ \zeta_{12} & \zeta_{22} & \zeta_{32} \\ \zeta_{13} & \zeta_{23} & \zeta_{33} \\ \zeta_{14} & \zeta_{24} & \zeta_{34} \\ \zeta_{15} & \zeta_{25} & \zeta_{35} \\ \zeta_{16} & \zeta_{26} & \zeta_{36} \end{pmatrix}$	$32, 3m, \bar{3}m$ $(2 \parallel x_1, m \perp x_1)$ (2 στοιχεία)	$\begin{pmatrix} \zeta_{11} & 0 & 0 \\ -\zeta_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \zeta_{14} & 0 & 0 \\ 0 & -\zeta_{14} & 0 \\ 0 & -\zeta_{11} & 0 \end{pmatrix}$
$2, m, 2/m$ $(2 \parallel x_2, m \perp x_2)$ (8 στοιχεία) (7 inv.)	$\begin{pmatrix} 0 & \zeta_{21} & 0 \\ 0 & \zeta_{22} & 0 \\ 0 & \zeta_{23} & 0 \\ \zeta_{14} & 0 & \zeta_{34} \\ 0 & \zeta_{25} & 0 \\ \zeta_{16} & 0 & \zeta_{36} \end{pmatrix}$	$4, \bar{4}, 4/m,$ $6, \bar{6}, 6/m$ $\infty, \infty/m$ (4 στοιχεία)	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \zeta_{31} \\ 0 & 0 & \zeta_{32} \\ 0 & 0 & \zeta_{33} \\ \zeta_{14} & \zeta_{15} & 0 \\ \zeta_{15} & -\zeta_{14} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
$2, m, 2/m$ $(2 \parallel x_3, m \perp x_3)$ (8 στοιχεία) (7 inv.)	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \zeta_{31} \\ 0 & 0 & \zeta_{32} \\ 0 & 0 & \zeta_{33} \\ \zeta_{14} & \zeta_{24} & 0 \\ \zeta_{15} & \zeta_{25} & 0 \\ 0 & 0 & \zeta_{36} \end{pmatrix}$	$422, 4mm,$ $\bar{4}2m,$ $4/mmm,$ $622, 6mm, \bar{6}m2,$ $6/mmm,$ $\infty 2, \infty m, \infty/mm$ (1 στοιχείο)	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \zeta_{14} & 0 & 0 \\ 0 & -\zeta_{14} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
$222, mm2, mmm$ (3 στοιχεία)	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \zeta_{14} & 0 & 0 \\ 0 & \zeta_{25} & 0 \\ 0 & 0 & \zeta_{36} \end{pmatrix}$	$23, m3$ (1 στοιχείο)	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \zeta_{14} & 0 & 0 \\ 0 & \zeta_{14} & 0 \\ 0 & 0 & \zeta_{14} \end{pmatrix}$

Συνέχεια →

$3, \overline{3}$ (6 στοιχεία) (5 inv.)	$\begin{pmatrix} \zeta_{11} & -\zeta_{22} & \zeta_{31} \\ -\zeta_{11} & \zeta_{22} & \zeta_{31} \\ 0 & 0 & \zeta_{33} \\ \zeta_{14} & \zeta_{15} & 0 \\ \zeta_{15} & -\zeta_{14} & 0 \\ -\zeta_{22} & -\zeta_{11} & 0 \end{pmatrix}$		
Για τις κλάσεις: $432, \overline{4}3m, m3m, \infty\infty, \infty\infty m$ θα έχουμε: $\zeta = 0$			

(Πίν. 9) *(ΠΙΕΖΟΣΤΡΟΦΙΚΟ ΦΑΙΝΟΜΕΝΟ) (Πίνακες [S] και [R])*

•*Μηδενικό στοιχείο* ●*Μη μηδενικό στοιχείο* ●—● *Ίσα στοιχεία με ίδιο πρόσημο* , ●—○*Ίσα στοιχεία με αντίθετο πρόσημο*



Για τους πίνακες [R]

⊙ *Στοιχείο ίσο με +2 φορές το* ⟶ ● *με το οποίο συνδέεται.*

◎ *Ομόκεντροι κύκλοι, στοιχείο ίσο με -2 φορές το* ⟶ ● *με το οποίο συνδέεται.*

⊡ = $(R_{11}-R_{12})$

Για τους πίνακες [S]

⊙ *Στοιχείο ίσο με το* ⟶ ● *με το οποίο συνδέεται.*

◎ *Ομόκεντροι κύκλοι, ένα στοιχείο με τιμή αρνητική σε σχέση με το* → ● *με το οποίο συνδέεται.*

⊡ = $\frac{1}{2}(S_{11}-S_{12})$

(Πίν. 10) *Τα στοιχεία του τανυστή της ηλ. διαπερατότητας* ε_{ij} *(σ.σ. συμμετρίας* $X_{i=1,2,3}$*)*

Τάξεις	ε_{ij}	*Τάξεις*	ε_{ij}
$1,\ \bar{1}$ *(6 στοιχεία)*	$\begin{matrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{31} \\ & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ & & \varepsilon_{33} \end{matrix}$	$222,\ mm2,\ mmm$ *(3 στοιχεία)*	$\begin{matrix} \varepsilon_{11} & 0 & 0 \\ & \varepsilon_{22} & 0 \\ & & \varepsilon_{33} \end{matrix}$
$2,\ m,\ 2/m$ $(2 \parallel X_2,\ m \perp X_2)$ *(4 στοιχεία)*	$\begin{matrix} \varepsilon_{11} & 0 & \varepsilon_{31} \\ & \varepsilon_{22} & 0 \\ & & \varepsilon_{33} \end{matrix}$	$3,\ \bar{3},\ 32,\ 3m,\ \bar{3}m,\ 4,\ 4,$ $4/m,\ 422,\ 4mm,\ \bar{4}2m,$ $4/mmm,\ 6,\ \bar{6},\ 6/m,\ 622,$ $6mm,\ \bar{6}m2,\ 6/mmm,\ \infty,$ $\infty/m,\ \infty 2,\ \infty m,$ ∞/mm *(2 στοιχεία)*	$\begin{matrix} \varepsilon_{11} & 0 & 0 \\ & \varepsilon_{11} & 0 \\ & & \varepsilon_{33} \end{matrix}$
$2,\ m,\ 2/m$ $(2 \parallel X_3,\ m \perp X_3)$ *(4 στοιχεία)*	$\begin{matrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & 0 \\ & \varepsilon_{22} & 0 \\ & & \varepsilon_{33} \end{matrix}$	$23,\ m3,\ 432,\ \bar{4}3m,\ m3m,$ $\infty\infty,\ \infty\infty m,$ *(1 στοιχείο)*	$\begin{matrix} \varepsilon_{11} & 0 & 0 \\ & \varepsilon_{11} & 0 \\ & & \varepsilon_{11} \end{matrix}$

Προέλευση των Πινάκων του (ΠΑΡ/ΜΑΤΟΣ 6)

1. (Πίν. 1) J. F. Nye: 'Physical Properties of Crystals' . Oxford at the Clarendon Press (1967) (Appendix B p. 284)

2. (Πίν. 2) J. F. Nye: 'Physical Properties of Crystals' . Oxford at the Clarendon Press (1967) (Ch. VII, p. 123)

3. (Πίν. 3) J. F. Nye: 'Physical Properties of Crystals' . Oxford at the Clarendon Press (1967) (Ch. VIII, p. 140)

4. (Πίν. 4) J. F. Nye: 'Physical Properties of Crystals' . Oxford at the Clarendon Press (1967) (Ch. XIII, p. 250)

5. (Πίν. 5) A. Yariv P. Yeh: 'Optical Waves in Crystals' . J. Wiley & Sons (N.Y.)(1984)(Ch. 7, p. 227)

6. (Πίν. 6) A. Yariv P. Yeh: 'Optical Waves in Crystals' . J. Wiley & Sons (N.Y.)(1984)(Ch. 7, p. 258)

7. (Πίν. 7) J. F. Nye: 'Physical Properties of Crystals' . Oxford at the Clarendon Press (1967) (Ch. XIV, p. 272)(Με διόρθωση στον πίνακα για την τάξη $\bar{4}2m$)

8. (Πίν. 8) Y. I. Sirotin M. P. Shaskolskaya: 'Fundamentals of Crystal Physics' Mir Pub. Moscow (1982)(Appendix E, p. 611)

9. (Πίν. 9) G.S. Ranganath and S. Ramaseshan ' Piezo-Rotatory Coefficients and Crystal Symmetry ' JOSA Vol. 59 Number. 9. Sept.9 1969 (p.1232)

10. (Πίν. 10) Y. I. Sirotin M. P. Shaskolskaya: 'Fundamentals of Crystal Physics' Mir Pub. Moscow (1982)(Appendix E, p. 602)

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1) Θεωρούμε ότι ένα αρμονικό μονοχρωματικό επίπεδο μέτωπο κύματος κυκλικής συχνότητας ω διαδίδεται κατά τη διεύθυνση του άξονα z και το μέτρο της κυματοκαθέτου του είναι k. Να γίνει η περιγραφή των καταστάσεων πόλωσης που θα μπορούσαν να το χαρακτηρίζουν, με τη βοήθεια των πλατών A_x, A_y των συνιστωσών E_x, E_y της έντασης $\mathbf{E}$ του ηλεκτρικού του πεδίου, καθώς και της διαφοράς φάσης $\phi = \phi_y - \phi_x$ μεταξύ τους.

ΛΥΣΗ

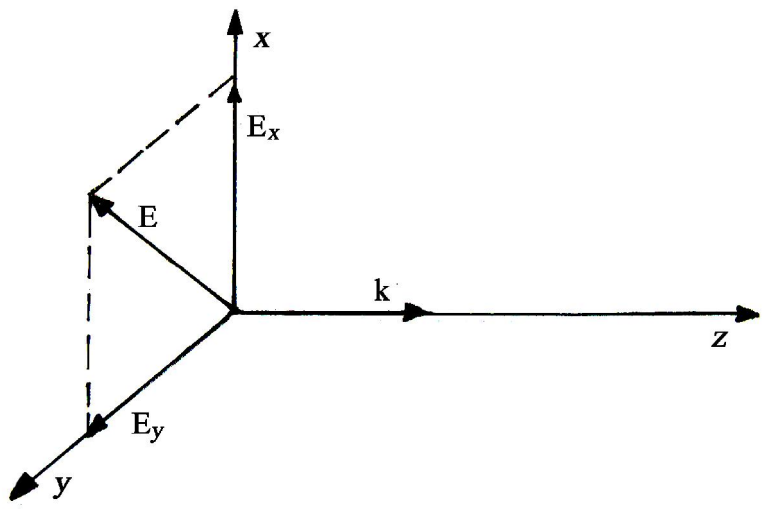
Είναι γνωστό (§ 3.1) ότι στη γενικότερη περίπτωση, το διάνυσμα της έντασης του ηλεκτρικού πεδίου $\mathbf{E}$ στο επίπεδο x, y (Σχ. 1.1) θα έχει τη μορφή:

$$\mathbf{E} = E_x\mathbf{i} + E_y\mathbf{j} \tag{1.1}$$

με:

$$\left.\begin{aligned} E_x &= A_x\cos(\omega t - kz + \phi_x) = A_x\cos(\theta + \phi_x) \\ E_y &= A_y\cos(\omega t - kz + \phi_y) = A_y\cos(\theta + \phi_y) \end{aligned}\right\} \tag{1.2}$$

όπου $A_x \neq A_y$, $\phi = \phi_y - \phi_x$, $0 \le \phi < 2\pi$ και $\theta = \omega t - kz$. Θ' αποδείξουμε στα επόμενα



(Σχ. 1.1)

ότι οι (σχ. 1.2) είναι οι παραμετρικές εξισώσεις μιας έλλειψης. Δηλ. ότι το άκρο του διανύσματος $\mathbf{E}$ στη γενικότερη περίπτωση, διανύει χρονικά (για $z =$ σταθ.) μια έλ-

λειψη με συχνότητα $\nu = \omega/2\pi$ και χωρικά (για $t =$ σταθ.) μια ελλειπτική έλικα με συχνότητα $k = 2\pi/\lambda$.

Για ν' αποδείξουμε το προαναφερόμενο, αρκεί από τις (σχ. 1.2) ν' απαλείψουμε την παράμετρο $\theta = \omega t - kz$. Για το λόγο αυτό αναπτύσσοντας τα συνημίτονα των σχέσεων αυτών έχουμε:

$$\left.\begin{aligned} \frac{E_x}{A_x} &= \cos\theta\cos\phi_x - \sin\theta\sin\phi_x \\ \frac{E_y}{A_y} &= \cos\theta\cos\phi_y - \sin\theta\sin\phi_y \end{aligned}\right\} \tag{1.3}$$

Αν πολλαπλασιάσουμε την πρώτη των (σχ. 1.3) με το $\sin\phi_y$ και τη δεύτερη με το $\sin\phi_x$ και αφαιρέσουμε κατά μέλη και μετά, την πρώτη επί $\cos\phi_y$ τη δεύτερη επί $\cos\phi_x$ και αφαιρέσουμε και πάλι κατά μέλη θα βρούμε:

$$\left.\begin{aligned} \frac{E_x}{A_x}\sin\phi_y - \frac{E_y}{A_y}\sin\phi_x &= \cos\theta\sin\left(\phi_y - \phi_x\right) \\ \frac{E_x}{A_x}\cos\phi_y - \frac{E_y}{A_y}\cos\phi_x &= \sin\theta\sin\left(\phi_y - \phi_x\right) \end{aligned}\right\} \tag{1.4}$$

Τέλος αν λάβουμε τα τετράγωνα των δύο σχέσεων και αφαιρέσουμε κατά μέλη θα βρούμε:

$$\left(\frac{E_x}{A_x}\right)^2 + \left(\frac{E_y}{A_y}\right)^2 - 2\left(\frac{E_x}{A_x}\right)\left(\frac{E_y}{A_y}\right)\cos\phi = \sin^2\phi \tag{1.5}$$

Η (σχ. 1.5) περιγράφει μια εξίσωση κωνικής τομής στο σύστημα συντεταγμένων E_x, E_y επειδή είναι της μορφής:

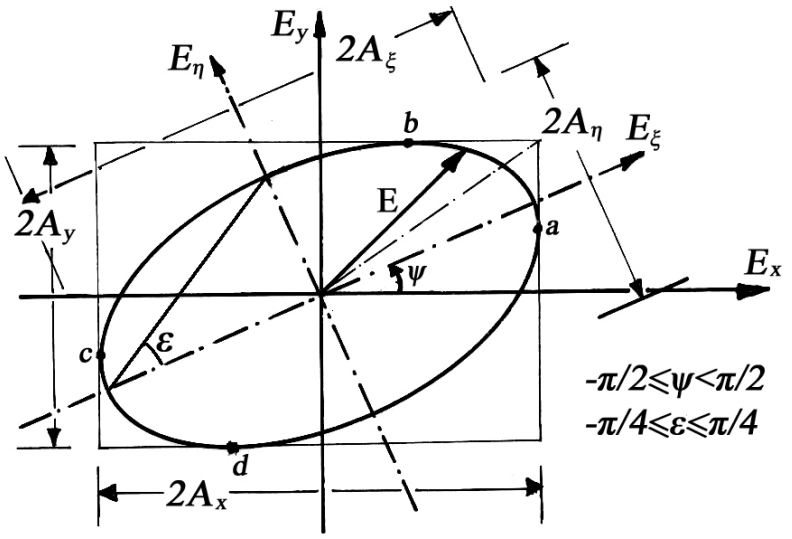
$$aE_x^2 + 2bE_xE_y + cE_y^2 + 2dE_x + 2eE_y + f = 0 \tag{1.6}$$

όπου: $a = 1/A_x^2$, $b = -\cos\phi/A_xA_y$,$c = 1/A_y^2$, $d = e = 0$, $f = -\sin^2\phi$

Η συγκεκριμένη κωνική τομή έχει το κέντρο της στην αρχή του συστήματος συντεταγμένων E_x, E_y επειδή $d = e = 0$ και παριστάνει έλλειψη επειδή:

$$ac - b^2 = \frac{1}{A_x^2}\frac{1}{A_y^2} - \left(-\frac{\cos\phi}{A_x A_y}\right)^2 > 0$$

Η έλλειψη αυτή όπως φαίνεται στο (Σχ. 1.2), είναι εγγεγραμμένη σε ένα ορθογώνιο διαστάσεων $\left(2A_x \times 2A_y\right)$, που είναι παράλληλο με τους άξονες E_x, E_y. Τα τέσσερα σημεία επαφής του με την έλλειψη (για $E_x = A_x$ και $E_y = A_y$) είναι τα εξής:



(Σχ.1.2)

$a\left(A_x, A_y\cos\phi\right), b\left(A_x\cos\phi, A_y\right), c\left(-A_x, -A_y\cos\phi\right), d\left(-A_x\cos\phi, -A_y\right)$. Είναι επίσης φανερό ότι οι άξονες της έλλειψης δεν θα συμπίπτουν εν γένει με τους άξονες του συστήματος συντεταγμένων E_x, E_y. Κάτω από αυτές τις συνθήκες ο μεγάλος άξονας της έλλειψης θα σχηματίζει με τον άξονα E_y μια γωνία ψ η οποία ονομάζεται αζιμουθιακή.

Ένα επίπεδο μέτωπο κύματος που περιγράφεται από το πεδίο **E** και του οποίου το άκρο (που καθορίζεται από τις συνιστώσες E_x, E_y) διαγράφει χρονικά και χωρικά μια έλλειψη, όπως αυτή που περιγράψαμε προηγουμένως, ονομάζεται ***ελλειπτικά πολωμένο(elliptical polarized)***. Η πλήρης περιγραφή αυτής της ***κατάστασης πόλωσης(state of polarization)***, προϋποθέτει τον προσδιορισμό τριών στοιχείων: α) Της ***αζιμουθιακής γωνίας (azimuth angle)*** ψ β) Της ***ελλειπτικότητας(ellipticity)*** e που ορίζεται σαν ο λόγος του μικρού προς τον μεγάλο άξονα της έλλειψης και γ) Της ***στροφικότητας(handedness)*** δηλ. της φοράς περιστροφής του άκρου του διανύσματος **E**. Η τελευταία είναι ***δεξιόστροφη(right handed)*** όταν, για φως που έρχεται προς τα εμάς, το άκρο του διανύσματος **E** περιστρέφεται

(χρονικά) κατά τη φορά των δεικτών του ρολογιού. Αν η περιστροφή γίνεται αντίθετα προς τους δείκτες του ρολογιού, τότε είναι ***αριστερόστροφη (left handed)***. Στα επόμενα θα επιδιώξουμε να προσδιορίσουμε αυτού του είδους τα στοιχειά.

Επιλέγουμε ένα νέο σύστημα συντεταγμένων E_ξ, E_η το οποίο ταυτίζεται με τον μεγάλο και τον μικρό άξονα της έλλειψης αντίστοιχα (Σχ. 1.2). Αν τα μήκη του μεγάλου και του μικρού άξονα της έλλειψης είναι $2A_\xi, 2A_\eta$ τότε οι παραμετρικές της εξισώσεις στο νέο σύστημα μπορούν να εκφραστούν ως εξής:

$$\left.\begin{aligned} E_\xi &= A_\xi \cos(\theta + \phi_0) \\ E_\eta &= \pm A_\eta \sin(\theta + \phi_0) \end{aligned}\right\} \tag{1.7}$$

όπου $\theta = \omega t - kz$ και τα δύο πρόσημα $(\pm)$ χαρακτηρίζουν τις δύο αντίθετες φορές περιστροφής του $\mathbf{E}$, δηλ. το $(-)$ την δεξιόστροφη και το $(+)$ την αριστερόστροφη περιστροφή του πεδίου. Κατά τα γνωστά όμως, οι σχέσεις μετασχηματισμού των συντεταγμένων κατά την περιστροφή του E_ξ, E_η σε σχέση με το E_x, E_y κατά γωνία ψ είναι οι εξής:

$$\left.\begin{aligned} E_\xi &= E_x \cos\psi + E_y \sin\psi \\ E_\eta &= -E_x \sin\psi + E_y \cos\psi \end{aligned}\right\} \text{ ή } \left.\begin{aligned} E_x &= E_\xi \cos\psi - E_\eta \sin\psi \\ E_y &= E_\xi \sin\psi + E_\eta \cos\psi \end{aligned}\right\} \tag{1.8}$$

όπου η $\psi\left(-\pi/2 \le \psi < \pi/2\right)$ είναι η αζιμουθιακή γωνία της έλλειψης. Αν τώρα αντικαταστήσουμε τις (σχ. 1.8) στις (σχ. 1.3) θα έχουμε:

$$\begin{aligned} E_\xi &= A_x\left(\cos\theta\cos\phi_x - \sin\theta\sin\phi_x\right)\cos\psi + A_y\left(\cos\theta\cos\phi_y - \sin\theta\sin\phi_y\right)\sin\psi \\ E_\eta &= -A_x\left(\cos\theta\cos\phi_x - \sin\theta\sin\phi_x\right)\sin\psi + A_y\left(\cos\theta\cos\phi_y - \sin\theta\sin\phi_y\right)\cos\psi \end{aligned} \tag{1.9}$$

Επίσης οι (σχ. 1.7) μπορούν να γραφούν αναλυτικά ως εξής:

$$\left.\begin{aligned} E_\xi &= A_\xi\left(\cos\theta\cos\phi_0 - \sin\theta\sin\phi_0\right) \\ E_\eta &= \pm A_\eta\left(\sin\theta\cos\phi_0 + \cos\theta\sin\phi_0\right) \end{aligned}\right\} \tag{1.10}$$

Αν τώρα εξισώσουμε τους συντελεστές $\cos\theta, \sin\theta$ των (σχ. 1.10) και (σχ. 1.9) θα έχουμε:

$$\left.\begin{aligned} A_\xi \cos\phi_0 &= A_x \cos\phi_x \cos\psi + A_y \cos\phi_y \sin\psi \\ A_\xi \sin\phi_0 &= A_x \cos\phi_x \cos\psi + A_y \sin\phi_y \sin\psi \end{aligned}\right\} \tag{1.11}$$

και

$$\left.\begin{aligned} \pm A_\eta \cos\phi_0 &= A_x \sin\phi_x \sin\psi - A_y \sin\phi_y \cos\psi \\ \pm A_\eta \sin\phi_0 &= -A_x \cos\phi_x \sin\psi + A_y \cos\phi_y \cos\psi \end{aligned}\right\} \tag{1.12}$$

Και υψώνοντας στο τετράγωνο και προσθέτοντας κατά μέλη τι (σχ. 1.11,1.12) παίρνουμε:

$$\left.\begin{aligned} A_\xi^2 &= A_x^2 \cos^2\psi + A_y^2 \sin^2\psi + A_x A_y \sin 2\psi \cos\phi \\ A_\eta^2 &= A_x^2 \sin^2\psi + A_y^2 \cos^2\psi - A_x A_y \sin 2\psi \cos\phi \end{aligned}\right\} \tag{1.13}$$

Κατόπιν προσθέτοντας την πρώτη και τη δεύτερη των (σχ. 1.13) βρίσκουνε:

$$A_\xi^2 + A_\eta^2 = A_x^2 + A_y^2 \tag{1.14}$$

Επίσης πολλαπλασιάζοντας τις πρώτες και τις δεύτερες των (σχ. 1.11,1.12) και προσθέτοντας κατά μέλη βρίσκουμε:

$$\pm A_\xi A_\eta = A_x A_y \sin\phi \tag{1.15}$$

Αν διαιρέσουμε κατά μέλη τις πρώτες και τις δεύτερες των (σχ. 1.11,1.12) θα έχουμε:

$$\pm\frac{A_\eta}{A_\xi} = \frac{A_x \sin\phi_x \sin\psi - A_y \sin\phi_y \cos\psi}{A_x \cos\phi_x \cos\psi + A_y \cos\phi_y \sin\psi} = \frac{-A_x \cos\phi_x \sin\psi + A_y \sin\phi_y \cos\psi}{A_x \sin\phi_x \cos\psi + A_y \sin\phi_y \sin\psi} \tag{1.16}$$

Μετά από μια σειρά τριγωνομετρικών πράξεων μεταξύ των δύο τελευταίων μελών της (σχ. 1.16) βρίσκουμε:

$$\tan 2\psi = \frac{2A_x A_y}{A_x^2 - A_y^2}\cos\phi \tag{1.17}$$

από την οποία προσδιορίζουμε την αζιμουθιακή γωνία ψ ($-\pi/2 \le \psi < \pi/2$).

Προς απλοποίηση των προηγουμένων σχέσεων θα εισάγουμε δύο βοηθητικές γωνίες την α και την ε. Η α παίρνει τιμές στο διάστημα $\left(0 \le \alpha \le \pi/2\right)$ και ορίζεται ως εξής:

$$\tan a = \frac{A_y}{A_x} \tag{1.18}$$

Η ε παίρνει τιμές στο διάστημα $\left(-\pi/4 \le \varepsilon \le \pi/4\right)$ και ορίζεται ως εξής:

$$e = \tan\varepsilon = \pm\frac{A_\eta}{A_\xi} \tag{1.19}$$

Ο λόγος του μικρού προς τον μεγάλο των ημιαξόνων της έλλειψης είναι A_η / A_ξ και το πρόσημό του (–) δεξιόστροφη, (+) αριστερόστροφη, χαρακτηρίζουν τη στροφικότητα του ελλειπτικά πολωμένου φωτός. $e = \tan\varepsilon$ είναι η ***ελλειπτικότητα*** της έλλειψης (ή ***εκκεντρότητα***). Με βάση τον ορισμό της γωνίας α η (σχ. 1.17) παίρνει τη μορφή:

$$\tan 2\psi = \frac{2\tan a}{1-\tan^2 a}\cos\phi \;\Rightarrow\; \tan 2\psi = \tan 2a\cos\phi \tag{1.20}$$

Διαιρώντας τώρα τις (σχ. 1.14,15) θα έχουμε:

$$\pm\frac{2A_\xi A_\eta}{A_\xi^2 + A_\eta^2} = \frac{2A_x A_y}{A_x^2 + A_y^2}\sin\phi \tag{1.21}$$

Χρησιμοποιώντας όμως τις (σχ. 1.18,19) η (σχ. 1.21) γίνεται:

$$\frac{2\tan\varepsilon}{1+\tan^2\varepsilon} = \frac{2\tan a}{1+\tan^2 a}\sin\phi \tag{1.22}$$

και τελικά: $$\sin 2\varepsilon = \sin 2a\sin\phi \tag{1.23}$$

Στα επόμενα δίνονται συγκεντρωτικά οι σχέσεις που συνδέουν: α) Τα πλάτη A_x, A_y και τη διαφορά φάσης ϕ των συνιστωσών E_x, E_y του πεδίου, του εν γένει ελλειπτικά πολωμένου φωτός στο σύστημα συντεταγμένων E_x, E_y με β) Τα πλάτη A_ξ, A_η

των συνιστωσών E_ξ, E_η του ίδιου πεδίου (στο σύστημα συντεταγμένων E_ξ, E_η) και την αζιμουθιακή γωνία ψ.

1) $$\begin{aligned} A_\xi^2 &= A_x^2\cos^2\psi + A_y^2\sin^2\psi + A_xA_y\sin 2\psi\cos\phi \\ A_\eta^2 &= A_x^2\sin^2\psi + A_y^2\cos^2\psi - A_xA_y\sin 2\psi\cos\phi \end{aligned} \quad \rightarrow \quad (1.13)$$

2) $$A_\xi^2 + A_\eta^2 = A_x^2 + A_y^2 \quad \rightarrow \quad (1.14)$$

3) $$\pm A_\xi A_\eta = A_xA_y\sin\phi \quad \rightarrow \quad (1.15)$$

4) $$\tan 2\psi = \frac{2A_xA_y}{A_x^2 - A_y^2}\cos\phi \quad \rightarrow \quad (1.17)$$

5) $$\tan a = \frac{A_y}{A_x} \quad (1.18) \qquad e = \tan\varepsilon = \pm\frac{A_\eta}{A_\xi} \quad \rightarrow \quad (1.19)$$

6) $$\tan 2\psi = \tan 2a\cos\phi \quad \rightarrow \quad (1.20)$$

7) $$\sin 2\varepsilon = \sin 2a\sin\phi \quad \rightarrow \quad (1.23)$$

2.1) Δίνεται το ελλειπτικά πολωμένο φως (παράδειγμα § 3.1):

$$\mathbf{E} = E_0\cos(\omega t - kz)\,\mathbf{i} + E_0\cos(\omega t - kz - \pi/4)\,\mathbf{j}$$

Να προσδιοριστούν δύο κυκλικά πολωμένα φώτα με διαφορετικό πλάτος και στροφικότητα, έτσι ώστε η σύμφωνη επαλληλία (σύζευξή) τους να συγκροτεί το παραπάνω κύμα.

ΛΥΣΗ

Με βάση τις (σχ. 3.5.3) θα έχουμε:

$$\alpha_x = E_0 e^{i0} \quad , \quad \alpha_y = E_0 e^{-i(\pi/4)}$$

και από τις (σχ. 3.5.14), $a_L = \frac{1}{2}\left(\alpha_x + i\alpha_y\right)$, $a_R = \frac{1}{2}\left(\alpha_x^* + i\alpha_y^*\right)$

βρίσκουμε: $\alpha_L = \frac{E_0}{2} + i\frac{E_0}{2}e^{-i(\pi/4)}$, $\alpha_R = \frac{E_0}{2} + i\frac{E_0}{2}e^{i(\pi/4)}$, $i = e^{i(\pi/2)}$

οπότε με βάση τις (σχ. 3.5.13): $\alpha_L = A_L e^{i\phi_L}$, $\alpha_R = A_R e^{i\phi_R}$

βρίσκουμε: $A_L e^{i\phi_L} = \frac{E_0}{2} + i\frac{E_0}{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$ (1) $A_R e^{i\phi_R} = \frac{E_0}{2} + i\frac{E_0}{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$ (2)

$$(1) \Rightarrow A_L\left(\cos\phi_L + i\sin\phi_L\right) = \frac{E_0}{2} + i\frac{E_0}{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$$

οπότε:
$$\left.\begin{aligned} &\frac{E_0}{2} + \frac{E_0}{2}\sin(\frac{\pi}{4}) = A_L\cos\phi_L \\ &\frac{E_0}{2}\cos(\frac{\pi}{4}) = A_L\sin\phi_L \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

$$(2) \Rightarrow A_R\left(\cos\phi_R + i\sin\phi_R\right) = \frac{E_0}{2} + i\frac{E_0}{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$$

οπότε:
$$\left.\begin{aligned} &\frac{E_0}{2} - \frac{E_0}{2}\sin(\frac{\pi}{4}) = A_R\cos\phi_R \\ &\frac{E_0}{2}\cos(\frac{\pi}{4}) = A_R\sin\phi_R \end{aligned}\right\} \quad (4)$$

Με ύψωση στο τετράγωνο των δύο σχέσεων (3) και πρόσθεσή τους βρίσκουμε τελικά:

$A_L = \frac{E_0}{2}\sqrt{2}\sqrt{\left(1 + \sin\frac{\pi}{4}\right)}$ οπότε: $A_L = 0.923E_0$. Αλλά από τη δεύτερη των σχέσεων (3) έχουμε: $\frac{E_0}{2}\cos(\frac{\pi}{4}) = A_L\sin\phi_L$ οπότε: $\sin\phi_L = \frac{E_0}{2}\cos(\frac{\pi}{4})\Big/A_L$ και επειδή $A_L = 0.923E_0$ βρίσκουμε τελικά: $\phi_L = 22.5^0$.

Με ύψωση στο τετράγωνο των δύο σχέσεων (4) και πρόσθεσή τους βρίσκουμε τελικά:

$A_R = \frac{E_0}{2}\sqrt{2}\sqrt{\left(1-\sin\frac{\pi}{4}\right)}$ οπότε: $A_R = 0.382E_0$. Αλλά από τη δεύτερη των σχέσεων (4) έχουμε: $\frac{E_0}{2}\cos(\frac{\pi}{4}) = A_R \sin\phi_R$ οπότε: $\sin\phi_R = \frac{E_0}{2}\cos(\frac{\pi}{4})\Big/A_R$ και επειδή $A_R = 0.382E_0$ έχουμε: $\phi_R = 67.5^0$

Τελικά από τις (σχ. 3.5.7,10):

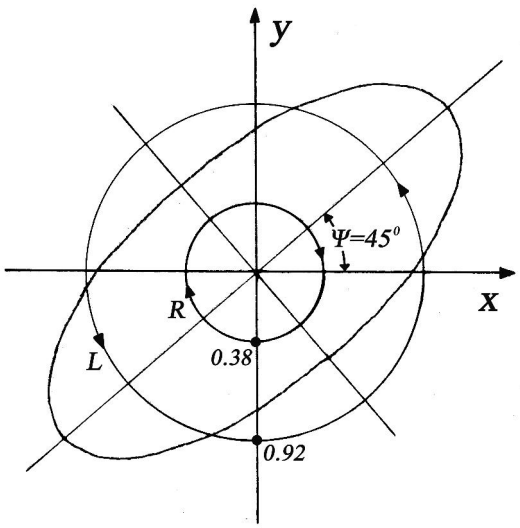
$$\tilde{E}_L = E_{xL} + iE_{yL} = A_L e^{i\phi_L} e^{i\theta} \quad , \quad E_{xL} = \mathrm{Re}(\tilde{E}_L) \ , \ E_{yL} = \mathrm{Im}(\tilde{E}_L)$$
$$\tilde{E}_R = E_{xR} + iE_{yR} = A_R e^{i\phi_R} e^{-i\theta} \quad , \quad E_{xR} = \mathrm{Re}(\tilde{E}_R) \ , \ E_{yR} = \mathrm{Im}(\tilde{E}_R)$$

βρίσκουμε για τα κυκλικά πολωμένα φώτα):

$$\mathcal{L}: \begin{cases} E_{xL} = A_L \cos(\theta + \phi_L) \\ E_{yL} = A_L \sin(\theta + \phi_L) \end{cases} \mathbf{E_L} = E_{xL}\,\mathbf{i} + E_{yL}\,\mathbf{j} \quad \mathcal{R}: \begin{cases} E_{xR} = A_R \cos(\theta - \phi_R) \\ E_{yR} = -A_R \sin(\theta - \phi_R) \end{cases} \mathbf{E_R} = E_{xR}\,\mathbf{i} + E_{yR}\,\mathbf{j}$$

Και με αντικατάσταση των αριθμητικών τιμών των πλατών και των φάσεων:

$$\mathcal{L}: \begin{cases} E_{xL} = 0.923E_0 \cos\left(\theta + 25.5^0\right) \\ E_{yL} = 0.923E_0 \sin\left(\theta + 25.5^0\right) \end{cases} \quad \mathcal{R}: \begin{cases} E_{xR} = 0.382E_0 \cos\left(\theta - 67.5^0\right) \\ E_{yR} = -0.382E_0 \sin\left(\theta - 67.5^0\right) \end{cases}$$



(Σχ. 2.1.1)

Στο (Σχ. 2.1.1) μπορούμε να δούμε τη γραφική παράσταση για $z = 0$ και διάφορες τιμές του t των δύο κυκλικά πολωμένων φώτων καθώς και της σύνθεσής τους.

2.2) Ν' αποδειχθεί ότι ένα γραμμικά πολωμένο επίπεδο μέτωπο κύματος πλάτους A, μπορεί να προκύψει από την επαλληλία (σύζευξη) δύο κυκλικά πολωμένων επιπέδων μετώπων κύματος, αντίθετης στροφικότητας και πλάτους το καθένα ίσο με $A/2$.

ΛΥΣΗ

Α) Για το γραμμικά πολωμένο φως:

$$\alpha_x = A_x e^{i\phi_x} \ , \ \alpha_y = A_y e^{i\phi_y} \ , \ \phi_y - \phi_x = 0 \Rightarrow \phi_y = \phi_x = \phi$$

Για το κυκλικά πολωμένο φως:

$$\alpha_L = A_L e^{i\phi_L} = A_L \ , \ \alpha_R = A_R e^{i\phi_R} = A_R \quad (\phi_L = \phi_R = 0)$$

Με βάση τις σχέσεις μετατροπής πλατών και φάσεων (βλ. (§ 3.5) (σχ. 3.5.15)) έχουμε:

$$\alpha_x = \alpha_L + \alpha_R^* \quad , \quad \alpha_y = -i(\alpha_L - \alpha_R^*)$$

Επομένως: $\alpha_x = A_x e^{i\phi} \ , \ \alpha_y = A_y e^{i\phi}$

$$A_x e^{i\phi} = \alpha_L + \alpha_R^* \qquad A_y e^{i\phi} = -i(\alpha_L - \alpha_R^*) \Rightarrow iA_y e^{i\phi} = \alpha_L - \alpha_R^*$$

Τελικά: $A_x e^{i\phi} = \alpha_L + \alpha_R^* \quad (1) \quad A_y e^{i(\phi+\pi/2)} = \alpha_L - \alpha_R^* \quad (2)$

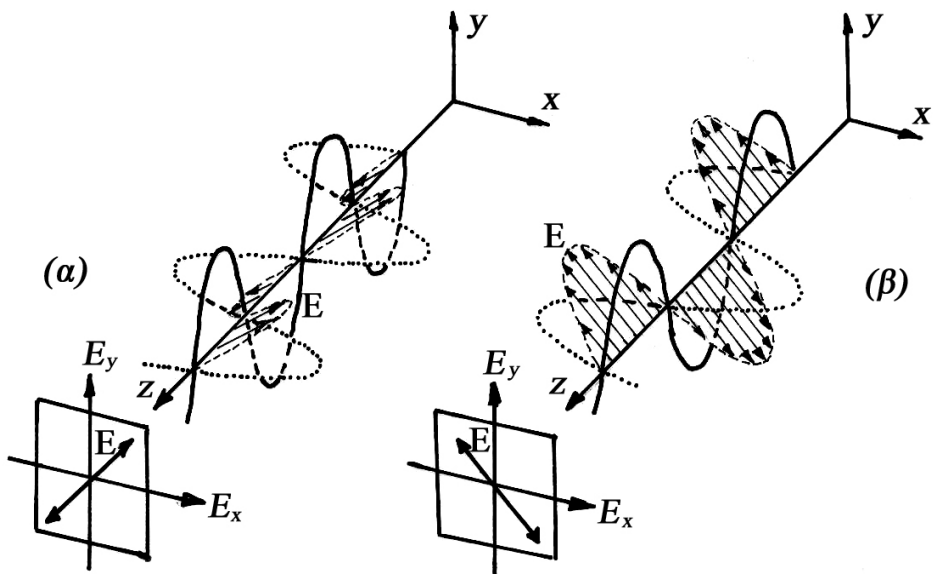
Προσθέτοντας τις σχέσεις (1) και (2) βρίσκουμε:

$$A_x e^{i\phi} + A_y e^{i(\phi+\pi/2)} = A_x e^{i\phi} + iA_y e^{i\phi} = 2\alpha_L = 2A_L$$

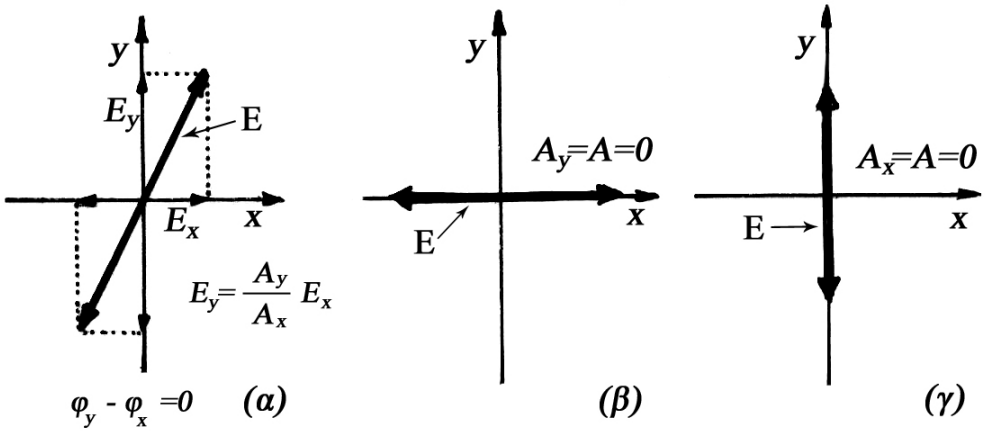
Αφαιρώντας τις σχέσεις (1) και (2) βρίσκουμε:

$$A_x e^{i\phi} - A_y e^{i(\phi+\pi/2)} = A_x e^{i\phi} - iA_y e^{i\phi} = 2\alpha_R^* \Rightarrow A_x e^{-i\phi} + iA_y e^{-i\phi} = 2\alpha_R = 2A_R$$

Και τελικά: $2A_L = \left(A_x + iA_y\right)e^{i\phi} \qquad 2A_R = \left(A_x + iA_y\right)e^{-i\phi}$



(Σχ. 2.2.1)



(Σχ. 2.2.2)

Επιβεβαίωση

$$\tilde{E}_L = A_L e^{i\theta} \quad , \quad \tilde{E}_R = A_R e^{-i\theta}$$

$$\tilde{E} = \tilde{E}_L + \tilde{E}_R = \frac{1}{2}\left(A_x + iA_y\right)e^{i\phi}e^{i\theta} + \frac{1}{2}\left(A_x + iA_y\right)e^{-i\phi}e^{-i\theta}$$

$$\tilde{E} = \frac{1}{2}\left(A_x + iA_y\right)\left[e^{i(\theta+\phi)} + e^{-i(\theta+\phi)}\right] \Rightarrow \tilde{E} = \left(A_x + iA_y\right)\cos\left(\theta + \phi\right)$$

$$\left.\begin{array}{l} E_x = A_x \cos(\theta+\phi) \\ \\ E_y = A_y \cos(\theta+\phi) \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{E_y}{E_x} = \frac{A_y}{A_x} \Rightarrow E_y = \frac{A_y}{A_x} E_x \Bigg\} \quad (\Sigma\chi.\ 2.2.2\alpha)$$

α) Για φως πολωμένο παράλληλα με τον άξονα των x:

$$A_y = A = 0 \quad \Rightarrow \quad \left.\begin{array}{l} 2A_L = A_x e^{i\phi} \\ 2A_R = A_x e^{-i\phi} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} A_L = \dfrac{A}{2} e^{i\phi} \\ \\ A_R = \dfrac{A}{2} e^{-i\phi} \end{array}\right\} (\Sigma\chi.\ 2.2.2\beta)$$

β) Για φως πολωμένο παράλληλα με τον άξονα των y:

$$A_x = A = 0 \quad \Rightarrow \quad \left.\begin{array}{l} 2A_L = iA_y e^{i\phi} \\ 2A_R = iA_y e^{-i\phi} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} A_L = \dfrac{A}{2} e^{i(\pi/2+\phi)} \\ \\ A_R = \dfrac{A}{2} e^{-i(\pi/2+\phi)} \end{array}\right\} (\Sigma\chi.\ 2.2.2\gamma)$$

Β) Για το γραμμικά πολωμένο φως:

$$\alpha_x = A_x e^{i\phi_x} \ , \ \alpha_y = A_y e^{i\phi_y} \ , \ \phi_y - \phi_x = \pi \Rightarrow \phi_y = \pi + \phi_x$$

Για το κυκλικά πολωμένο φως:

$$\alpha_L = A_L e^{i\phi_L} = A_L \quad , \ \alpha_R = A_R e^{i\phi_R} = A_R \quad (\phi_L = \phi_R = 0)$$

Με βάση τις σχέσεις μετατροπής πλατών και φάσεων (βλ. (§ 3.5) (σχ. 3.5.1.5)) θα έχουμε:

$$\alpha_x = \alpha_L + \alpha_R^* \quad , \quad \alpha_y = -i(\alpha_L - \alpha_R^*) \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} \alpha_x = A_x e^{i\phi_x} \\ \alpha_y = A_y e^{i(\pi+\phi_x)} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \alpha_x = A_x e^{i\phi} \\ \alpha_y = A_y e^{i(\pi+\phi)} \end{array}\right\}$$

Επομένως:

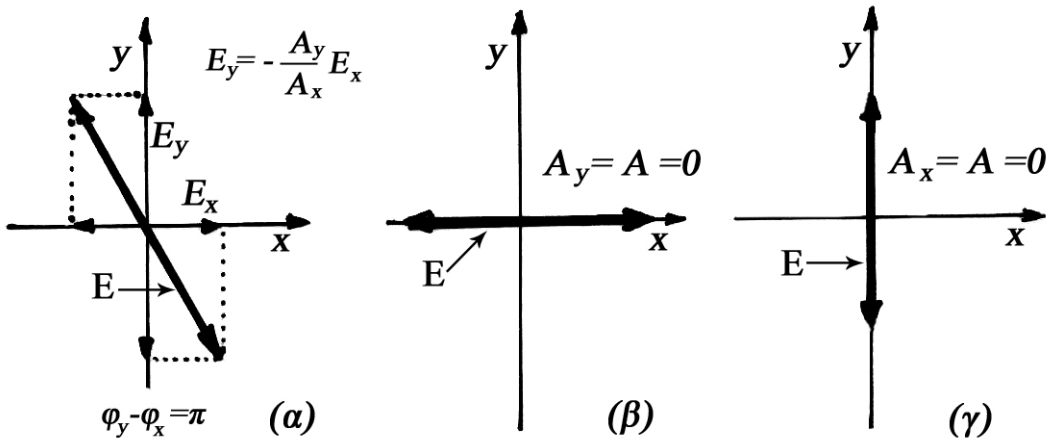
$$\left.\begin{array}{l} A_x e^{i\phi} = \alpha_L + \alpha_R^* \\ A_y e^{i(\pi+\phi)} = -i(\alpha_L - \alpha_R^*) \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{ll} A_x e^{i\phi} = \alpha_L + \alpha_R^* & (1) \\ iA_y e^{i(\pi+\phi)} = \alpha_L - \alpha_R^* & (2) \end{array}\right.$$

Προσθέτοντας τις σχέσεις (1) και (2) βρίσκουμε:

$$A_x e^{i\phi} + iA_y e^{i(\pi+\phi)} = 2\alpha_L = 2A_L$$

Αφαιρώντας τις σχέσεις (1) και (2) βρίσκουμε:

$$A_x e^{i\phi} - iA_y e^{i(\pi+\phi)} = 2\alpha_R^* \Rightarrow A_x e^{-i\phi} + iA_y e^{-i(\pi+\phi)} = 2\alpha_R = 2A_R$$



(Σχ. 2.2.3)

Επιβεβαίωση

$$\tilde{E}_L = A_L e^{i\theta} \quad , \quad \tilde{E}_R = A_R e^{-i\theta}$$

$$\tilde{E} = \tilde{E}_L + \tilde{E}_R = \frac{1}{2}\left(A_x e^{i\phi} + iA_y e^{i(\pi+\phi)}\right)e^{i\theta} + \frac{1}{2}\left(A_x e^{-i\phi} + iA_y e^{-i(\pi+\phi)}\right)e^{-i\theta} \Rightarrow$$

$$\tilde{E} = \frac{1}{2}\left[A_x e^{i(\theta+\phi)} + iA_y e^{i(\theta+\phi+\pi)} + A_x e^{-i(\theta+\phi)} + iA_y e^{-i(\theta+\phi+\pi)}\right]$$

$$\tilde{E} = \frac{1}{2}\left\{A_x\left[e^{i(\theta+\phi)} + e^{-i(\theta+\phi)}\right] + iA_y\left[e^{i(\theta+\phi+\pi)} + e^{-i(\theta+\phi+\pi)}\right]\right\}$$

$$\tilde{E} = \frac{1}{2}\left\{A_x\left[e^{i(\theta+\phi)} + e^{-i(\theta+\phi)}\right] + iA_y e^{i\pi}\left[e^{i(\theta+\phi)} + e^{-i(\theta+\phi)}\right]\right\} \quad \left(e^{i\pi} = e^{-i\pi} = -1\right)$$

$$\tilde{E} = \frac{1}{2}\left(A_x - iA_y\right)\left[e^{i(\theta+\phi)} + e^{-i(\theta+\phi)}\right]$$

$$\tilde{E} = \left(A_x - iA_y\right)\cos\left(\theta+\phi\right) \Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l} E_x = A_x\cos\left(\theta+\phi\right) \\ E_y = -A_y\cos\left(\theta+\phi\right) \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{E_y}{E_x} = -\frac{A_y}{A_x} \Rightarrow E_y = -\frac{A_y}{A_x}E_x \quad (\Sigma\chi.\ 2.2.3\alpha)$$

α) Για φως πολωμένο παράλληλα με τον άξονα των x:

$$A_y = A = 0 \quad \Rightarrow \quad \left.\begin{array}{l} 2A_L = A_x e^{i\phi} \\ 2A_R = A_x e^{-i\phi} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} A_L = \frac{A}{2}e^{i\phi} \\ A_R = \frac{A}{2}e^{-i\phi} \end{array}\right\} (\Sigma\chi.\ 2.2.3\beta)$$

β) Για φως πολωμένο παράλληλα με τον άξονα των y:

$$A_x = A = 0 \quad \Rightarrow \quad \left.\begin{array}{l} 2A_L = iA_y e^{i(\pi+\phi)} \\ 2A_R = iA_y e^{-i(\pi+\phi)} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} A_L = \frac{A}{2}e^{i(3\pi/2+\phi)} \\ A_R = \frac{A}{2}e^{-i(3\pi/2+\phi)} \end{array}\right\} (\Sigma\chi.\ 2.2.3\gamma)$$

3) Να αποδειχθεί ότι η επαλληλία πολλών ασύμφωνων (ασύζευκτων) μεταξύ τους δεσμών φωτός, που έχουν ακριβώς την ίδια κατάσταση πόλωσης, οδηγεί σε μια τελική δέσμη με την ίδια κατάσταση πόλωση όπως και οι προηγούμενες.

ΛΥΣΗ

Γνωρίζουμε ότι για να βρίσκονται δύο ή και περισσότερες δέσμες φωτός στην ίδια κατάσταση πόλωσης, θα πρέπει οι συνιστώσες της κάθε μιας να έχουν την ίδια διαφορά φάσης $\phi = \phi_y - \phi_x$ καθώς και τον ίδιο λόγο πλατών $r = E_y / E_x$. Πράγματι αν:

$$E_{x_n} = A_{x_n} e^{i\left(\omega t - kz + \phi_{x_n}\right)} \quad , \quad E_{y_n} = A_{y_n} e^{i\left(\omega t - kz + \phi_{y_n}\right)}$$

τότε:

$$\frac{E_{y_n}}{E_{x_n}} = \frac{A_{y_n}}{A_{x_n}} e^{i\left(\phi_{y_n} - \phi_{x_n}\right)} \Rightarrow \frac{E_{y_n}}{E_{x_n}} = re^{i\phi} \qquad (3.1)$$

Δηλ. η κατάσταση πόλωσης ορίζεται πλήρως από τα r και ϕ. Για τις N τον αριθμό δέσμες με τα ίδια r και ϕ θα έχουμε:

$$\mathbf{E}_{tot} = \sum_{n=1}^{N} E_{x_n}\,\mathbf{i} + \sum_{n=1}^{N} E_{y_n}\,\mathbf{j} = E_{x_{tot}}\,\mathbf{i} + E_{y_{tot}}\,\mathbf{j} \tag{3.2}$$

Από την (σχ.3.1) θα έχουμε: $E_{y_n} = re^{i\phi}E_{x_n}$ και:

$$\left.\begin{aligned} E_{x_n} &= A_{x_n} e^{i\phi_{x_n}} e^{i\theta} \\ E_{y_n} &= re^{i\phi}E_{x_n} \end{aligned}\right\} \ \mu\varepsilon \ \ \theta = \omega t - kz \tag{3.3}$$

Άρα:

$$E_{x_{tot}} = \sum_{n=1}^{N} A_{x_n}\, e^{i\phi_{x_n}} e^{i\theta}$$

$$E_{y_{tot}} = \sum_{n=1}^{N} E_{y_n} = re^{i\phi}\sum_{n=1}^{N} E_{x_n} = re^{i\phi}\sum_{i=1}^{N} A_{x_n} e^{i\phi_{x_n}} e^{i\theta} = re^{i\phi}E_{x_{tot}} \Rightarrow$$

$$E_{y_{tot}} / E_{x_{tot}} = re^{i\phi}$$

Δηλαδή παρά το ότι οι φάσεις ϕ_{x_n}, ϕ_{y_n} και τα πλάτη A_{x_n}, A_{y_n} των επί μέρους δεσμών δεν είναι τα ίδια (έχουν όμως ίδια τα $\phi = \phi_y - \phi_x$ και $r = E_y / E_x$), η επαλληλία τους συνθέτει μια δέσμη που θα βρίσκεται σε συγκεκριμένη κατάσταση πόλωσης και θα καθορίζεται από τα r και ϕ. Η κατάσταση αυτή είναι ακριβώς η ίδια με την κατάσταση πόλωσης των επιμέρους δεσμών.

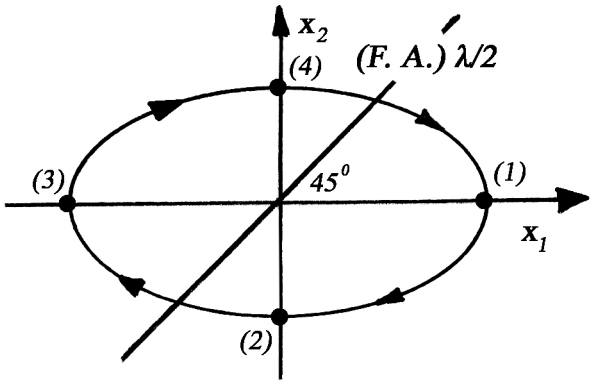
4) Δεξιόστροφα ελλειπτικά πολωμένο φως του οποίου οι παραμετρικές εξισώσεις είναι της μορφής: $E_x = 2A\cos(\omega t - kz)$, $E_y = A\cos(\omega t - kz + 90^0)$ προσπίπτει σε πλακίδιο $\lambda/2$ του οποίου ο ταχύς άξονας βρίσκεται σε γωνία 45^0 σε σχέση με το σ.σ. E_x, E_y. Να προσδιοριστεί η κατάσταση πόλωσης του φωτός που βγαίνει από το πλακίδιο.

ΛΥΣΗ

Αν συμβολίσουμε με $E_x \equiv x_1$, $E_y \equiv x_2$ για $z = 0$ οι παραμετρικές εξισώσεις παίρνουν τη μορφή:

$$x_1 = 2A\cos(\omega t) = 2A\cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right),\quad x_2 = A\cos(\omega t + 90^0) = \cos\left(\frac{2\pi}{T}t + 90^0\right).$$

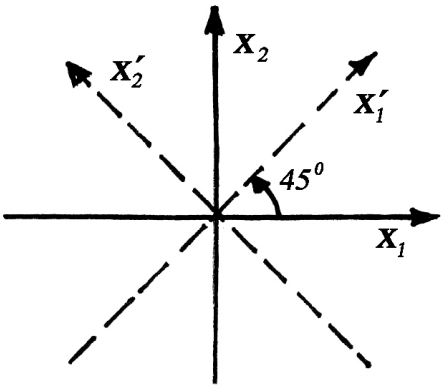
Οπότε για: $t = 0, T/4, T/2, 3T/4$ θα έχουμε: $x_1 = 2A, 0, -2A, 0$ και $x_2 = 0, -A, 0, A$ με βάσει τις οποίες μπορούμε να σχεδιάσουμε το ελλειπτικά πολωμένο φως (δεξιόστροφο) το προσπίπτον στο πλακίδιο $\lambda/2$ (Σχ. 4.1).



(Σχ. 4.1)

Κατόπιν στρέφουμε το σ.σ. x_1, x_2 κατά τη θετική γωνία $+45^0$ (αντίθετα της φοράς των δεικτών του ρολογιού) έτσι ώστε $x_1 \equiv (F.A.)_{\lambda/2}$. Η διαδικασία αυτής της στροφής φαίνεται στο (Σχ. 4.2) όπου τα συνημίτονα κατεύθυνσης έχουν τις τιμές:

		(Παλαιό σ.σ.) x_1	x_2
(Νέο σ.σ.)	x_1'	α_{11}	α_{12}
	x_2'	α_{21}	α_{22}



(Σχ. 4.2)

$a_{11} = \cos(45^0) = \sqrt{2}/2, a_{12} = \cos(90^0 - 45^0) = \sqrt{2}/2, a_{21} = \cos(90^0 + 45^0) = \cos(135^0) = -\sqrt{2}/2,$
$a_{22} = \cos(45^0) = \sqrt{2}/2.$

Όπου a_{ij} τα συνημίτονα κατεύθυνσης με $i \rightarrow$ το νέο σ.σ. και $j \rightarrow$ το παλαιό σ.σ.

Με τη βοήθεια του πίνακα του (Σχ. 4.2) θα έχουμε για $\omega t - kz = \theta$:

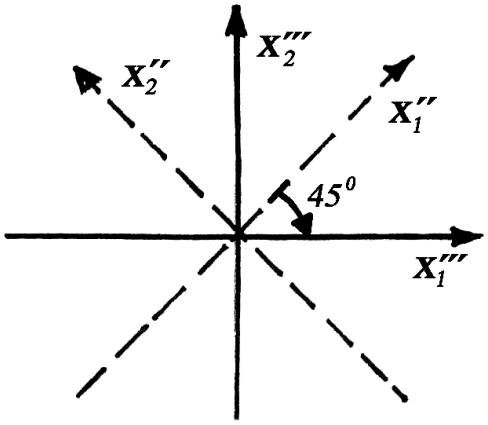
$$x_1' = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = (\sqrt{2}/2)2A\cos\theta + \left(\sqrt{2}/2\right)A\cos\left(\theta + 90^0\right)$$
$$x_2' = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = -(\sqrt{2}/2)2A\cos\theta + \left(\sqrt{2}/2\right)A\cos\left(\theta + 90^0\right)$$

Μετά τη διάβαση του φωτός από το πλακίδιο $\lambda/2$ θα προσθέσουμε μια φάση 180^0 στο όρισμα της συνιστώσας x_2' οπότε οι δύο τελευταίες σχέσεις γίνονται:

$$x_1' \equiv x_1'' = (\sqrt{2}/2)2A\cos\theta + \left(\sqrt{2}/2\right)A\cos\left(\theta + 90^0\right)$$
$$x_2' \equiv x_2'' = -(\sqrt{2}/2)2A\cos\left(\theta + 180^0\right) + \left(\sqrt{2}/2\right)A\cos\left(\theta + 270^0\right)$$

Τελικά μετασχηματίζουμε το σ.σ. x_1'', x_2'' στο σ.σ. $x_1''' \equiv x_1, x_2''' \equiv x_2$ με στροφή κατά -45^0 (κατά τη φορά των δεικτών του ρολογιού). Η διαδικασία αυτής της στροφής φαίνεται στο (Σχ. 4.3) όπου τα συνημίτονα κατεύθυνσης έχουν τις τιμές:

		(Παλαιό σ.σ.) x_1''	x_2''
(Νέο σ.σ.)	x_1'''	α_{11}'	α_{12}'
	x_2'''	α_{21}'	α_{22}'



(Σχ. 4.3)

$a_{11}' = \cos\left(45^0\right) = \sqrt{2}/2, a_{12}' = \cos\left(90^0 + 45^0\right) = -\sqrt{2}/2, a_{21}' = \cos\left(45^0\right) = \sqrt{2}/2,$
$a_{22}' = \cos\left(45^0\right) = \sqrt{2}/2.$

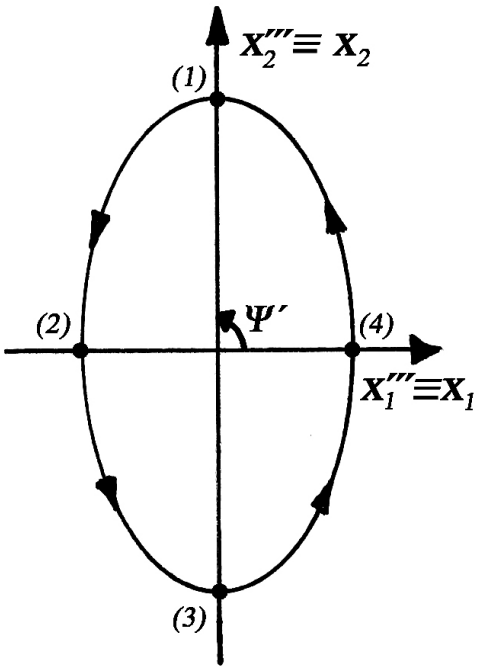
Όπου a_{ij}' τα συνημίτονα κατεύθυνσης με $i \rightarrow$ το νέο σ.σ. και $j \rightarrow$ το παλαιό σ.σ.

Επομένως: $x_1''' = a_{11}'x_1'' + a_{12}'x_2''$ $x_2''' = a_{21}'x_1'' + a_{22}'x_2''$. Και μετά τις αντικαταστάσεις:

$$x_1''' = \left(\sqrt{2}/2\right)\left[(\sqrt{2}/2)2A\cos\theta + \left(\sqrt{2}/2\right)A\cos\left(\theta + 90^0\right)\right] - \left(\sqrt{2}/2\right)\left[-(\sqrt{2}/2)2A\cos\left(\theta + 180^0\right) + \left(\sqrt{2}/2\right)A\cos\left(\theta + 270^0\right)\right]$$
$$x_2''' = \left(\sqrt{2}/2\right)\left[(\sqrt{2}/2)2A\cos\theta + \left(\sqrt{2}/2\right)A\cos\left(\theta + 90^0\right)\right] + \left(\sqrt{2}/2\right)\left[-(\sqrt{2}/2)2A\cos\left(\theta + 180^0\right) + \left(\sqrt{2}/2\right)A\cos\left(\theta + 270^0\right)\right]$$

$$x_1''' = A\cos\theta + (A/2)\cos(\theta + 90^0) + A\cos(\theta + 180^0) - (A/2)\cos(\theta + 270^0)$$
$$x_2''' = A\cos\theta + (A/2)\cos(\theta + 90^0) - A\cos(\theta + 180^0) + (A/2)\cos(\theta + 270^0)$$

και τελικά: $x_1''' = -A\sin\theta$ και $x_2''' = 2A\cos\theta$. Οπότε για: $t = 0, T/4, T/2, 3T/4$ θα έχουμε: $x_1''' = 0, -A, 0, A$ και $x_2''' = 2A, 0, -2A, 0$ με βάσει τις οποίες μπορούμε να σχεδιάσουμε το ελλειπτικά πολωμένο φως (αριστερόστροφο) το αναδυόμενο από το πλακίδιο $\lambda/2$ (Σχ. 4.4).



(Σχ.4.4)

Επειδή οι παραμετρικές εξισώσεις τις τελικής κατάστασης πόλωσης είναι οι: $x_1''' = -A\sin\theta = A\cos(\theta + 90^0)$ και $x_2''' = 2A\cos\theta$, μπορούμε να υπολογίσουμε τα στοιχεία της αζιμουθιακής γωνίας, της ελλειπτικότητας και της στροφικότητας από τα συμπεράσματα της (Ασκ. 1-Λυμένης). Πράγματι από τη σχέση $\phi = \phi_y - \phi_x$ επειδή $\phi_x = 90^0$ και $\phi_y = 0^0$ θα έχουμε: $\phi = -90^0$ και από τη (σχ. 1.17) $\tan 2\psi' = \dfrac{2A_xA_y}{A_x^2 - A_y^2}\cos\phi$ επειδή $A_x, A_y \neq 0$ θα έχουμε $\tan 2\psi' = 0 \Rightarrow \psi' = 0^0$ γεγονός το οποίο δεν έρχεται σε συμφωνία με την αζιμουθιακή γωνία $\psi' = 90^0$ που προκύπτει από τις παραμετρικές εξισώσεις $x_1''' = -A\sin\theta = A\cos(\theta + 90^0)$ και $x_2''' = 2A\cos\theta$ (Σχ. 4.4).

Η αντίφαση αίρεται από το γεγονός ότι η γενικότερη λύση της τριγωνομετρικής εξίσωσης $\tan q = \tan q'$ είναι η $q = m\pi + q'$ για $q, q' \neq m\pi + \pi/2$ και $m \in \mathbb{Z}$. Επομένως από την εξίσωση $\tan 2\psi' = 0$ δεν θα λάβουμε σαν λύση την $2\psi' = 0^0$ αλλά (για $n = 1$) την $2\psi' = 180^0$. Επομένως $\psi' = 90^0$.

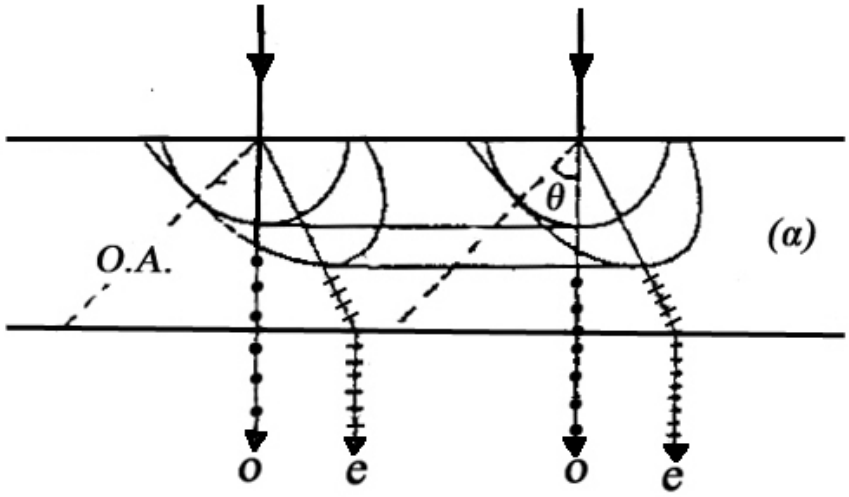
Για να υπολογίσουμε τώρα την εκκεντρότητα e της έλλειψης καθώς και τη στροφικότητά της χρησιμοποιούμε τη (σχ. 1.16) της (Ασκ. 1-Λυμένης):

$$e = \pm\frac{A_\eta}{A_\xi} = \frac{A_x \sin\phi_x \sin\psi' - A_y \sin\phi_y \cos\psi'}{A_x \cos\phi_x \cos\psi' + A_y \cos\phi_y \sin\psi'} = \frac{-A_x \cos\phi_x \sin\psi' + A_y \sin\phi_y \cos\psi'}{A_x \sin\phi_x \cos\psi'' + A_y \sin\phi_y \sin\psi'}$$ και

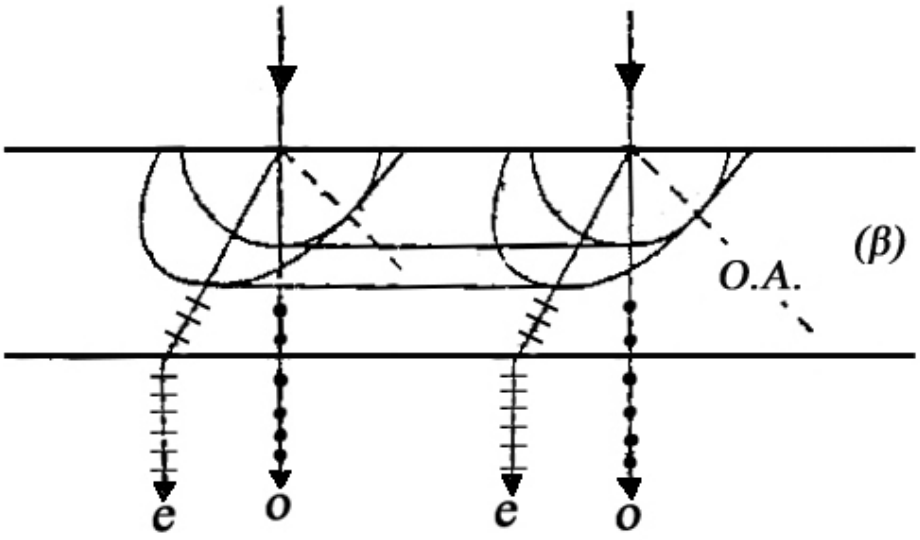
μάλιστα το πρώτο τμήμα της: $e = \dfrac{A_x \sin\phi_x \sin\psi' - A_y \sin\phi_y \cos\psi'}{A_x \cos\phi_x \cos\psi' + A_y \cos\phi_y \sin\psi'}$ όπου με βάση τις παραμετρικές της εξισώσεις: $x_1''' = A\cos\left(\theta + 90^0\right)$ και $x_2''' = 2A\cos\theta$ θα έχουμε: $A_x = A,\ A_y = 2A,\ \phi_x = 90^0,\ \phi_y = 0^0$ και κατά τα γνωστά $\psi' = 90^0$. Μετά την αντικατάσταση αυτών των τιμών βρίσκουμε $e = +1/2$. Επομένως το φως που βγαίνει από το πλακίδιο $\lambda/2$ θα είναι αριστερόστροφα ελλειπτικά πολωμένο (πρόσημο $+$) με αζιμούθιο $\psi' = 90^0$ και εκκεντρότητα $e = 1/2$.

5) Να σχεδιαστούν οι τρόποι διάδοσης ενός επιπέδου μονοχρωματικού μετώπου κύματος φυσικού φωτός, που πέφτει κάθετα πάνω στην επιφάνεια ενός μονοάξονα αρνητικού διπλοθλαστικού κρυστάλλου. Θεωρούμε ότι ο οπτικός του άξονας σχηματίζει γωνία θ με την κάθετη στην επιφάνεια.

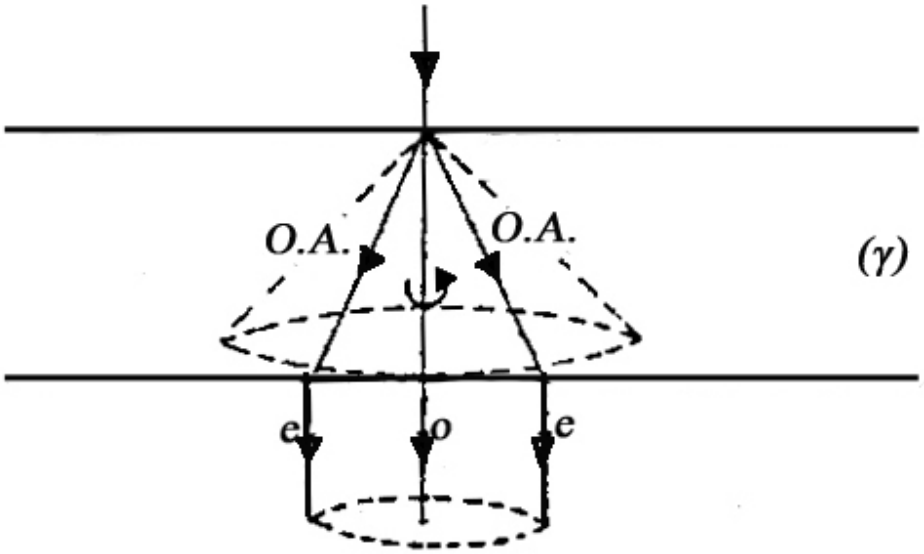
ΛΥΣΗ



(Σχ. 5.1)



(Σχ.5.2)

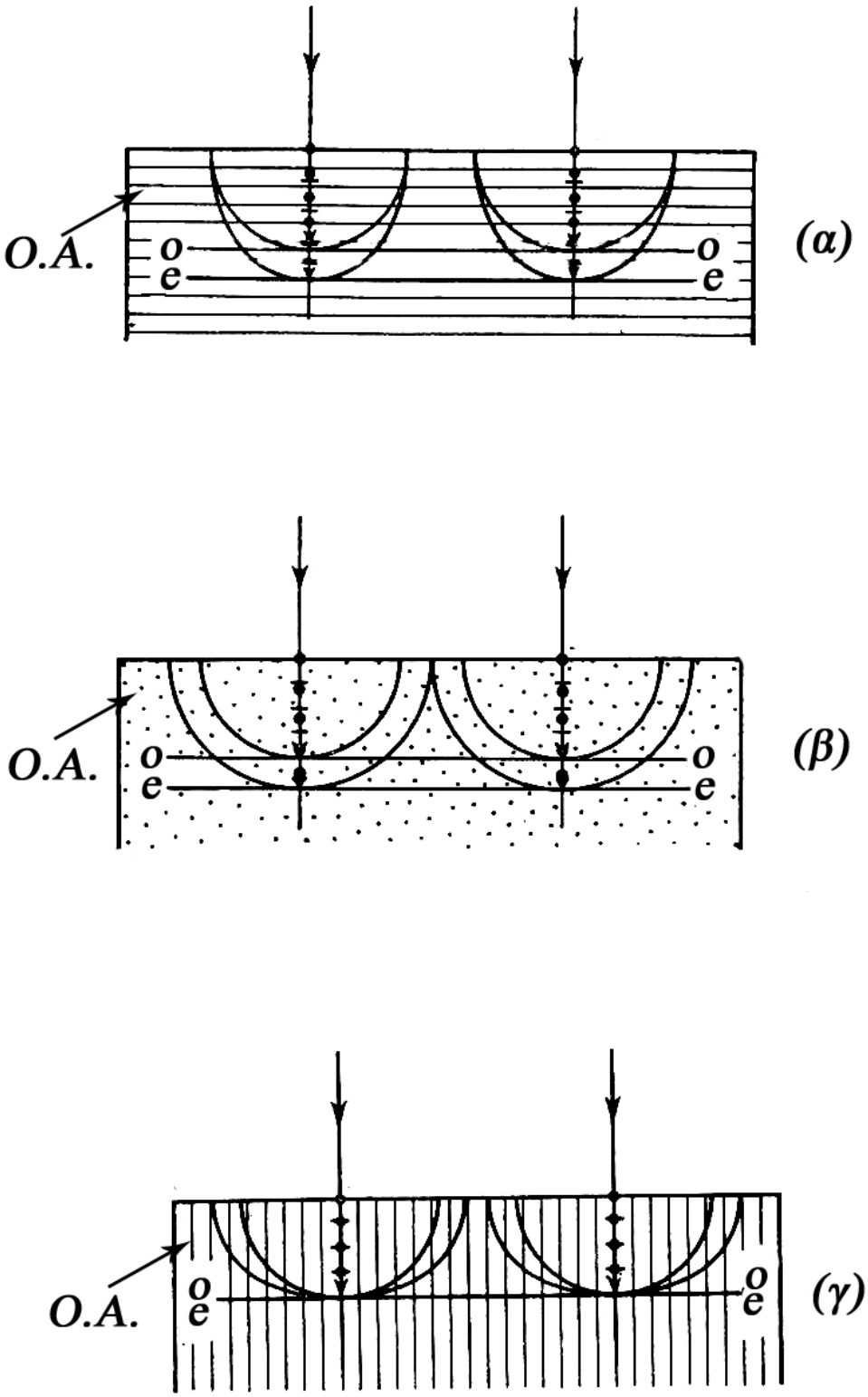


(Σχ. 5.3)

6) Να σχεδιαστούν οι τρόποι διάδοσης ενός επιπέδου μονοχρωματικού μετώπου κύματος φυσικού φωτός, που πέφτει 1) κάθετα και 2) με μια ορισμένη γωνία πρόσπτωσης ως προς την επιφάνεια ενός μονοάξονα αρνητικού διπλοθλαστικού κρυστάλλου. Θεωρούμε ότι ο κρύσταλλος είναι κομμένος παράλληλα ή κάθετα προς τον οπτικό του άξονα.

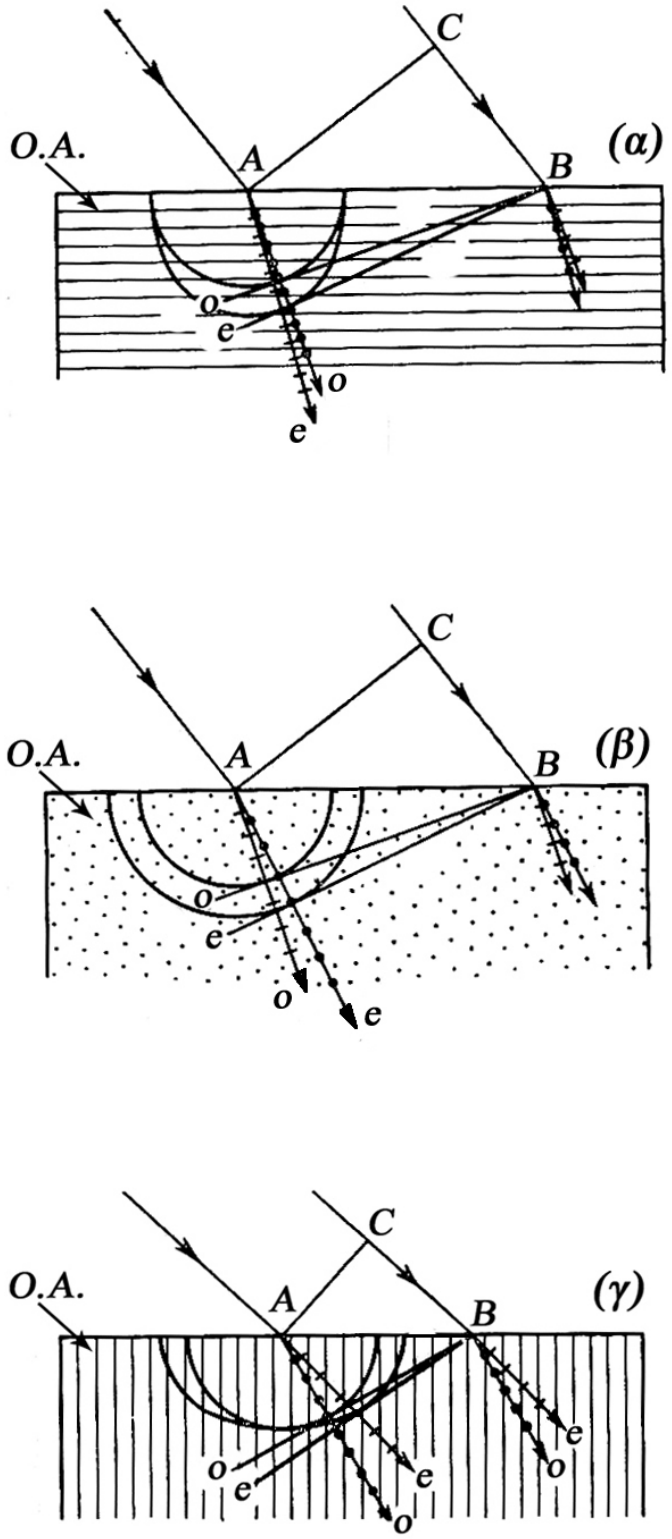
ΛΥΣΗ

6.1) <u>Κάθετη πρόσπτωση</u>



(Σχ.6.1)

6.2) <u>Πλάγια πρόσπτωση</u>

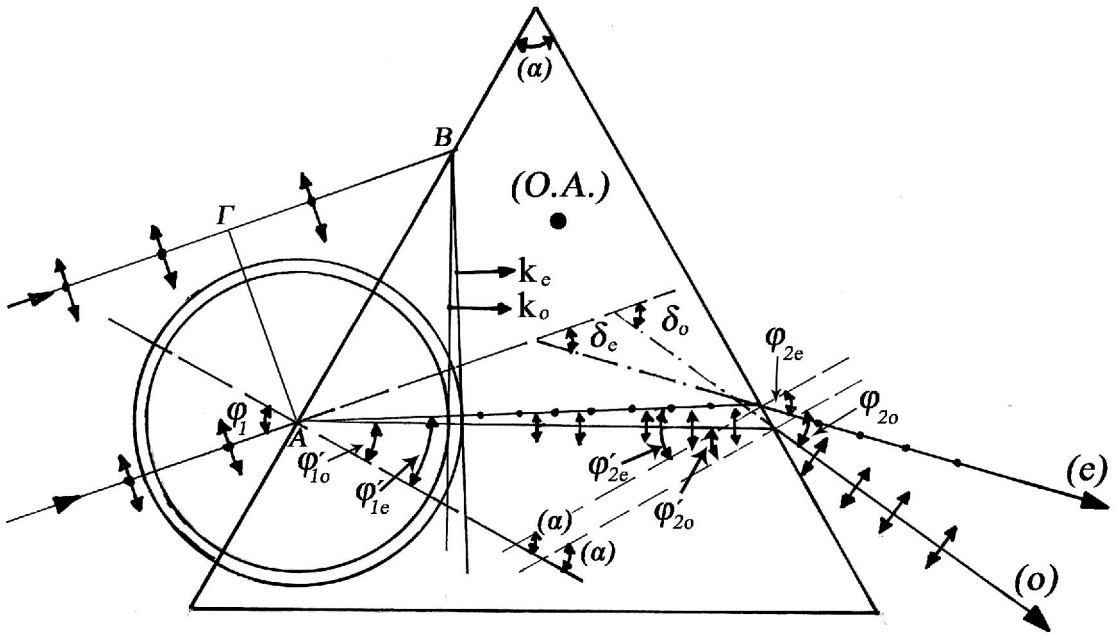


(Σχ. 6.2)

7) Διαθέτουμε ένα ορθό τριγωνικό ισόπλευρο πρίσμα από κρυσταλλικό ασβεστίτη του οποίου η τομή η κάθετη στις παράπλευρες έδρες του φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Ο οπτικός του άξονας είναι κάθετος στο επίπεδο αυτό. Επίπεδο μέτωπο κύματος μονοχρωματικού φυσικού φωτός από λυχνία Na προσπίπτει σε μια πλευρά του με γωνία $\phi_1 = 50^0$. α) Να σχεδιαστούν τα διαδιδόμενα στο εσωτερικό του μέτωπα κύματος της τακτικής και της έκτακτης διαταραχής καθώς και οι αντίστοιχες ακτίνες τους. β) Με ποιές γωνίες αναδύονται από το πρίσμα. γ) Ποιές είναι οι γωνίες εκτροπής τους. Δίνονται για $\lambda_{\text{Na}} = 589.2\text{nm}$: $n_o = 1.658$, $n_e = 1.486$ και η διαθλαστική γωνία του πρίσματος είναι: $\alpha = 60^0$.

ΛΥΣΗ

α) Με βάση την αρχή του Huygens κατά το χρονικό διάστημα που το σημείο Γ του μετώπου κύματος χρειάζεται να φθάσει το σημείο B, τότε ήδη από το σημείο A έχουν διαδοθεί στο εσωτερικό του πρίσματος δύο μέτωπα κύματος της τακτικής και της έκτακτης διαταραχής. Ο προσδιορισμός τους γίνεται αν τοποθετήσουμε στη θέση A τη σύνθετη επιφάνεια κύματος (επιφάνεια



(Σχ. 7.1)

ταχύτητας ακτίνας) (§ 5.4) με το οπτικό άξονα κάθετο στο σημείο αυτό (δηλ. στο επίπεδο της σελίδας). Τότε η προβολή των δύο επιφανειών θα είναι δύο ομόκεντροι κύκλοι με κέντρο το σημείο A. Αν τώρα από το σημείο

B φέρουμε τις δύο εφαπτόμενες, αυτές θ' αποτελούν τα μέτωπα κύματος της τακτικής και της έκτακτης διαταραχής στο εσωτερικό του πρίσματος.

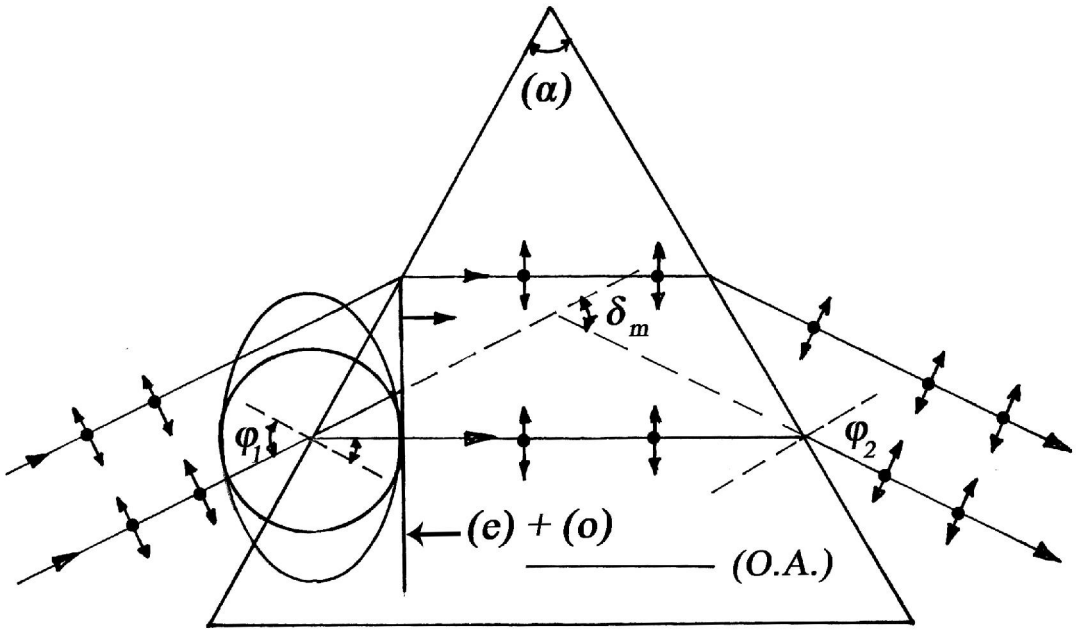
β) Κατόπιν με βάση το νόμο του Snell:
$\sin\phi_1 = n_0 \sin\phi'_{1o}$ άρα $\phi'_{1o} = \arcsin(\phi_1/n_o)$. Επίσης: $\sin\phi_1 = n_e \sin\phi'_{1e}$
άρα $\phi'_{1e} = \arcsin(\phi_1/n_e)$. Και για $\phi_1 = 50^0$, $n_o = 1.658$, $n_e = 1.486$:
$\phi'_{1o} = 27.51^0$ και $\phi'_{1e} = 31.03^0$.
Αλλά $\phi'_{1o} + \phi'_{2o} = \alpha \Rightarrow \phi'_{2o} = \alpha - \phi'_{1o} = 60^0 - 27.51^0 \Rightarrow \phi'_{2o} = 32.48^0$
όπως και: $\phi'_{1e} + \phi'_{2e} = \alpha \Rightarrow \phi'_{2e} = \alpha - \phi'_{1e} = 60^0 - 31.03^0 \Rightarrow \phi'_{2e} = 28.97^0$.
Τότε : $n_o \sin\phi'_{2o} = \sin\phi_{2o} \Rightarrow \phi_{2o} = \arcsin(n_o \sin\phi'_{2o}) \Rightarrow \phi_{2o} = 62.91^0$
Επίσης: $n_e \sin\phi'_{2e} = \sin\phi_{2e} \Rightarrow \phi_{2e} = \arcsin(n_e \sin\phi'_{2e}) \Rightarrow \phi_{2e} = 46.03^0$
γ) Θα έχουμε: $\delta_o = \phi_1 + \phi_{2o} - a$ με δ_o τη γωνία εκτροπής της τακτικής διαταραχής. Επομένως: $\delta_o = 50^0 + 62.91 - 60^0 \Rightarrow \delta_o = 52.91^0$.
Επίσης: $\delta_e = \phi_1 + \phi_{2e} - a$ με δ_e τη γωνία εκτροπής της έκτακτης διαταραχής. Επομένως: $\delta_e = 50^0 + 46.03^0 - 60^0 \Rightarrow \delta_e = 36.03^0$.

8) Με οπτικό υλικό το κρυσταλλικό $CaCO_3$ (Ασβεστίτη) κατασκευάζουμε ένα ορθό ισόπλευρο τριγωνικό πρίσμα με τον οπτικό του άξονα παράλληλο με μια από τις βάσεις του όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Επίπεδο μέτωπο κύματος φυσικού φωτός που προέρχεται από φασματική λυχνία Na προσπίπτει σε μια παράπλευρη έδρα του με γωνία ϕ_1. Ποια θα πρέπει να είναι η γωνία αυτή έτσι ώστε η τακτική και έκτακτη διαταραχή να μην διαχωρίζονται στο εσωτερικό του πρίσματος. Δίνονται για $\lambda_{\text{Na}} = 589.2\text{nm}$: $n_o = 1.658$, $n_e = 1.486$ και η διαθλαστική γωνία του πρίσματος $\alpha = 60^0$.

ΛΥΣΗ

Τακτική και έκτακτη διαταραχή προκειμένου να μην διαχωρίζονται στο εσωτερικό του πρίσματος, θα πρέπει να έχουν την ίδια ταχύτητα φάσης (ίδιο δείκτη διάθλασης). Το τελευταίο συμβαίνει όταν έχουμε διάδοση κατά μήκος του οπτικού άξονα του κρυστάλλου. Και επειδή ο Ο.Α. είναι παράλληλος με τη βάση του πρίσματος, το φως στο εσωτερικό του θα πρέπει να διαδίδεται παράλληλα μ' αυτήν. Επομένως θα ισχύει η συνθήκη ελάχιστης εκτροπής για την οποία: $n_o = n_e = 1.658$ (κατά μήκος του οπτικού άξονα). Όμως για τη συνθήκη ελάχιστης εκτροπής ισχύει η γνωστή σχέση:

$$n_o = \sin\left(\frac{a+\delta_m}{2}\right) \Big/ \sin\left(\frac{a}{2}\right)$$



(Σχ. 8.1)

από την οποία υπολογίζουμε τη γωνία ελάχιστης εκτροπής δ_m για $\alpha = 60^0$ και $n_o = 1.658$. Τελικά βρίσκουμε: $\delta_m \simeq 52^0$.

Αλλά $\delta = \phi_1 + \phi_2 - a$ και για $\delta = \delta_m \rightarrow \phi_1 = \phi_2 = \phi$. Άρα $\delta_m = 2\phi - a$ οπότε: $\phi = (\delta_m + a)/2$. Και μετά την αντικατάσταση: $\delta_m \simeq 52^0$, $\alpha = 60^0$ βρίσκουμε: $\phi = \phi_1 = \phi_2 \simeq 56^0$.

9) Ν' αποδειχθεί ότι η καταστατική εξίσωση (βλ. ΠΑΡ/ΜΑ 4-Η, (σχ. Η-5)): $\mathbf{D} = \{[\varepsilon] + i\varepsilon_0[G]\}\mathbf{E} = [\varepsilon]'\mathbf{E}$, είναι δυνατόν να εκφραστεί με τη μορφή: $\mathbf{E} = [\varepsilon]'^{-1}\mathbf{D} = \frac{1}{\varepsilon_0}[B]'\mathbf{D} = \frac{1}{\varepsilon_0}\{[B] - i[B][G][B]\}\mathbf{D}$ με την προϋπόθεση ότι τα στοιχεία του στροφικού πίνακα $\varepsilon_0^2[G]^2$ έχουν τιμές μικρές σε σχέση με αυτά του πίνακα $[\varepsilon]^2$.

ΛΥΣΗ

Θα έχουμε: $\mathbf{D}=\{[\varepsilon]+i\varepsilon_0[G]\}\mathbf{E}=[\varepsilon]'\mathbf{E}\Rightarrow\mathbf{E}=\{[\varepsilon]+i\varepsilon_0[G]\}^{-1}\mathbf{D}=[\varepsilon]'^{-1}\mathbf{D}$

$$[\varepsilon]'^{-1}=\{[\varepsilon]+i\varepsilon_0[G]\}^{-1}\ \Rightarrow\ [B]'\simeq[B]-i[B][G][B]$$

Πράγματι:

$$[\varepsilon]'^{-1}=\{[\varepsilon]+i\varepsilon_0[G]\}^{-1}=\{[\varepsilon]+i\varepsilon_0[G]\}^{-1}\{[\varepsilon]-i\varepsilon_0[G]\}^{-1}\{[\varepsilon]-i\varepsilon_0[G]\}$$

επειδή: $[\mathrm{X}][\mathrm{X}]^{-1}=[I]$. Άρα:

$$[\varepsilon]'^{-1}=\{\{[\varepsilon]-i\varepsilon_0[G]\}\{[\varepsilon]+i\varepsilon_0[G]\}\}^{-1}\{[\varepsilon]-i\varepsilon_0[G]\}$$

επειδή: $[\Psi]^{-1}[\mathrm{X}]^{-1}=[\mathrm{X}\Psi]^{-1}$. Επομένως:

$$[\varepsilon]'^{-1}=\left\{[\varepsilon]^2+\varepsilon_0^2[G]^2\right\}^{-1}\{[\varepsilon]-i\varepsilon_0[G]\}.$$ Και επειδή: $[\varepsilon]^2\gg[G]^2$

θα έχουμε: $[\varepsilon]'^{-1}\simeq[\varepsilon]^{-1}[\varepsilon]^{-1}\{[\varepsilon]-i\varepsilon_0[G]\}=[\varepsilon]^{-1}-i\varepsilon_0[\varepsilon]^{-1}[G][\varepsilon]^{-1}$

Αλλά: $[\varepsilon]^{-1}=\dfrac{1}{\varepsilon_0}\left[\dfrac{1}{n^2}\right]=\dfrac{1}{\varepsilon_0}[B]$ (ΠΑΡ/ΜΑ 4 Κεφ. Β (σχ. Β8)). Και πολλαπλασιάζοντας την $[\varepsilon]'^{-1}=[\varepsilon]^{-1}-i\varepsilon_0[\varepsilon]^{-1}[G][\varepsilon]^{-1}$ με ε_0 βρίσκουμε:

$$\varepsilon_0[\varepsilon]'^{-1}=\varepsilon_0[\varepsilon]^{-1}-i\varepsilon_0\varepsilon_0[\varepsilon]^{-1}[G][\varepsilon]^{-1}\ \Rightarrow\ [B]'=[B]-i[B][G][B]$$

10) Να εκφραστεί ένα ελλειπτικά πολωμένο φως στο σύστημα συντεταγμένων των αξόνων x',y' της έλλειψης (συναρτήσει της ε) καθώς και σ' ένα τυχαίο σ.σ. x,y όπου ο μεγάλος άξονας της έλλειψης x' σχηματίζει γωνία ψ με τον x.

ΛΥΣΗ

Ισχύουν οι σχέσεις (βλ. Άσκ.1-Λυμένη):

$$\tan 2\psi=\tan 2a\cos\phi \quad (1.20) \qquad (10.1)$$

$$\sin 2\varepsilon=\sin 2a\sin\phi \quad (1.23) \qquad (10.2)$$

όπου $-\pi/2 \le \psi < \pi/2$ και ψ είναι το αζιμούθιο το οποίο για το σ.σ. x', y' είναι: $\psi = 0$. Οπότε από τη (σχ.10.1) επειδή $\tan 2a \ne 0 \Rightarrow \cos\phi = 0 \Rightarrow \phi = 90^o$. Τότε από τη (σχ.10.2) $\sin 2\varepsilon = \sin 2a \Rightarrow \varepsilon = a$. Όπου ε με $-\pi/4 \le \varepsilon \le \pi/4$, η ελλειπτική γωνία της έλλειψης.

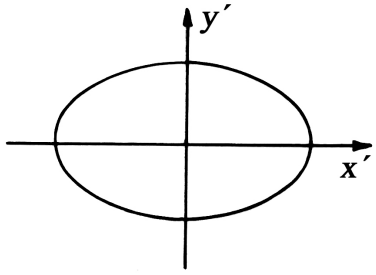
Επειδή όμως το διάνυσμα Jones του Ε.Π.Φ. είναι:

$$\begin{pmatrix} \cos a \\ \sin a e^{i\phi} \end{pmatrix} \tag{10.3}$$

όπου τώρα $a = \varepsilon$ και $\phi = \pi/2$, τότε η (σχ.10.3) γράφεται:

$$\begin{pmatrix} \cos a \\ \sin a e^{i\phi} \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \cos\varepsilon \\ i\sin\varepsilon \end{pmatrix} \tag{10.4}$$

που είναι η έκφραση του διανύσματος Jones του Ε.Π.Φ. στο σύστημα x', y' συναρτήσει της ελλειπτικής γωνίας ε.



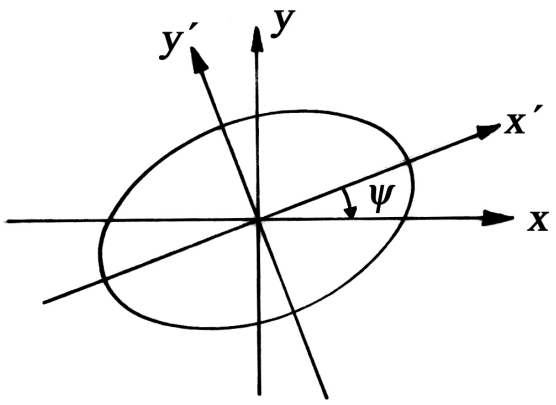
(Σχ. 10.1)

Έκφραση του $\begin{pmatrix} \cos\varepsilon \\ i\sin\varepsilon \end{pmatrix}$ ***σε σ.σ.*** x, y ***στραμμένο κατά γωνία*** ψ ***ως το σ.σ.*** x', y'

Θα πρέπει ουσιαστικά να εκφράσουμε το διάνυσμα $\begin{pmatrix} \cos\varepsilon \\ i\sin\varepsilon \end{pmatrix}$ από το σ.σ. x', y' στο στραμμένο κατά γωνία $-\psi$ σ.σ. x, y. Δηλ. θα είναι το διάνυσμα:

$$R(-\psi)\begin{pmatrix} \cos\varepsilon \\ i\sin\varepsilon \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\psi & -\sin\psi \\ \sin\psi & \cos\psi \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\varepsilon \\ i\sin\varepsilon \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\psi\cos\varepsilon - i\sin\psi\sin\varepsilon \\ \cos\psi\cos\varepsilon + i\cos\psi\sin\varepsilon \end{pmatrix} \tag{10.5}$$

Δηλ. το διάνυσμα Jones του Ε.Π.Φ. συναρτήσει του αζιμουθίου ψ και της ελλειπτικής γωνίας ε.



(Σχ. 10.2)

11) Ν' αποδειχθεί η (σχ. Η-74) του (ΠΑΡ/ΤΟΣ 4-Η) η οποία μας δίνει την αζιμουθιακή γωνία ψ, καθώς και η (σχ. Η-76) που μας δίνει την ελλειπτική γωνία ε μιας κατάστασης πόλωσης, με τη βοήθεια της (σχ. Η-72):

$$\chi = \frac{\tan\psi + i\tan\varepsilon}{1 - i\tan\psi\tan\varepsilon} \tag{11.1}$$

όπου χ η μιγαδική μεταβλητή πόλωσης μιας τυχαίας κατάστασης πόλωσης.

ΛΥΣΗ

Για να προσδιοριστούν τα ζητούμενα, θα πρέπει να υπολογίσουμε τα μεγέθη $\mathrm{Re}(\chi), \mathrm{Im}(\chi), |\chi|^2$. Δηλ. το πραγματικό , το φανταστικό και το τετράγωνο του μέτρου του μιγαδικού αριθμού:

$$\chi = \mathrm{Re}(\chi) + i\,\mathrm{Im}(\chi) \tag{11.2}$$

όπου: $|\chi| = \sqrt{\left[\mathrm{Re}(\chi)\right]^2 + \left[\mathrm{Im}(\chi)\right]^2}$. Κατόπιν σύγκρισης των (σχ. 11.1,2) βρίσκουμε:

$$\mathrm{Re}(\chi) = \frac{\tan\psi\left(1 - \tan^2\varepsilon\right)}{1 + \tan^2\psi\tan^2\varepsilon} \tag{11.3}$$

$$\mathrm{Im}(\chi) = \frac{\tan\varepsilon\left(1 + \tan^2\psi\right)}{1 + \tan^2\psi\tan^2\varepsilon} \tag{11.4}$$

$$|\chi|^2 = \frac{\tan^2\psi + \tan^2\varepsilon}{1+\tan^2\psi\tan^2\varepsilon} \tag{11.5}$$

Από την (σχ. 11.5) αμέσως βρίσκουμε:

$$\left(1-|\chi|^2\right) = \frac{\left(1-\tan^2\psi\right)\left(1-\tan^2\varepsilon\right)}{1+\tan^2\psi\tan^2\varepsilon} \tag{11.6}$$

$$\left(1+|\chi|^2\right) = \frac{\left(1+\tan^2\psi\right)\left(1+\tan^2\varepsilon\right)}{1+\tan^2\psi\tan^2\varepsilon} \tag{11.7}$$

Τότε: α) Η διαίρεση της (σχ. 11.3) με τη (σχ. 11.6) μας οδηγεί στην:

$$\tan 2\psi = \frac{2\,\mathrm{Re}(\chi)}{1-|\chi|^2} \rightarrow \quad \text{(σχ. Η-74, ΠΑΡ/ΜΑ 4-Η)}$$

β) Η διαίρεση της (σχ. 11.4) με τη (σχ. 11.7) μας οδηγεί στην:

$$\sin 2\varepsilon = \frac{2\,\mathrm{Im}(\chi)}{1+|\chi|^2} \rightarrow \quad \text{(σχ. Η-76, ΠΑΡ/ΜΑ 4-Η)}$$

όπου κατά τα γνωστά: $-\pi/2 \le \psi < \pi/2$ και $-\pi/4 \le \varepsilon \le \pi/4$.

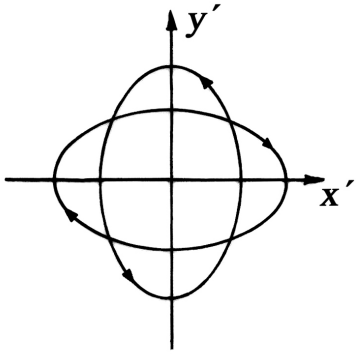
12) Να προσδιοριστεί το ***ορθοκανονικό (orthonormal)*** διάνυσμα, ενός κανονικοποιημένου διανύσματος Jones.

ΛΥΣΗ

Δύο διανύσματα Jones $\mathbf{E}_R$ και $\mathbf{E}_L$ ονομάζονται ορθοκανονικά, όταν μεταξύ τους ισχύουν οι σχέσεις:

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{E}_L^T\cdot\mathbf{E}_R^* &= \mathbf{E}_R^T\cdot\mathbf{E}_L^* = 0 \\ \mathbf{E}_L^T\cdot\mathbf{E}_L^* &= \mathbf{E}_R^T\cdot\mathbf{E}_R^* = 1 \end{aligned}\right\} \tag{12.1}$$

Π.χ. ορθοκανονικές είναι δύο ελλειπτικά πολωμένες καταστάσεις πόλωσης, των οποίων οι μεγάλοι άξονες είναι ορθογώνιοι, έχουν αντίθετη στροφικότητα και τα υπόλοιπα στοιχεία τους είναι τα ίδια (Σχ. 12.1).



(Σχ. 12.1)

Προκειμένου π.χ. να προσδιορίσουμε το ορθοκανονικό του διανύσματος Jones: $\mathbf{E}_R = \begin{pmatrix} \cos\varepsilon \\ i\sin\varepsilon \end{pmatrix}$ θα πρέπει κατ' αρχή να αλλάξουμε τη στροφικότητά του, Το τελευταίο επιτυγχάνεται αν αλλάξουμε το πρόσημο της γωνίας ε οπότε:

$$\mathbf{E}'_R = \begin{pmatrix} \cos\varepsilon \\ i\sin\varepsilon \end{pmatrix} \to [\varepsilon \to -\varepsilon] \to \begin{pmatrix} \cos\varepsilon \\ -i\sin\varepsilon \end{pmatrix} \tag{12.2}$$

Το διάνυσμα Jones: $\mathbf{E}'_R = \begin{pmatrix} \cos\varepsilon \\ -i\sin\varepsilon \end{pmatrix}$ παριστάνει ένα Ε.Π.Φ. του οποίου ο μεγάλος άξονας της έλλειψης είναι οριζόντιος (δηλ. κατά τη διεύθυνση x'), αλλά η στροφικότητά του τώρα είναι αριστερόστροφη σε σχέση πάντα με το φως που έρχεται προς τα εμάς.

Για να πάρουμε τελικά το ορθοκανονικό διάνυσμα του αρχικού $\mathbf{E}_R$, θα πρέπει ο μεγάλος άξονας του Ε.Π.Φ. $\begin{pmatrix} \cos\varepsilon \\ -i\sin\varepsilon \end{pmatrix}$, να πάρει τη διεύθυνση του άξονα y'. Δηλ. θα πρέπει για το τελευταίο να εκτελέσουμε μια στροφή του σ.σ. x', y' κατά γωνία $\theta = -90^o$. Τότε το ορθοκανονικό $\mathbf{E}_L$ του $\mathbf{E}_R$ θα είναι:

$$\mathbf{E}_L = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\varepsilon \\ -i\sin\varepsilon \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\varepsilon \\ -i\sin\varepsilon \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i\sin\varepsilon \\ \cos\varepsilon \end{pmatrix}$$

Και πολλαπλασιάζοντας τους δύο όρους του τελευταίου με $(-i)$ (δηλ. με μια σταθερή φάση για απλοποίηση) βρίσκουμε τελικά:

$$\mathbf{E}_L = \begin{pmatrix} \sin\varepsilon \\ -i\cos\varepsilon \end{pmatrix} \tag{12.3}$$

Τότε τα $\mathbf{E}_R$ και $\mathbf{E}_L$ πληρούν τις (σχ. 12.1). Πράγματι:

$$\mathbf{E}_L^T \cdot \mathbf{E}_R^* = \begin{pmatrix} \sin\varepsilon & -i\cos\varepsilon \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\varepsilon \\ -i\sin\varepsilon \end{pmatrix} = \sin\varepsilon\cos\varepsilon - \sin\varepsilon\cos\varepsilon = 0$$

$$\mathbf{E}_L^T \cdot \mathbf{E}_L^* = \begin{pmatrix} \sin\varepsilon & -i\cos\varepsilon \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sin\varepsilon \\ i\cos\varepsilon \end{pmatrix} = \sin^2\varepsilon + \cos^2\varepsilon = 1$$

Γενικά τα $\mathbf{E}_u, \mathbf{E}_\upsilon$ για να είναι δύο ορθοκανονικά διανύσματα βάσης, θα πρέπει να εκφράζονται με τη μορφή:

$$\mathbf{E}_u = \begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{E}_\upsilon = \begin{pmatrix} -n^* \\ m^* \end{pmatrix}, \qquad m^* m + n^* n = 1$$

Π.χ. 1) $\mathbf{E}_u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{E}_\upsilon = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

2)
$$\left.\begin{aligned} \mathbf{E}_u &= \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} = \mathbf{E}_R \Rightarrow \mathbf{E}_\upsilon = \begin{pmatrix} \dfrac{-(-i)}{\sqrt{2}} \\ \dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-i)\begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} = \mathbf{E}_L \end{aligned}\right\}$$

13) Να προσδιοριστούν οι ιδιοτιμές (και κατά προέκταση οι δ.δ.), καθώς και οι ιδιοκαταστάσεις (καταστάσεις πόλωσης) των πεδίων $\mathbf{D}$ (και κατά προέκταση του $\mathbf{E}$) για διάδοση του φωτός κατά μήκος του συστήματος των κυρίων αξόνων x_1, x_2, x_3 σε ένα εν γένει διάξονα διπλοθλαστικό κρύσταλλο.

ΛΥΣΗ

Γνωρίζουμε ότι η διάδοση του φωτός στο εσωτερικό ενός κρυστάλλου διέπεται από τις σχέσεις (ΠΑΡ/ΜΑ 4-Γ (σχ. Γ-3)):

$$k_1\left(\mathbf{k}\cdot\mathbf{E}\right)+\left(\omega^2\mu\varepsilon_1-k^2\right)E_1=0 \tag{13.1}$$

$$k_2\left(\mathbf{k}\cdot\mathbf{E}\right)+\left(\omega^2\mu\varepsilon_2-k^2\right)E_2=0 \tag{13.2}$$

$$k_3\left(\mathbf{k}\cdot\mathbf{E}\right)+\left(\omega^2\mu\varepsilon_3-k^2\right)E_3=0 \tag{13.3}$$

όπου E_1, E_2, E_3 οι συνιστώσες του ηλ. πεδίου ως προς το σ.σ. των κυρίων αξόνων x_1, x_2, x_3 και k_1, k_2, k_3 οι συνιστώσες της κυματοκαθέτου με:

$$k^2=k_1^2+k_2^2+k_3^2 \tag{13.4}$$

και

$$\mathbf{k}\cdot\mathbf{E}=k_1E_1+k_2E_2+k_3E_3 \tag{13.5}$$

Αν οι δύο τελευταίες σχέσεις αντικατασταθούν στις τρεις πρώτες τότε θα έχουμε:

$$\left(\omega^2\mu\varepsilon_1-k_2^2-k_3^2\right)E_1+k_1k_2E_2+k_1k_3E_3=0 \tag{13.6}$$

$$k_1k_2E_1+\left(\omega^2\mu\varepsilon_2-k_1^2-k_3^2\right)E_2+k_2k_3E_3=0 \tag{13.7}$$

$$k_1k_3E_1+k_2k_3E_2+\left(\omega^2\mu\varepsilon_3-k_1^2-k_2^2\right)E_3=0 \tag{13.8}$$

ή επειδή:

$$\omega^2\mu\varepsilon_i=\omega^2\mu\varepsilon_o n_i^2=\left(\frac{\omega}{c}n_i\right)^2 \quad i=1,2,3 \tag{13.9}$$

όπου: $n_i \quad i=1,2,3$ οι κύριοι δ.δ. θα έχουμε:

$$\left[\left(\frac{\omega}{c}n_1\right)^2-k_2^2-k_3^2\right]E_1+k_1k_2E_2+k_1k_3E_3=0 \tag{13.10}$$

$$k_1k_2E_1+\left[\left(\frac{\omega}{c}n_2\right)^2-k_1^2-k_3^2\right]E_2+k_2k_3E_3=0 \tag{13.11}$$

$$k_1k_3E_1+k_2k_3E_2+\left[\left(\frac{\omega}{c}n_3\right)^2-k_1^2-k_2^2\right]E_3=0 \tag{13.12}$$

Διάδοση κατά τη διεύθυνση του άξονα x_3

Γνωρίζουμε ότι μεταξύ της κυματοκαθέτου $\mathbf{k}$ και του μοναδιαίου διανύσματος $\mathbf{l}$ στη διεύθυνσή της ισχύει η σχέση:

$$\mathbf{k} = \frac{\omega}{c} n\mathbf{l} \tag{13.13}$$

όπου l_1, l_2, l_3 τα συνημίτονα κατεύθυνσης του $\mathbf{l}$ με $l_1^2 + l_2^2 + l_3^2 = 1$. Οπότε για διεύθυνση διάδοσης κατά τον x_3 θα έχουμε: $(l_1, l_2, l_3) = (0,0,1)$

Οπότε: $$k_1 = k_2 = 0 \quad \text{και} \quad k_3 = \frac{\omega}{c} n l_3 \tag{13.14}$$

Προκειμένου τώρα το σύστημα των εξισώσεων των (σχ. 13.10,11,12) να μην έχει τετριμμένες λύσεις θα πρέπει:

$$\begin{vmatrix} \left(\frac{\omega}{c} n_1\right)^2 - k_2^2 - k_3^2 & k_1 k_2 & k_1 k_3 \\ k_1 k_2 & \left(\frac{\omega}{c} n_2\right)^2 - k_1^2 - k_3^2 & k_2 k_3 \\ k_1 k_3 & k_2 k_3 & \left(\frac{\omega}{c} n_3\right)^2 - k_1^2 - k_2^2 \end{vmatrix} = 0 \tag{13.15}$$

και η οποία μετά την αντικατάσταση των (σχ. 13.14) και την απλοποίηση, θα πάρει τη μορφή:

$$\begin{vmatrix} n_1^2 - n^2 & 0 & 0 \\ 0 & n_2^2 - n^2 & 0 \\ 0 & 0 & n_3^2 \end{vmatrix} = 0 \tag{13.16}$$

Από την τελευταία σχέση βρίσκουμε:

$$n_3^2 \left(n_1^2 - n^2\right)\left(n_2^2 - n^2\right) = 0 \tag{13.17}$$

Οπότε επειδή: $n_3 \neq 0$ θα έχουμε:

$$\left.\begin{array}{l} n_1^2 - n^2 = 0 \;\Rightarrow\; n = n' = n_1 \\ n_2^2 - n^2 = 0 \;\Rightarrow\; n = n'' = n_2 \end{array}\right\} \qquad (13.18)$$

όπου: $\frac{1}{n^2} = \frac{1}{n'^2} = \frac{1}{n_1^2}$, $\frac{1}{n^2} = \frac{1}{n''^2} = \frac{1}{n_2^2}$ οι ιδιοτιμές και $n = n' = n_1$, $n = n'' = n_2$ οι δ.δ.

των δύο εν γένει διαδιδόμενων στο εσωτερικό του κρυστάλλου γραμμικά πολωμένων μετώπων κύματος, με την κυματοκάθετη κατά τη διεύθυνση του κυρίου άξονα x_3.

Προσδιορισμός των ιδιοκαταστάσεων (των καταστάσεων πόλωσης) των πεδίων $\mathbf{D}_1, \mathbf{D}_2$ και κατά προέκταση των αντιστοίχων $\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2$

Εφόσον ο κρύσταλλος δεν είναι οπτικά ενεργός, τότε οι ιδιοκαταστάσεις $\mathbf{D}_1, \mathbf{D}_2$ οι οποίες αντιστοιχούν στους δ.δ. $n' = n_1$ και $n'' = n_2$, θα είναι γραμμικά πολωμένα μέτωπα κύματος. Κατ' αρχή έχουμε τη δυνατότητα να προσδιορίσουμε τις διευθύνσεις των ηλ. πεδίων $\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2$ που αντιστοιχούν στις ιδιοκαταστάσεις $\mathbf{D}_1, \mathbf{D}_2$.

Υπολογισμός του $\mathbf{E}_1$ ***για*** $n = n' = n_1$

Για $n = n' = n_1$ και $k_1 = k_2 = 0$, $k_3 = \frac{\omega}{c} n = \frac{\omega}{c} n_1$ από τη (σχ. 13.11) βρίσκουμε μετά τις απλοποιήσεις: $\left(n_2^2 - n_1^2\right) E_2 = 0$ και επειδή $n_1 \neq n_2$ θα είναι:

$$E_2 = 0 \qquad (13.19)$$

Επίσης από τη (σχ. 13.12) βρίσκουμε: $n_3^2 E_3 = 0$ και επειδή $n_3 \neq 0$ θα έχουμε:

$$E_3 = 0 \qquad (13.20)$$

Επομένως λόγω της ισχύος των (σχ. 13.19,20) τελικά θα είναι:

$$E_1 \neq 0 \qquad (13.21)$$

Επομένως το πεδίο $\mathbf{E}_1$ που αντιστοιχεί στο δ.δ. $n = n' = n_1$, είναι ένα γραμμικά πολωμένο μέτωπο κύματος το οποίο ταλαντεύεται παράλληλα με τον άξονα x_1 και διαδίδεται κατά μήκος του άξονα x_3.

Υπολογισμός του $\mathbf{E}_2$ ***για*** $n = n'' = n_2$

Για $n = n'' = n_2$ και $k_1 = k_2 = 0$, $k_3 = \frac{\omega}{c} n = \frac{\omega}{c} n'' = \frac{\omega}{c} n_2$ από τη (σχ. 13.10) βρίσκουμε μετά τις απλοποιήσεις: $\left(n_1^2 - n_2^2\right) E_1 = 0$ και επειδή $n_1 \neq n_2$ θα είναι:

$$E_1 = 0 \tag{13.22}$$

Επίσης από τη (σχ. 13.12) βρίσκουμε: $n_3^2 E_3 = 0$ και επειδή $n_3 \neq 0$ θα έχουμε:

$$E_3 = 0 \tag{13.23}$$

Επομένως λόγω της ισχύος των (σχ. 13.22,23) τελικά θα είναι:

$$E_2 \neq 0 \tag{13.24}$$

Επομένως το πεδίο $\mathbf{E}_2$ που αντιστοιχεί στο δ.δ. $n = n'' = n_2$, είναι ένα γραμμικά πολωμένο μέτωπο κύματος το οποίο ταλαντεύεται παράλληλα με τον άξονα x_2 και διαδίδεται κατά μήκος του άξονα x_3.

Γνωρίζουμε όμως (ΠΑΡ/ΜΑ 4-Α (σχ. Α-6)), ότι όταν αναφερόμαστε στους κύριους άξονες x_1, x_2, x_3 τότε ο πίνακας των στοιχείων του τανυστή της ηλ. διαπερατότητας είναι διαγώνιος οπότε ισχύουν οι σχέσεις:

$$D_1 = \varepsilon_1 E_1 \quad , \quad D_2 = \varepsilon_2 E_2 \quad , \quad D_3 = \varepsilon_3 E_3 \tag{13.25}$$

Δηλ. τα διανύσματα $\mathbf{D}, \mathbf{E}$ είναι συγγραμμικά. Επομένως η ιδιοκατάσταση $\mathbf{D}_1$ που αντιστοιχεί στο δ.δ. $n = n' = n_1$ είναι ένα γραμμικά πολωμένο μέτωπο κύματος το οποίο πάλλεται παράλληλα προς τον x_1 και διαδίδεται κατά τον άξονα x_3. Με τον ίδιο τρόπο η η ιδιοκατάσταση $\mathbf{D}_2$ που αντιστοιχεί στο δ.δ. $n = n'' = n_2$ είναι ένα γραμμικά πολωμένο μέτωπο κύματος το οποίο πάλλεται παράλληλα προς τον x_2 και διαδίδεται κατά τον άξονα x_3.

Βλέπουμε τελικά ότι σε ένα διάξονα διπλοθλαστικό κρύσταλλο με κύριους δ.δ. $n_1 \neq n_2 \neq n_3$ για διεύθυνση διάδοσης κατά τον άξονα x_3 (διεύθυνση της κυματοκαθέτου $\mathbf{k}$) έχουν τη δυνατότητα να διαδοθούν εν γένει δύο ιδιοκαταστάσεις δηλ. τα επίπεδα και γραμμικά πολωμένα μέτωπα κύματος τα οποία περιγράψαμε μόλις προηγουμένως. Επίσης έχουν τη δυνατότητα διάδοσης η κάθε μια από αυτές ξεχωριστά.

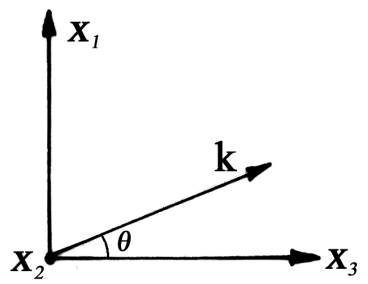
Τέλος θα πρέπει ν' αναφέρουμε ότι ο υπολογισμός των ιδιοτιμών και των ιδιοκαταστάσεων για διάδοση σε διάξονες εν γένει κρυστάλλους κατά τους άξονες x_2 ή του x_1, ακολουθούν παρόμοιες διαδικασίες όπως και για την περίπτωση της διάδοσης κατά τον x_3.

14) Να προσδιοριστούν οι ιδιοτιμές (και κατά προέκταση οι δ.δ.), καθώς και οι ιδιοκαταστάσεις (καταστάσεις πόλωσης) για διάδοση του φωτός στο επίπεδο x_1, x_3 των κυρίων αξόνων ενός διάξονα εν γένει διπλοθλαστικού κρυστάλλου. Η διεύθυνση της κυματοκαθέτου $\mathbf{k}$ σχηματίζει γωνία θ με τον άξονα x_3.

ΛΥΣΗ

Τα συνημίτονα κατεύθυνσης αυτής της κυματοκαθέτου (Σχ. 14.1) θα δίνονται από τις εξής σχέσεις:

$$l_1 = \sin\theta \quad , \quad l_2 = 0 \quad , \quad l_3 = \cos\theta \tag{14.1}$$



(Σχ. 14.1)

και κατά προέκταση, επειδή κατά τα γνωστά ισχύει η σχέση $\mathbf{k} = \frac{\omega}{c} n \mathbf{l}$ θα έχουμε:

$$k_1 = \frac{\omega}{c} n \sin\theta \quad , \quad k_2 = 0 \quad , \quad k_3 = \frac{\omega}{c} n \cos\theta \tag{14.2}$$

Προσδιορισμός των ιδιοτιμών και των δ.δ.

Προκειμένου να υπολογίσουμε για τη διεύθυνση της $\mathbf{k}$ τις ιδιοτιμές $\frac{1}{n^2} = \frac{1}{n'(\theta)^2}$, $\frac{1}{n^2} = \frac{1}{n''(\theta)^2}$ και κατά προέκταση του δ.δ. $n = n'(\theta)$ και $n = n''(\theta)$ των

επιτρεπόμενων να διαδοθούν στον κρύσταλλο ιδιοκαταστάσεων, θα πρέπει ν' αντικαταστήσουμε τις (σχ. 14.2) στη (σχ. 13.15) της (Άσκ. 13). Τότε θα έχουμε και μετά την απαλοιφή των όρων $(\omega/c)^2 \neq 0$:

$$\begin{vmatrix} n_1^2 - n^2\cos^2\theta & 0 & n^2\sin\theta\cos\theta \\ 0 & n_2^2 - n^2 & 0 \\ n^2\sin\theta\cos\theta & 0 & n_3^2 - n^2\sin^2\theta \end{vmatrix} = 0 \tag{14.3}$$

Και μετά την εκτέλεση των πράξεων στην ορίζουσα βρίσκουμε:

$$\left(\frac{n_2^2}{n^2} - 1\right)\left[\frac{n_1^2 n_3^2}{n^2} - \left(n_1^2\sin^2\theta + n_3^2\cos^2\theta\right)\right]\frac{1}{n^2} = 0 \tag{14.4}$$

Επομένως οι δύο ιδιοτιμές (καθώς και οι αντίστοιχοι δ.δ.) θα δίνονται από τις σχέσεις:

α) $$\frac{n_2^2}{n^2} - 1 = 0 \;\Rightarrow\; \frac{1}{n^2} = \frac{1}{n'(\theta)^2} = \frac{1}{n_2^2} \;\Rightarrow\; n = n'(\theta) = n_2 \tag{14.5}$$

β) $$\frac{n_1^2 n_3^2}{n^2} - \left(n_1^2\sin^2\theta + n_3^2\cos^2\theta\right) = 0 \;\Rightarrow\; \frac{1}{n^2} = \frac{1}{n''(\theta)^2} = \frac{\cos^2\theta}{n_1^2} + \frac{\sin^2\theta}{n_3^2} \;\Rightarrow$$

$$n = n''(\theta) = \frac{1}{\sqrt{\dfrac{\cos^2\theta}{n_1^2} + \dfrac{\sin^2\theta}{n_3^2}}} \tag{14.6}$$

Προσδιορισμός των ιδιοκαταστάσεων

α) Για $n = n' = n_2$ οι (σχ. 13.10,11,12) της (Άσκ. 13) θα μας δώσουν:

$$\left(n_1^2 - n_2^2\cos^2\theta\right)E_1 + n_2^2\sin\theta\cos\theta E_3 = 0 \tag{14.7}$$

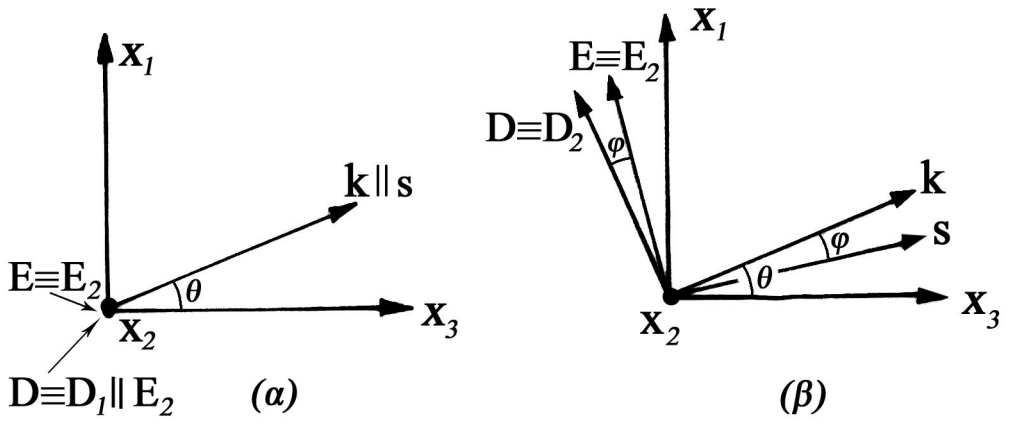
$$\left(n_2^2 - n_2^2\right)E_2 = 0 \tag{14.8}$$

$$n_2^2\sin\theta\cos\theta E_1 + \left(n_3^2 - n_2^2\sin^2\theta\right)E_3 = 0 \tag{14.9}$$

από τις οποίες βρίσκουμε για $n_1 \neq n_2 \neq n_3$ και $\theta \neq 0$, $\pi/2$:

$$E_3 = E_1 = 0, \qquad E_2 \neq 0 \tag{14.10}$$

Δηλ. το ηλ. πεδίο **E** που αντιστοιχεί στην επιδιωκόμενη να υπολογίσουμε ιδιοκατάσταση **D** για $n = n' = n_2$, πάλλετε παράλληλα με τον άξονα x_2 διαδιδόμενο κατά τη διεύθυνση της **k**, η οποία σχηματίζει στην προκειμένη περίπτωση γωνία θ με τον άξονα x_3 (Σχ. 14.2α).



(Σχ. 14.2)

Επειδή όμως το προαναφερόμενο **E** είναι κατά τη διεύθυνση του x_2 – που είναι κύριος άξονας – τότε με βάση τις (σχ. Α-6) (ΠΑΡ/ΜΑ 4-Α) θα έχουμε με: $D_2 = \varepsilon_2 E_2$. Άρα το αντίστοιχο **D** θα είναι συγγραμμικό με το **E**. Για την ιδιοκατάσταση λοιπόν $\mathbf{D} \equiv \mathbf{D}_1$ που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή για την οποία $n = n' = n_2$ θα ισχύει: $\mathbf{D}_1 \parallel \mathbf{E} \equiv \mathbf{E}_2$. Επειδή βέβαια όπως βλέπουμε από τη (σχ. 14.5): $\frac{1}{n^2} = \frac{1}{n'(\theta)^2} = \frac{1}{n_2^2} \Rightarrow n = n'(\theta) = n_2$, αυτή η ιδιοτιμή μας δίνει δ.δ. που είναι ανεξάρτητος της γωνίας θ για οποιαδήποτε διεύθυνση της κυματοκαθέτου **k**. Τότε και οι αντίστοιχες ιδιοκαταστάσεις θα είναι γραμμικά πολωμένα μέτωπα κύματος, που θα πάλλονται πάντοτε παράλληλα προς τη διεύθυνση του άξονα x_2 και θα διαδίδονται κατά την **k**.

β) Για $\frac{1}{n^2} = \frac{1}{n''(\theta)^2} = \frac{\cos^2\theta}{n_1^2} + \frac{\sin^2\theta}{n_3^2}$ (σχ. 14.6), από τη (σχ. 13.10) (Άσκ. 13) και με τη βοήθεια τις (σχ. 14.2) βρίσκουμε:

$$n_1^2 E_1 - n^2\cos^2\theta E_1 + n^2 \sin\theta\cos\theta E_3 = 0 \Rightarrow n^2\left(\sin\theta\cos\theta E_3 - \cos^2\theta E_1\right) + n_1^2 E_1 = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{1}{n^2} = \frac{\cos^2\theta E_1 - \sin\theta\cos\theta E_3}{n_1^2 E_1} \tag{14.11}$$

Και σε συνδυασμό με τη (σχ. 14.6) που αφορά τη δεύτερη ιδιοτιμή εκ των δύο, μετά τις πράξεις βρίσκουμε:

$$\frac{n_3^2}{n_1^2}\frac{E_3}{E_1} = -\tan\theta \tag{14.12}$$

Επίσης από τη (σχ. 13.11) για $k_2 = 0$ και $k_1 = \left(\frac{n\omega}{c}\right)l_1,\ k_3 = \left(\frac{n\omega}{c}\right)l_3$

με $l_1 = \sin\theta,\ l_3 = \cos\theta$ θα έχουμε:

$\left(n_2^2 - n^2\sin^2\theta - n^2\cos^2\theta\right)E_2 = 0 \Rightarrow \left(n_2^2 - n^2\right)E_2 = 0$ και επειδή: $n^2 = \dfrac{1}{\dfrac{\cos^2\theta}{n_1^2} + \dfrac{\sin^2\theta}{n_3^2}}$

για $\theta \neq 0^0, 90^0 \Rightarrow \left(n_2^2 - n^2\right) \neq 0$.

Επομένως $E_2 = 0$. Επίσης επειδή $D_2 = \varepsilon_2 E_2 \Rightarrow D_2 = 0$. Δηλ. η συνιστώσα D_2 της ιδιοκατάστασης $\mathbf{D}_2$ είναι μηδενική όπως και η συνιστώσα E_2 του συνοδεύοντος ηλ. πεδίου. Άρα αμφότερες θα βρίσκονται στο επίπεδο x_1, x_3.

Επειδή όμως αναφερόμενοι στο σ.σ. των κυρίων αξόνων x_1, x_2, x_3 θα ισχύουν και οι γνωστές σχέσεις: $D_1 = \varepsilon_1 E_1$, $D_2 = \varepsilon_2 E_2$, $D_3 = \varepsilon_3 E_3$ από αυτές θα έχουμε:

$$D_1 = \varepsilon_o n_1^2 E_1 \ ,\ D_2 = \varepsilon_o n_2^2 E_2 \ ,\ D_3 = \varepsilon_o n_3^2 E_3 \tag{14.13}$$

Αν από τις παραπάνω σχέσεις αντικαταστήσουμε τα E_1, E_3 στη (σχ. 14.12) βρίσκουμε:

$$\frac{D_3}{D_1} = -\tan\theta \tag{14.14}$$

Από την τελευταία σχέση διαπιστώνουμε ότι η ιδιοκατάσταση $\mathbf{D} \equiv \mathbf{D}_2$ που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή που προκύπτει από τη (σχ. 14.6), είναι ένα διάνυσμα κάθετο στην κυματοκάθετη $\mathbf{k}$ και που βρίσκεται στο επίπεδο x_1, x_3 (Σχ. 14.2β). Το αντίστοιχο όμως πεδίο $\mathbf{E} \equiv \mathbf{E}_2$, παρά το ότι βρίσκεται στο ίδιο επίπεδο με το $\mathbf{D} \equiv \mathbf{D}_2$, λόγω της (σχ. 14.12) δεν είναι κάθετο στην $\mathbf{k}$ αλλά στο διάνυσμα Poynting $\mathbf{S}$ το οποίο κατά τα γνωστά (βλ. ΠΑΡ/ΜΑ 4-Ε) σχηματίζει με την $\mathbf{k}$ γωνία ϕ εκτός των

περιπτώσεων για πού η γωνία $\theta = 0$ ή $\pi/2$ (δηλ. για διεύθυνση της $\mathbf{k}$ κατά τον άξονα x_3 ή x_1 αντίστοιχα).

Τελικά μπορούμε να συμπεράνουμε ότι: Σε ένα εν γένει διάξονα κρύσταλλο και για διάδοση πάνω στο επίπεδο x_1, x_3 με τη διεύθυνση της κυματοκαθέτου $\mathbf{k}$ να σχηματίζει γωνία θ με τον άξονα x_3, διαδίδονται γενικά δύο γραμμικά πολωμένες ιδιοκαταστάσεις $\mathbf{D}_1, \mathbf{D}_2$ κάθετες προς την $\mathbf{k}$. Η ιδιοτιμή $\frac{1}{n^2} = \frac{1}{n'^2} = \frac{1}{n_2^2}$ (σχ. 14.5) της $\mathbf{D}_1$, είναι ανεξάρτητη της γωνίας θ και η διεύθυνση της $\mathbf{D}_1$ είναι πάντοτε κατά τον άξονα x_2 (Σχ. 14.2α) και είναι κάθετη στην $\mathbf{k}$. Η ιδιοτιμή όμως $\frac{1}{n^2} = \frac{1}{n''(\theta)^2} = \frac{\cos^2\theta}{n_1^2} + \frac{\sin^2\theta}{n_3^2}$ που δίνεται από τη (σχ. 14.6) εξαρτάται από τη γωνία θ. Το ίδιο και η αντίστοιχη ιδιοκατάσταση $\mathbf{D}_2$, η οποία βρίσκεται στο επίπεδο x_1, x_3 και είναι κάθετη στην $\mathbf{k}$ καθώς και στην $\mathbf{D}_1$ δηλ. $\mathbf{D}_2 \perp \mathbf{D}_1$. Στην περίπτωση αυτή όμως τα $\mathbf{D}_2, \mathbf{E}_2$ δεν είναι παράλληλα, αλλά σχηματίζουν μεταξύ τους γωνία ϕ (σχ. 14.12,14).

15) Θεωρούμε ένα μονοάξονα κρύσταλλο με κύριους δ.δ. n_o, n_e. Γνωρίζουμε ότι για μια διεύθυνση της κυματοκαθέτου $\mathbf{k}$ στο εσωτερικό του κρυστάλλου, διαδίδονται δύο εν γένει ιδιοκαταστάσεις. Η $\mathbf{D}_o$ (τακτική) και η $\mathbf{D}_e$ (έκτακτη). Υποθέτουμε ότι η $\mathbf{k}$ σχηματίζει με τον κύριο άξονα x_3 (που θεωρούμε ότι είναι ο οπτικός άξονας του κρυστάλλου), γωνία θ και βρίσκεται στο επίπεδο x_1, x_3. Να υπολογιστεί για την έκτακτη ιδιοκατάσταση $\mathbf{D}_e$ η γωνία ϕ μεταξύ των $\mathbf{D}_e$ και $\mathbf{E}_e$ που είναι η γωνία μεταξύ της κυματοκαθέτου $\mathbf{k}$ και του διανύσματος Poynting $\mathbf{S}$ (διεύθυνση ακτίνας) καθέτου στο διάνυσμα $\mathbf{E}_e$.

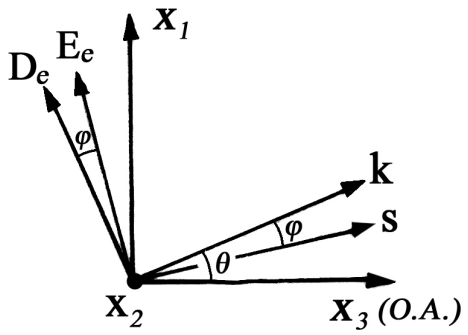
ΛΥΣΗ

Με βάση τα αποτελέσματα της (Άσκ. 14) εάν $n_1 = n_2 = n_o$ και $n_3 = n_e$, τότε στο μονοάξονα πλέον κρύσταλλο διαδίδονται και πάλι δύο ιδιοκαταστάσεις. Η $\mathbf{D}_1 \equiv \mathbf{D}_o$ και η $\mathbf{D}_2 \equiv \mathbf{D}_e$ των οποίων οι ιδιοτιμές όπως προκύπτει από τους υπολογισμούς, είναι η τακτική: $\frac{1}{n^2} = \frac{1}{n'^2} = \frac{1}{n_2^2} = \frac{1}{n_o^2}$ (σχ. 14.5) καθώς και η έκτακτη: $\frac{1}{n^2} = \frac{1}{n''(\theta)^2} = \frac{\cos^2\theta}{n_1^2} + \frac{\sin^2\theta}{n_3^2} = \frac{\cos^2\theta}{n_o^2} + \frac{\sin^2\theta}{n_e^2}$ (σχ. 14.6). Για την ιδιοκατάσταση

$\mathbf{D}_2 \equiv \mathbf{D}_e$ αποδείχθηκε ότι ισχύουν οι (σχ. 14.12,14) οι οποίες για $n_1 = n_2 = n_o$ και $n_3 = n_e$ μας δίνουν:

$$\frac{D_{e3}}{D_{e1}} = \frac{n_3^2}{n_1^2}\frac{E_{e3}}{E_{e1}} = \frac{n_e^2}{n_o^2}\frac{E_{e3}}{E_{e1}} = -\tan\theta \tag{15.1}$$

όπου κατά τα γνωστά θ είναι η γωνία μεταξύ της $\mathbf{k}$ και του οπτικού άξονα x_3. Γνωρίζουμε επίσης ότι τα διανύσματα $\mathbf{D}_e$ και $\mathbf{E}_e$ δεν είναι συγγραμμικά αλλά σχηματίζουν μεταξύ τους γωνία ϕ (Σχ. 15.1) την οποία καλούμαστε να υπολογίσουμε.



(Σχ.15.1)

Επειδή η γωνία ϕ μεταξύ των $\mathbf{D}_e$ και $\mathbf{E}_e$, είναι η γωνία μεταξύ της κυματοκαθέτου $\mathbf{k}$ και του διανύσματος Poynting $\mathbf{S}$ (διεύθυνση ακτίνας) καθέτου στο διάνυσμα $\mathbf{E}_e$, τότε μπορούμε να την υπολογίσουμε μέσω της σχέσης:

$$\cos\phi = \frac{\mathbf{E}_e \cdot \mathbf{D}_e}{|\mathbf{E}_e||\mathbf{D}_e|} = \frac{E_{e1}D_{e1} + E_{e3}D_{e3}}{\sqrt{\left(E_{e1}^2 + E_{e3}^2\right)}\sqrt{\left(D_{e1}^2 + D_{e3}^2\right)}} \tag{15.2}$$

επειδή $E_{e2} = D_{e2} = 0$ (διάδοση στο επίπεδο x_1, x_3). Αντικαθιστώντας τη (σχ. 15.1) στη (σχ. 15.2) βρίσκουμε:

$$\cos\phi = \frac{n_e^2 + n_o^2\tan^2\theta}{\sqrt{n_e^4 + n_o^4\tan^2\theta}}\cos\theta \tag{15.3}$$

Η τελευταία μετά την εκτέλεση των πράξεων μας δίνει:

$$\tan\phi = \frac{1}{2}\left(\frac{\cos^2\theta}{n_o^2} + \frac{\sin^2\theta}{n_e^2}\right)^{-1}\left(\frac{1}{n_e^2} - \frac{1}{n_o^2}\right)\sin 2\theta \qquad (15.4)$$

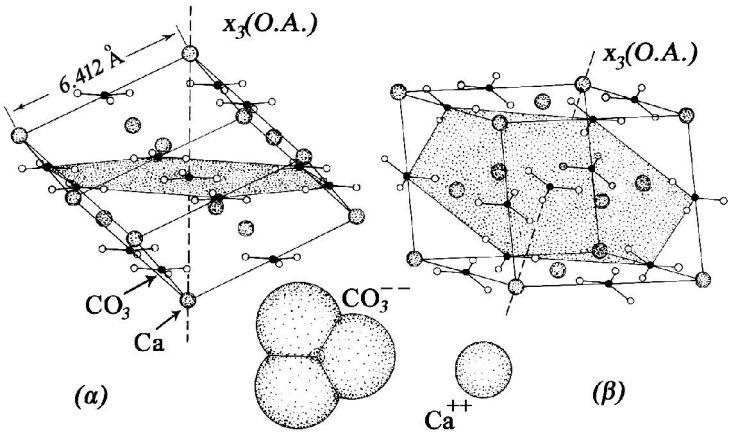
Αντλούμε ένα παράδειγμα από δύο πολύ γνωστούς κρυστάλλους που χρησιμοποιούνται σαν ηλεκτροοπτικοί διαμορφωτές. Τον KDP και το $LiNbO_3$. Για τον KDP με $\lambda = 632.8\text{nm}$, $n_o = 1.50737$, $n_e = 1.46685$ και $\theta = 45^o$ βρίσκουμε $\phi \simeq 1.56^o$. Επίσης για τον κρύσταλλο $LiNbO_3$ με $\lambda = 632.8\,\text{nm}$, $n_o = 2.286$, $n_e = 2.200$ και $\theta = 45^o$ βρίσκουμε $\phi \simeq 2.1949^o$. Βλέπουμε δηλ. ότι η διεύθυνση της διάδοσης του μετώπου κύματος (της $\mathbf{k}$) και της διεύθυνσης της διάδοσης της ενέργειας (του διανύσματος Poynting) σχηματίζουν μεταξύ τους γωνίες που είναι τυπικά πολύ μικρές (μεταξύ $1^o - 2.5^o$). Επίσης επιβεβαιώνουμε με τη βοήθεια της (σχ. 15.4) ότι για $\theta = 0^o$ ή 90° (δηλ. για διάδοση κατά τη διεύθυνση του οπτικού άξονα (άξονας x_3) ή κάθετα σ' αυτόν (άξονας x_1)) θα έχουμε $\phi = 0$. Δηλ. τα $\mathbf{k}$ και $\mathbf{S}$ έχουν την ίδια διεύθυνση.

16) Να μελετηθεί η διάδοση ενός επιπέδου μετώπου κύματος φυσικού φωτός το οποίο προσπίπτει κάθετα σε μια φυσική έδρα της Ισλανδικής κρυστάλλου και παράλληλα ταυτόχρονα με μια από τις κύριες τομές της. Το φως προέρχεται από φασματική λυχνία Na.

ΛΥΣΗ

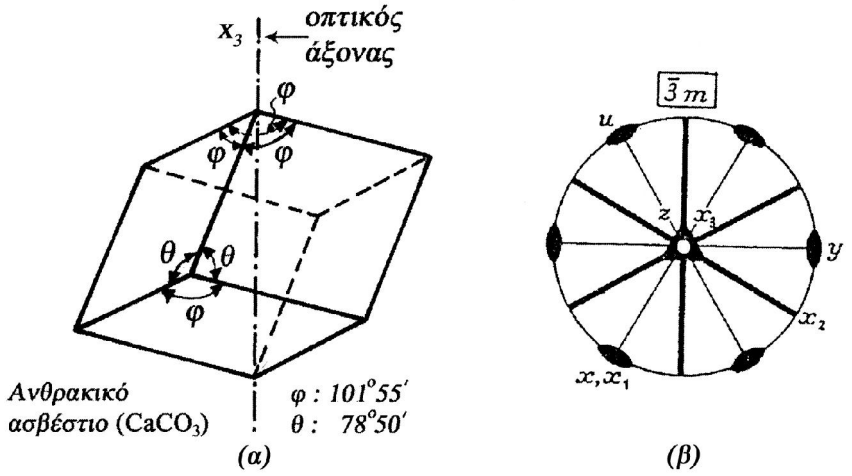
Γνωρίζουμε (§ 5.3) ότι η Ισλανδική κρύσταλλος με το κοινό όνομα Ασβεστίτης, είναι η σχισμογενής μορφή του κρυστάλλου του Ανθρακικού ασβεστίου (Calcite) ($CaCO_3$), ο οποίος ανήκει στο τριγωνικό σύστημα, στην τάξη συμμετρίας $\left(\bar{3}\text{m}\right)$ (Σχ. 16.2β). Η διάταξη των ατόμων του $CaCO_3$ στον χώρο γίνεται εμφανής στα (Σχ. 16.1). Η δομή του (Σχ.16.1α) – μορφής πλαγίου παραλληλεπιπέδου – με ίσες ακμές μήκους a=6.412Å , συνίσταται από ιόντα Ca^{++} και ρίζες CO_3^{--}. Η κάθε ρίζα CO_3^{--} συνίσταται από ένα άτομο C στο κέντρο, που περιβάλετε από τρία άτομα O σε συμμετρικές θέσεις και όλα μαζί βρίσκονται στο ίδιο επίπεδο. Τα ιόντα του Ca^{++} καθώς και οι ρίζες CO_3^{--} κατέχουν στον κρύσταλλο διαδοχικά επάλληλα παράλληλα επίπεδα. Επειδή είναι παράλληλα προς οποιαδήποτε έδρα της κυψελίδας, οι δυνάμεις συνοχής μεταξύ των ατόμων είναι μικρές οπότε προκύπτει εύκολα σχισμός. Αυτός είναι ο λόγος για τον οποίο μακροσκοπικά η Ισλανδική κρύσταλλος μπορεί να εμφανιστεί στη σχισμογενή της μορφή. Δηλ. τα γεωμετρικά της χαρα-

κτηριστικά ακολουθούν αυτά της στοιχειώδους κυψελίδας της και φαίνονται στο (Σχ. 16.2α).



(Σχ. 16.1)

Πρόκειται δηλ. και εδώ για ένα πλάγιο παραλληλεπίπεδο, που στην περίπτωση για την οποία οι ακμές του είναι ίσες, ο άξονας τρίτης τάξης (οπτικός άξονας του κρυστάλλου), διέρχεται από δύο απέναντι – ίσες μεταξύ τους – αμβλείες στερεές γωνίες. Οι τελευταίες προκύπτουν από τη σύγκλιση τριών φυσικών επιφα-

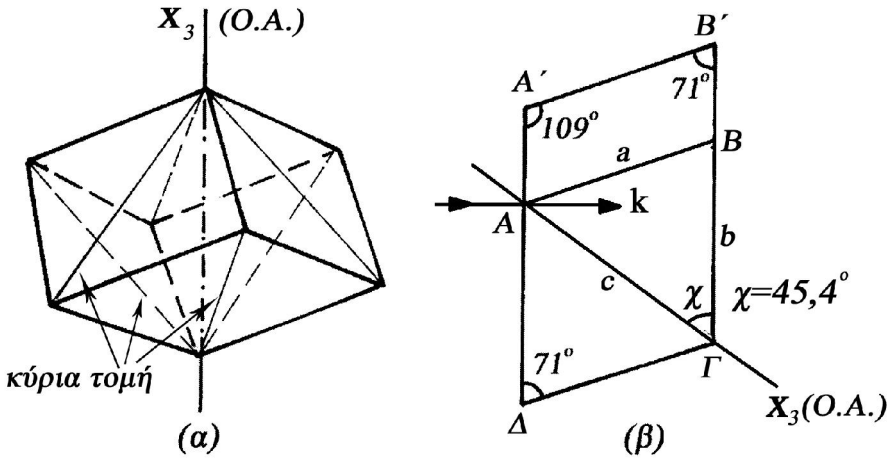


(Σχ. 16.2)

νειών του κρυστάλλου και ανά δύο σχηματίζουν ίσες γωνίες $\phi = 101.916^o$. Οι γωνίες θ του παραλληλεπιπέδου, υπολογίζονται ότι έχουν την τιμή $\theta = 78.833^o$. Γνωρίζουμε ότι επίπεδα τα οποία είναι κάθετα σε δύο απέναντι φυσικές έδρες του κρυστάλλου και περιλαμβάνουν τον οπτικό του άξονα ονομάζονται κύριες τομές και

είναι συνολικά τρεις τον αριθμό όπως φαίνεται στο (Σχ. 16.3α). Οι κύριες τομές είναι πλάγια παραλληλόγραμμα και οι γωνίες τους καθώς και τα άλλα τους γεωμετρικά χαρακτηριστικά δίνονται κατά προσέγγιση στο (Σχ. 16.3β). Με βάση αυτά τα στοιχεία και τις τριγωνομετρικές σχέσεις μεταξύ των πλευρών και των γωνιών της κύριας τομής, μπορούμε να υπολογίσουμε την τιμή της γωνίας χ. Πρόκειται για τη γωνία που σχηματίζεται μεταξύ του οπτικού άξονα και της πλευράς $B'\Gamma$. Στην παράλληλη της $B'\Gamma$ δηλ. την $A'\Delta$, κατά το πρόβλημά μας, προσπίπτει κάθετα το επίπεδο μέτωπο κύματος του φυσικού φωτός για να διαδοθεί στο εσωτερικό του κρυστάλλου. Βρίσκεται ότι $\chi = 45.4^o$. Οπότε η γωνία που θα σχηματίζει η κυματοκάθετη **k** με τον οπτικό άξονα του κρυστάλλου – όπως εύκολα διαπιστώνεται από το (Σχ. 16.4) – θα είναι $\theta = 44.6^o$.

Αυτό το οποίο τελικά ζητούμε είναι να προσδιοριστεί – με βάσει τις συνθήκες πρόσπτωσης – ποια ακριβώς πεδία διαδίδονται στο εσωτερικό του κρυστάλλου

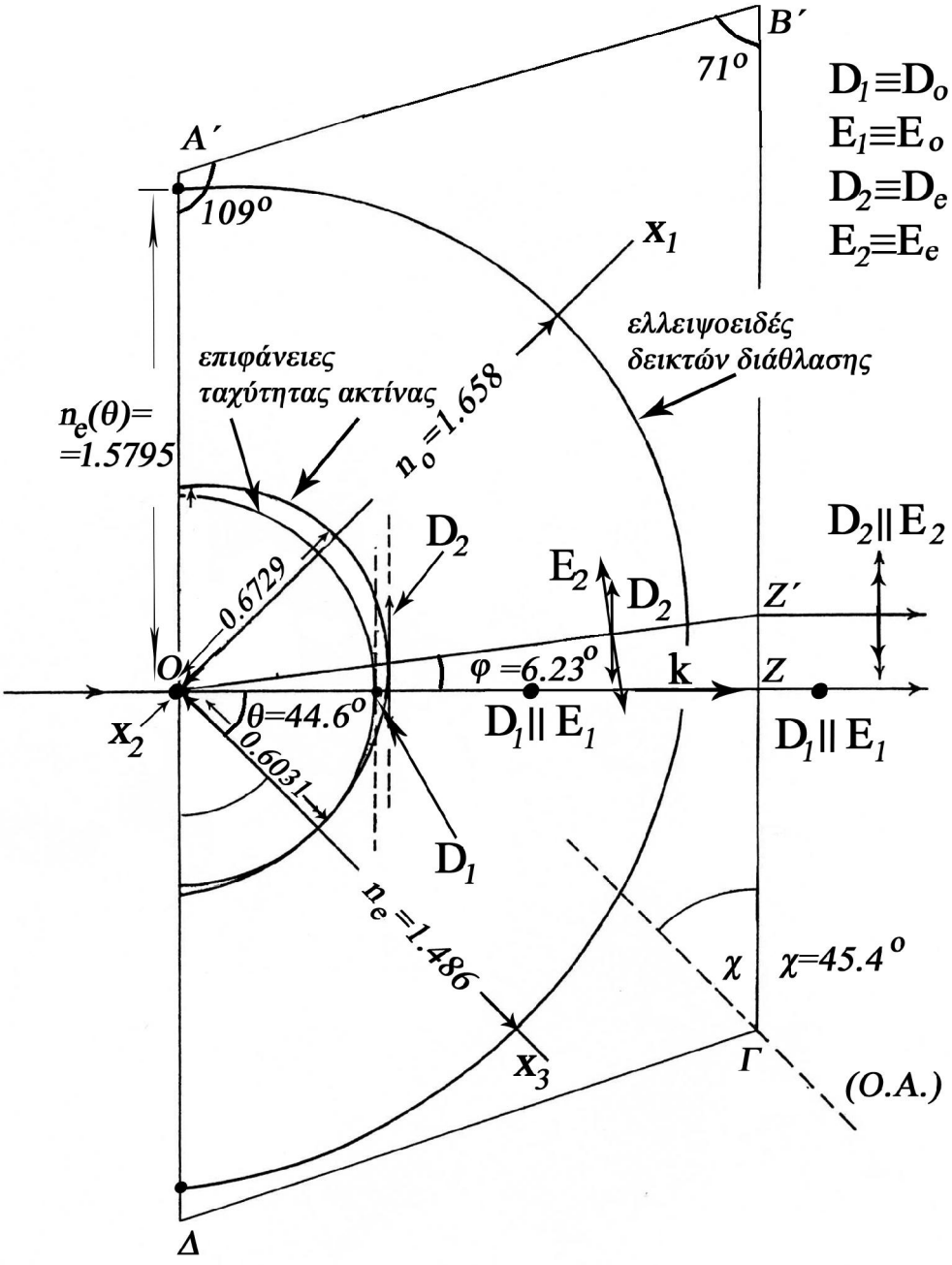


(Σχ. 16.3)

και προς ποιες διευθύνσεις. Το πρόβλημα είναι δυνατόν να επιλυθεί με βάση τα πορίσματα της (Άσκ. 15). Πράγματι στο (Σχ. 16.4) σχεδιαγραφείτε μια κύρια τομή $A'B'\Gamma\Delta$ της Ισλανδικής κρυστάλλου. Κάθετα προς την $A'\Delta$ και παράλληλα προς την κύρια τομή βρίσκεται η κυματοκάθετη του προσπίπτοντος φωτός, η οποία λόγω του ότι οι πλευρές $A'\Delta$ και $B'\Gamma$ είναι παράλληλες, συνεχίζει να έχει την ίδια διεύθυνση – σαν κυματοκάθετη **k** πλέον – στο εσωτερικό του κρυστάλλου. Το προσπίπτον φως προέρχεται από μια λυχνία Na με $\lambda = 589.29\text{nm}$ οπότε από τον (Πίν. 5.4.5) μπορούμε να βρούμε τους κύριους δ.δ. n_o, n_e του κρυστάλλου. Έχουμε: $n_o = 1.658$ και $n_e = 1.486$.

Από τα στοιχεία αυτά είναι δυνατόν να κατασκευάσουμε το ελλ. των δ.δ. του οποίου η τομή φαίνεται στο (Σχ. 16.4). Το τελευταίο είναι ένα ελλειψοειδές εκ

περιστροφής περί τον άξονα x_3 που είναι και ο οπτικός άξονας (Ο.Α.) του κρυστάλλου. Η τομή του στο επίπεδο της κύριας τομής $A'B'\Gamma\Delta$ θα είναι μια έλλειψη που ο μικρός της άξονας θα βρίσκεται στη διεύθυνση του x_3 με μήκος $n_e = 1.486$ και ο μεγάλος του κατά τη διεύθυνση του άξονα x_1 (καθέτου προς τον x_3) μήκους



(Σχ. 16.4)

$n_o = 1.658$. Κάθετα στους x_1, x_3 θα είναι ο άξονας x_2. x_1, x_2, x_3 είναι οι κύριοι άξονες του κρυστάλλου στους οποίους αναφέρεται το ελλ. των δ.δ. (βλ. ΠΑΡ/ΜΑ 4-Β).

Οι δ.δ. τακτικής και έκτακτης διαταραχής για διευθύνσεις της κυματοκαθέτου πάνω στο επίπεδο x_1, x_3 δίνονται από τις (σχ. Γ-20,21) του (ΠΑΡ/ΤΟΣ 4-Γ). Π.χ. για τα σημεία της τομής του ελλειψοειδούς με διευθύνσεις της κυματοκάθετης $\mathbf{k}$ σε σχέση με τον οπτικό άξονα $\left(\theta = 44.6^0\right)$ βρίσκουμε: $n_o\left(\theta\right) = n_o = 1.658$ και $n_e\left(\theta\right) = 1.5795$.

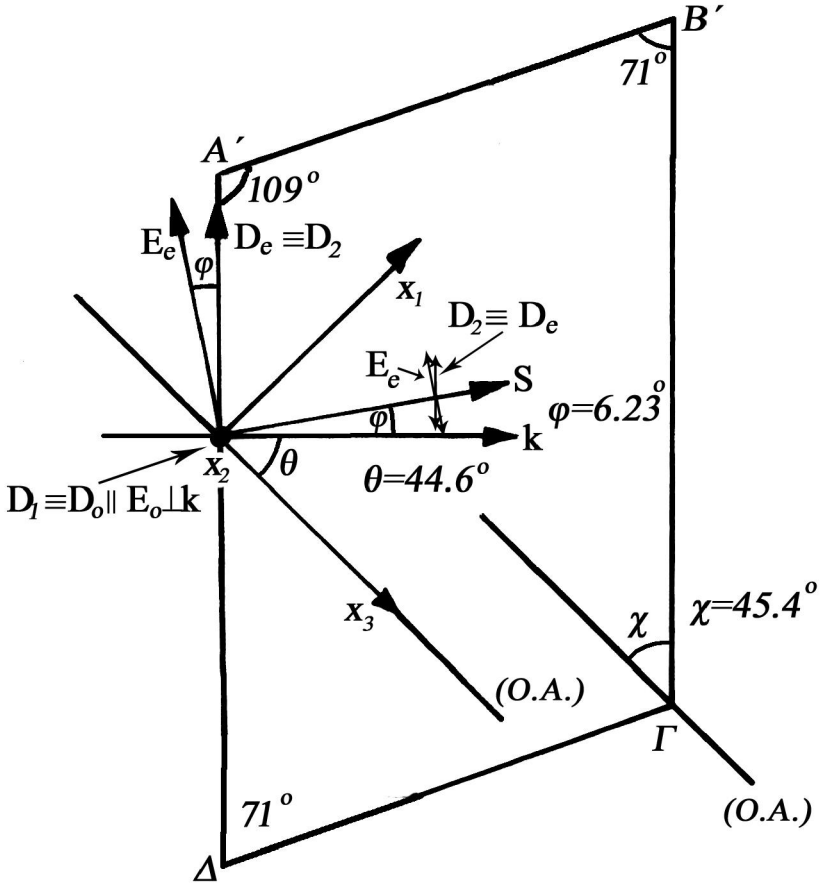
Επειδή οι κύριοι δ.δ. n_o, n_e είναι γνωστοί, μπορούμε (βλ. ΠΑΡ/ΜΑ 4-Ε) (σχ. Ε-26,27) και (Σχ. Ε-4) να κατασκευάσουμε και τις επιφάνειες κύματος ή επιφάνειες ταχύτητας ακτίνας. Οι τομές τους στο επίπεδο της κύριας τομής θα είναι ένας κύκλος που θα περιβάλλεται από μια έλλειψη (αρνητικός κρύσταλλος), με μόνο δύο κοινά σημεία κατά τη διεύθυνση του οπτικού άξονα. Το μήκος της ακτίνας του κύκλου θα είναι $1/n_o$. Δηλ. $1/n_o = 1/1.658 = 0.60313$ (κατά τη διεύθυνση του οπτικού άξονα δηλ. του x_3). Το μήκος του μεγάλου άξονα της έλλειψης (κατά τη διεύθυνση του άξονα x_1) θα είναι $1/n_e = 1/1.486 = 0.67229$.

Εφόσον η γωνία μεταξύ του οπτικού άξονα και της $B'\Gamma$ είναι $\chi = 45.4^o$, τότε η γωνία μεταξύ της κυματοκαθέτου $\mathbf{k}$ και του άξονα x_3 (Ο.Α.) θα είναι $\theta = 44.6^o$. Επομένως με βάση τα πορίσματα της (Άσκ. 15) για διεύθυνση της κυματοκαθέτου που σχηματίζει γωνία $\theta = 44.6^o$ με τον άξονα x_3 στο εσωτερικό του κρυστάλλου (Σχ. 16.4), θα διαδίδονται δύο εν γένει γραμμικά πολωμένα μέτωπα κύματος. Το τακτικό και το έκτακτο. Δηλ. δύο ιδιοκαταστάσεις (Σχ. 16.5). Για το τακτικό μετ. κύμ. $\mathbf{D}_o \parallel \mathbf{E}_o \perp \mathbf{k}$, τα $\mathbf{D}_o, \mathbf{E}_o$ (ιδιοκατάσταση $\mathbf{D}_1$) είναι κάθετα στο επίπεδο της κύριας τομής δηλ. παράλληλα με τον κύριο άξονα x_2. Η ιδιοτιμή του $1/n'^2 = 1/n_o^2\left(\theta\right) = 1/\left(1.658\right)^2$ μας δίνει $n' = n_o = 1.658$. Για το έκτακτο μέτ. κυμ. με ιδιοτιμή $\frac{1}{n''^2} = \frac{1}{n_e^2\left(\theta\right)} = \frac{1}{\left(1.5765\right)^2}$ και $n'' = n_e\left(\theta\right) = n_e\left(44.6^o\right) = 1.5799$ προκύπτει η ιδιοκατάσταση $\mathbf{D}_2 \equiv \mathbf{D}_e$ η οποία είναι κάθετη στην κυματοκάθετη δηλ. $\mathbf{D}_e \perp \mathbf{k}$. Στην περίπτωση όμως αυτή τα $\mathbf{D}_e, \mathbf{E}_e$ δεν είναι παράλληλα, αλλά σχηματίζουν μεταξύ τους γωνία ϕ. Είναι η γωνία μεταξύ της $\mathbf{k}$ και του διανύσματος Poynting $\mathbf{S}_e$ (Σχ. 16.5). Γνωρίζουμε όμως ότι εφόσον η γωνία θ (μεταξύ κυματοκαθέτου και οπτικού άξονα) είναι γνωστή τότε με βάση τη (σχ. 15.3) (Άσκ. 15) μπορούμε να υπολογίσουμε τη γωνία ϕ. Πράγματι για $\theta = 44.6^o$ και για $n_o = 1.658$, $n_e = 1.486$ (κύριοι δ.δ.) βρίσκουμε $\phi = 6.233^o$. Πρόκειται για την θεωρητική επαλήθευση του φαινομένου της διπλής διάθλασης του φωτός από τον διπλοθλαστικό κρύσταλλο του Ασβεστίτη, για την περίπτωση που η κυματοκάθετη είναι κάθετη προς μια φυσική του έδρα και βρίσκεται σε μια κύρια τομή του.

Για τον Ασβεστίτη $(CaCO_3)$ προτείνονται* οι επόμενοι τύποι διασκεδασμού για τους κύριους δ.δ. n_o, n_e συναρτήσει του μ.κ. λ:

$$n_o = (2.683919 - 0.010849\lambda^2 + 0.033682\lambda^{-2} - 0.006746\lambda^{-4} + \\ + 0.001518\lambda^{-6} - 0.000112\lambda^{-8})^{\frac{1}{2}} \tag{16.1}$$

$$n_e = (2.173670 + 0.000814\lambda^2 + 0.021472\lambda^{-2} - 0.006434\lambda^{-4} + \\ + 0.001422\lambda^{-6} - 0.000107\lambda^{-8})^{\frac{1}{2}} \tag{16.2}$$



(Σχ. 16.5)

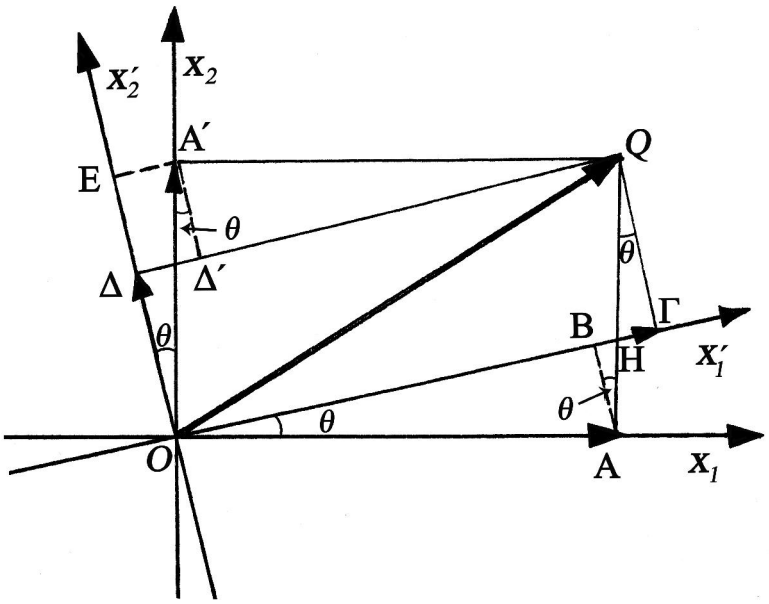
Ισχύουν για την περιοχή μεταξύ $391-2000\text{nm}$ και το μ.κ. λ αντικαθίσταται σε $[\mu\text{m}]$. Για φως που προέρχεται από Laser He-Ne, για το οποίο το μήκος κύματος είναι $\lambda = 0.6328\mu\text{m}$ μετά την αντικατάστασή του λ στις (σχ. 16.1,2) βρίσκουμε:

* Melles Griot 1995/96: 'Optics-Opto-mechanics-Lasers-Instruments' p.12.5

$n_{o(\text{He-Ne})} = 1.6555672$ και $n_{e(\text{He-Ne})} = 1.4850849$. Προκειμένου να υπολογίσουμε πόσο απέχουν μεταξύ τους οι κηλίδες της τακτικής και της έκτακτης διαταραχής κατά την έξοδό τους από τα σημεία Z, Z' της πλευράς $B'\Gamma$ της κύριας τομής (Σχ. 16.4), όταν μια δέσμη Laser (διατομής περίπου 2mm) προσπίπτει κάθετα στο σημείο O της πλευράς $A'\Delta$ ακολουθούμε την εξής διαδικασία. Θα πρέπει κατ' αρχή να υπολογίσουμε τη γωνία ϕ για τα νέα δεδομένα εφαρμόζοντας τα λ, n_o, n_e για το φως από το Laser He-Ne στη (σχ. 15.4) της (Άσκ. 15). Μετά την αντικατάσταση των τιμών αυτών και για $\theta = 44.6^o$ βρίσκουμε $\phi = 6.1866^o$. Κατόπιν από το ορθογώνιο τρίγωνο OZZ' θα έχουμε $(ZZ') = (OZ)\tan\phi$, όπου OZ το πάχος του κρυστάλλου (κατά τη διεύθυνση της κυματοκαθέτου). Αν π.χ. $OZ = 32.3\text{mm}$ τότε $ZZ' \simeq 3.5\text{mm}$.

17) Να μελετηθεί ο τρόπος με τον οποίο μετασχηματίζονται οι συντεταγμένες ενός σημείου $Q(x_1, x_2)$ στο ορθογώνιο σ.σ. x_1, x_2, όταν το τελευταίο στραφεί κατά θετική γωνία θ (αντίθετη των δεικτών του ρολογιού). Το νέο σ.σ. είναι το x_1', x_2' και οι συνιστώσες του Q είναι: $Q(x_1', x_2')$. Να γίνει επέκταση και στο χώρο των τριών διαστάσεων.

ΛΥΣΗ



(Σχ. 17.1)

Από το (Σχ. 17.1) έχουμε: $\text{OA} \to x_1$, $\text{OA}' \to x_2$, $\text{OΓ} \to x_1'$, $\text{OΔ} \to x_2'$. Τότε:

$x_1' = \text{ΟΒ} + \text{ΒΓ}$ Αλλά: $\text{ΟΒ} = (\text{ΟΑ})\cos\theta = x_1\cos\theta$ και $\text{ΒΓ} = \text{ΒΗ} + \text{ΗΓ}$.

Όμως: $\text{ΒΗ} = (\text{ΗΑ})\sin\theta$ και $\text{ΗΓ} = (\text{Η}Q)\sin\theta$ επομένως:

$$\text{ΒΓ} = (\text{ΗΑ})\sin\theta + (\text{Η}Q)\sin\theta = \left[(\text{ΗΑ}) + (\text{Η}Q)\right]\sin\theta = (\text{Α}Q)\sin\theta = x_2\sin\theta$$

Επομένως:

$$x_1' = \cos\theta x_1 + \sin\theta x_2 \tag{1}$$

$x_2' = \text{ΟΔ} = \text{ΟΕ} - \text{ΔΕ}$ Αλλά: $\text{ΟΕ} = (\text{ΟΑ}')\cos\theta = x_2\cos\theta$

και $\text{ΔΕ} = \text{Α}'\text{Δ}' = (\text{Α}'Q)\sin\theta = x_1\sin\theta$

Επομένως:

$$x_2' = -\sin\theta x_1 + \cos\theta x_2 \tag{2}$$

Και οι (σχ. 1,2) σε μορφή πινάκων μπορούν να γραφούν:

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\widehat{x_1'x_1} & \cos\widehat{x_1'x_2} \\ \cos\widehat{x_2'x_1} & \cos\widehat{x_2'x_2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \tag{3}$$

Και με μορφή διαγράμματος η (σχ.3) περιγράφεται ως εξής:

		(Παλαιό σ.σ.)	
		x_1	x_2
(Νέο σ.σ.)	x_1'	a_{11}	a_{12}
	x_2'	a_{21}	a_{22}

(Πίν. 17.2)

όπου στο συνημίτονο κατεύθυνσης a_{ij} ο δείκτης i αφορά το νέο σ.σ. και ο δείκτης j το παλαιό σ.σ.(π.χ. ο a_{21} παριστάνει το συνημίτονο της γωνίας που σχηματίζουν ο νέος άξονας Ox_2' με τον παλαιό άξονα Ox_1. Δηλ. $a_{21} = \cos\widehat{Ox_2', Ox_1}$). Οπότε από τον (Πίν. 17.2) προκύπτουν οι σχέσεις:

$$\left.\begin{aligned} x_1' &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ x_2' &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \end{aligned}\right\} \quad (4)$$

ή οι αντίστοιχες:

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= a_{11}x_1' + a_{21}x_2' \\ x_2 &= a_{12}x_1' + a_{22}x_2' \end{aligned}\right\} \quad (5)$$

Όσον αφορά τώρα για το πρόβλημα του μετασχηματισμού των συντεταγμένων στο χώρο των τριών διαστάσεων, η επίλυσή του ακολουθεί παρόμοια διαδικασία. Έτσι οι (σχ. 3) μπορούν να γραφούν:

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\widehat{x_1'x_1} & \cos\widehat{x_1'x_2} & \cos\widehat{x_1'x_3} \\ \cos\widehat{x_2'x_1} & \cos\widehat{x_2'x_2} & \cos\widehat{x_2'x_3} \\ \cos\widehat{x_3'x_1} & \cos\widehat{x_3'x_2} & \cos\widehat{x_3'x_3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \qquad (6)$$

όπου και πάλι για το συνημίτονο κατεύθυνσης a_{ij} ο δείκτης i αφορά το νέο σ.σ. και ο δείκτης j το παλαιό σ.σ. Π.χ. ο a_{32} παριστάνει το συνημίτονο της γωνίας που σχηματίζουν ο νέος άξονας Ox_3' με τον παλαιό άξονα Ox_2. Δηλ. $a_{32} = \cos\widehat{Ox_3', Ox_2}$. Και με μορφή διαγράμματος η (σχ.6) περιγράφεται ως εξής:

		(Παλαιό σ.σ.)		
		x_1	x_2	x_3
(Νέο σ.σ.)	x_1'	α_{11}	α_{12}	α_{13}
	x_2'	α_{21}	α_{22}	α_{23}
	x_3'	α_{31}	α_{32}	α_{33}

(Πίν. 17.3)

Οπότε από τον (Πίν. 17.3) προκύπτουν οι σχέσεις:

$$\left.\begin{aligned} x_1' &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \\ x_2' &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \\ x_3' &= a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 \end{aligned}\right\} \quad (7) \qquad \text{ή οι αντίστοιχες:} \qquad \left.\begin{aligned} x_1 &= a_{11}x_1' + a_{21}x_2' + a_{31}x_3' \\ x_2 &= a_{12}x_1' + a_{22}x_2' + a_{32}x_3' \\ x_3 &= a_{13}x_1' + a_{23}x_2' + a_{33}x_3' \end{aligned}\right\} \quad (8)$$

ΓΕΝΙΚΗ ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

1. Ι. Σπυριδέλη: 'Θέματα Οπτικής' Τεύχη α,β. Έκδοση υπηρεσίας δημοσιευμάτων Α.Π.Θ. Θεσ/νίκη (1982).

2. Μ. Μαρκέτου - Πυλαρινού: 'Μαθήματα Γενικής Φυσικής' II_2 «Φυσική Οπτική» Θεσ/νίκη (1957).

3. Κ.Δ. Αλεξοπούλου, Δ.Ι. Μαρίνου: 'Γενική Φυσική' Τομ.5^{ος} 'Οπτική' Έκδ. Ολυμπία, Αθήνα (1992) (1^{η} έκδοση).

4. Δημ. Ζευγώλη: 'Εφαρμοσμένη Οπτική' Τόμοι Α,Β. Έκδοση Παν. Πατρών (2002).

5. Θ. Κουγιουμζέλη & Σ. Περιστεράκη: 'Στοιχεία Φυσικής' Τόμ.2^{ος} :'Κυματική' Έκδ. Α.Καραβία, Αθήνα (1963).

6. Ε. Δ. Βανίδη: 'Μαθήματα Οπτικής με εισαγωγή στην Κυματική'. Θεσ/νίκη (2021) (Δίνεται ελεύθερα σε PDF στο: http://users.auth.gr/~vanidhis → Συγγραφικό έργο → Σειρά φοιτητικών βοηθημάτων → Προαναφερόμενο βιβλίο, το οποίο βρίσκουμε σε επτά ξεχωριστά κεφάλαια).

7. Halliday-Resnick : 'Φυσική' Μέρος Β΄, Έκδ. Γ. Πνευματικού, Αθήνα (1979) (Ελληνική μετάφραση).

8. H.D.Young : 'Φυσική' Τόμ. Β΄, Έκδ. Παπαζήση, Αθήνα (1994) (Ελληνική μετάφραση).

9. I.V. Savelyev: 'Physics' Vol II 2nd ed. Mir pub. Moscow (1985).

10. E.Hecht: 'Οπτική' Ελλ. Μετάφραση Ι. Σπυριδέλη κ.ά. Έκδ. Α.Σ.Π.Ι. Αθήνα (1979).

11. F.S.Crawford,Jr. 'Waves' Berkeley Physics Cource-Vol.3. McGraw-Hill Co. N.Y. (1968).

12. E.Hecht: 'Optics', 3th ed. Addison - Wesley, Reading (1998).

13. M.V. Klein: 'Optics' John Willey & Sons, Inc. N.Y. (1974).

14. M.V. Klein, T.E. Furtak: 'Optics' John Willey & Sons, N.Y. (1986).

15. F. Jenkins & H. White: 'Fundamentals of Optics' 4th ed. Mc Graw - Hill - Kogakucha. Tokyo (1976).

16. Fr. W. Sears: 'Optics' 3th ed. Addison - Wesley, Reading (1974).

17. R.D. Guenther: 'Modern Optics' J. Wesley & Sons, N.Y. (1990).

18. M. Young (Ελληνική μετάφραση): 'Οπτική και Λέιζερ' Πέμπτη έκδοση: Παν. Εκδ. Ε.Μ.Π. (2008).

19. Ern. Wahlstom: 'Optical Crystallography' John Wiley & Sons N.Y. (1979).

20. Theocaris - Gdoutos: 'Matrix Theory of Photoelasticity'. Springer Series in Optical Sciences 11. 1st ed. (1979).

21. Ed. Collet: 'Polarized Light' (Fundamentals and application). Marcel - Dekker Inc. N. Y. (1993).

22. A. Gerrard, J.M. Burch: 'Matrix Methods in Optics'. Dover Pub. N.Y. (1975).

23. D. Goldstein: 'Polarized Light' . CRC Press Taylor & Francis. Boca Rato London N.Y. (2003).

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Σύντομη επισκόπηση της εξέλιξης των θεωριών για το φως

Ιστορικά στοιχεία που αφορούν την ανακάλυψη και την προσπάθεια ερμηνείας του φαινομένου της πόλωσης του φωτός, με βάση τις επικρατούσες θεωρίες

Περιγραφή των καταστάσεων πόλωσης, μέσω του πλάτους ή της έντασης του φωτός

Περιοχές εφαρμογών της πόλωσης του φωτός

Ανάδειξη φαινομένων που σχετίζονται με την πόλωση του φωτός.

1. Ηλεκτρομαγνητικό (Η/Μ) πεδίο και ηλεκτρομαγνητικά κύματα

1.1. Περιγραφή του Η/Μ πεδίου με τη βοήθεια των εξισώσεων του Maxwell. Ο διανυσματικός χαρακτήρας και η κυματική φύση της χωροχρονικά μεταβαλλόμενης έντασης **E** του ηλεκτρικού πεδίου και της μαγνητικής επαγωγής **B**

1.2 Λύσεις της διαφορικής εξίσωσης κύματος. Εγκάρσια φύση των Η/Μ κυμάτων

1.3 Ανάδειξη του φαινομένου της πόλωσης των Η/Μ κυμάτων. Επίπεδα αρμονικά Η/Μ κύματα. Γραμμικά πολωμένα κύματα

2. Μοντέλα εκπομπής και διάδοσης των Η/Μ κυμάτων στο κενό και την ύλη

2.1 Εκπομπή ακτινοβολίας από το ηλεκτρικό δίπολο

Εκπομπή ακτινοβολίας από επιταχυνόμενο φορτίο

Εκπομπή ακτινοβολίας από ηλεκτρικό δίπολο

2.2 Διάδοση των Η/Μ κυμάτων σε ισότροπα και ανισότροπα υλικά. Το μοντέλο του μηχανικού ταλαντωτή του Lorentz

Σκέδαση συντονισμού

Ελαστική σκέδαση

Το μοντέλο του μηχανικού ταλαντωτή του Lorentz

2.3 Εφαρμογή της αρχής του Huygens για τη διάδοση των μετώπων κύματος σε ισότροπα και ανισότροπα υλικά

Η αρχή του Huygens για ισότροπα υλικά

Η αρχή του Huygens για ανισότροπα υλικά

3. Περιγραφή των καταστάσεων πόλωσης του φωτός

3.1 Ελλειπτικά πολωμένο φως

3.2 Κυκλικά πολωμένο φως

3.3 Γραμμικά πολωμένο φως

3.4 Φυσικό φως και μερικά πολωμένο φως

3.5 Το αποτέλεσμα της σύμφωνης επαλληλίας (σύζευξης) δεσμών φωτός της ίδιας συχνότητας και διαφορετικών καταστάσεων πόλωσης

4. Πολωτές

4.1 Γραμμικοί πολωτές. Polaroid

4.2 Ημικλασσική άποψη για το φως. Εύρος ζώνης συχνοτήτων, χρόνος συμφωνίας και διάρκεια των καταστάσεων πόλωσης. Ημικλασσική μελέτη του μηχανισμού επιλεκτικότητας ενός πολωτή Polaroid

4.3 Νόμος του Malus

5. Διπλή διάθλαση του φωτός

5.1 Διάθλαση του φωτός από ομογενή και ισότροπα υλικά. Νόμος του Snell

5.2 Διάθλαση του φωτός από ανισότροπα υλικά. Η ανάδειξη του φαινομένου της διπλής διάθλασης του φωτός στην Ισλανδική κρύσταλλο

5.3 Η δομή των μονοαξόνων διπλοθλαστικών κρυστάλλων Ασβεστίτη και α-Χαλαζία

Ασβεστίτης ή Ισλανδική κρύσταλλος (Calcite)

Κρύσταλλος Χαλαζία (Quartz)

5.4 Επιφάνειες κύματος (ή επιφάνειες ταχύτητας ακτίνας) σε μονοάξονες διπλοθαλαστικούς κρυστάλλους

5.5 Ερμηνεία της διάδοσης του φωτός σε ορισμένες διευθύνσεις στο εσωτερικό ενός κρυστάλλου του Ασβεστίτη

5.6 Πλακίδια καθυστέρησης (ή καθυστερητές)

Πλακίδιο καθυστέρησης του ενός τετάρτου του μήκους κύματος ($\lambda/4$)

Πλακίδιο καθυστέρησης του ενός δευτέρου του μήκους κύματος ($\lambda/2$)

Πλακίδια καθυστέρησης από Μίκα (Mica)

5.7 Κρυσταλλικοί πολωτές και καθυστερητές

5.7.1 Κρυσταλλικοί πολωτές

1. Πρίσμα Nicol
2. Πρίσματα τύπου Glan

Πρίσματα: Glan-Thompson, Glan- Foucault, Glan-Taylor

3. Πρισματικοί πολωτικοί διαχωριστές δέσμης

Διαχωριστές: Rochon, Sénarmor, Wollaston

5.7.2 Κρυσταλλικοί καθυστερητές

Ρομβοειδής καθυστερητής $\lambda/4$, Ρόμβος Fresnel, Ρόμβος Mooney, Ρόμβος AD-1,

Ρομβοειδείς καθυστερητές $\lambda/2$

Μεταβαλλόμενοι καθυστερητές ή αντισταθμιστές

Αντισταθμιστής Babinet και η χρήση του

6. Πόλωση του φωτός μέσω ανάκλασης και διάθλασης. Διχρωϊσμός. Πόλωση από σκέδαση του φωτός

6.1 Πόλωση του φωτός από ανάκλαση και διάθλαση σε διηλεκτρικά υλικά

6.1.1 Πόλωση του φωτός από ανάκλαση και διάθλαση. Νόμος του Brewster

Νόμος του Brewster

Πολωτής παραλλήλων πλακών

6.1.2 Ανακλαστικότητα των διηλεκτρικών επιφανειών.

6.2 Διχρωϊσμός

6.3 Σκέδαση του φωτός και συναφή φαινόμενα. Πόλωση του φωτός από σκέδαση

6.3.1 Σκέδαση Rayleigh. Σκέδαση Mie. Τα χρώματα του ουρανού

Σκέδαση Rayleigh

Σκέδαση Mie

Ένα απλοποιημένο μοντέλο για τη σκέδαση από τα μόρια της ατμόσφαιράς, που βασίζεται στο πρότυπο εκπομπής του απλού αρμονικού ταλαντωτή

Τα χρώματα του ουρανού

Το μπλε του ουρανού

Τα χρώματα της δύσης και της ανατολής

6.3.2 Πόλωση του φωτός από σκέδαση

7. Οπτική ενεργότητα

7.1 Φαινομενολογική ερμηνεία της οπτικής ενεργότητας κατά Fresnel.

7.2 Πειραματική επιβεβαίωση της θεωρίας του Fresnel για την οπτική ενεργότητα

7.3 Φυσική ερμηνεία της οπτικής ενεργότητας για τα ανόργανα κρυσταλλικά υλικά

Μακροσκοπικά συστήματα ανάδειξης της οπτικής ενεργότητας

Οι κρύσταλλοι του α-Χαλαζία και της Ζάχαρης

7.4 Φυσική ερμηνεία της οπτικής ενεργότητας για τα υγρά και τα διαλύματα. Ισομερισμός των μορίων

7.5 Ένα απλοποιημένο μοντέλο ερμηνείας της οπτικής ενεργότητας, με βάση τη δισυμμετρία των μορίων

7.6 Διπλοθλαστικότητα και οπτική ενεργότητα

8 *Εφαρμογές με τη χρήση διπλοθλαστικών οπτικών συστημάτων*

8.1 Το φίλτρο Lyot

Προσδιορισμός των χαρακτηριστικών του φίλτρου Lyot

Υπολογισμός του φασματικού εύρους $\Delta\lambda$

Υπολογισμός της ελεύθερης φασματικής περιοχής $\Delta\nu_{fsr}$

Υπολογισμός της λεπτότητας των ζωνών

Αρ. Βούλγαρη (Κατασκευαστή οπτικών τεχνημάτων και οργάνων): Κατασκευή φίλτρου Lyot, για την φωτογράφιση του ηλιακού στέμματος στην περιοχή $\lambda = 5303$ Å της γραμμής του Fe XIV

Γενική περιγραφή του οπτικού συστήματος του φίλτρου Lyot

Κατασκευαστική διαδικασία

Πειραματικά αποτελέσματα

Η χρήση του φίλτρου Lyot

8.2 Φωτοελαστικό φαινόμενο στα ισότροπα υλικά

8.3 Ηλεκτροοπτικοί διαμορφωτές

Ευμεγέθεις ηλεκτροοπτικοί (Η/Ο) διαμορφωτές

8.3.1 Τα είδη των διαμορφωτών. Βασικές μορφές της διαμορφώνουσας διάταξης

Συνθήκες διαμόρφωσης

Οι χρησιμοποιούμενοι σαν διαμορφωτές κρύσταλλοι

Ιδιοκαταστάσεις και δ.δ. για τον επιμήκη τρόπο διαμόρφωσης

Ιδιοκαταστάσεις και δ.δ. για τον εγκάρσιο τρόπο διαμόρφωσης

Διαμόρφωση πλάτους. Κρύσταλλος KDP. Διεύθυνση εφαρμογής του ηλ. πεδίου κατά την $\langle 001 \rangle$. Διεύθυνση διάδοσης του φωτός κατά την $\langle 001 \rangle$

Διαμόρφωση φάσης. Κρύσταλλος KDP. Διεύθυνση εφαρμογής του ηλ. πεδίου κατά την $\langle 001 \rangle$. Διεύθυνση διάδοσης του φωτός κατά την $\langle 001 \rangle$

Διαμόρφωση πόλωσης (δυναμική καθυστέρηση) . Κρύσταλλος KDP. Διεύθυνση εφαρμογής του ηλ. πεδίου κατά την $\langle 001 \rangle$. Διεύθυνση διάδοσης του φωτός κατά την $\langle 001 \rangle$

Χρησιμοποίηση του κρυστάλλου KDP για τον εγκάρσιο τύπο διαμόρφωσης του πλάτους του φωτός (έντασης)

Ηλεκτροπτικοί διαμορφωτές από κρυστάλλους $LiNbO_3$ και $LiTaO_3$

Ιδιοκαταστάσεις και δ.δ. για τον εγκάρσιο τύπο διαμόρφωσης του $LiNbO_3$

Διαμόρφωση πλάτους από τον κρύσταλλο του $LiNbO_3$ (εγκάρσιος τύπος)

Διαμόρφωση φάσης από τον κρύσταλλο του $LiNbO_3$ (εγκάρσιος τύπος)

Ηλεκτροπτικοί διαμορφωτές από κρυστάλλους GaAs

Διαμόρφωση πλάτους από τον κρύσταλλο του GaAs (διαμήκης τύπος)

Διαμόρφωση φάσης από τον κρύσταλλο του GaAs (διαμήκης τύπος)

Διαμόρφωση συχνότητας από εξαγωνικούς κρυστάλλους της τάξης $(\bar{6})$,μέσω του γραμμικού Η/Ο φαινομένου

8.3.2 Χρόνος μετάβασης και διαμορφωτές διαδιδόμενου διαμορφώνοντος πεδίου

Περιορισμοί λόγω του χρόνου μετάβασης

Διαμορφωτές διαδιδόμενου διαμορφώνοντος πεδίου

8.3.3 Γεωμετρικά χαρακτηριστικά των διαμορφωτών. Λειτουργία των διαμορφωτών σε τμήμα ηλεκτρικού κυκλώματος

Περιορισμοί λόγω της γεωμετρίας των διαμορφωτών

Λειτουργία των διαμορφωτών σε τμήμα ηλ. κυκλώματος

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑΤΑ

Π -1 Σύντομος οδηγός για την ανάδειξη των Η/Μ εξισώσεων του Maxwell στο κενό και την ύλη

Π-2 Ανάδειξη του εγκάρσιου χαρακτήρα των Η/Μ κυμάτων κατά τη διάδοση τους στο κενό και σε ομογενή και ισότροπα υλικά

Π-3 Μεταφορά ενέργειας ορμής και στροφορμής από τα Η/Μ κύματα

3.1 Μεταφορά ενέργειας από τα Η/Μ κύματα. Ένταση του φωτός

Η αρχή της διατήρησης της ενέργειας στο Η/Μ πεδίο. Το διάνυσμα Poynting

Η ένταση του φωτός (Irradiance)

3.2 Μεταφορά ορμής από τα Η/Μ κύματα. Πίεση ακτινοβολίας

3.3 Μεταφορά στροφορμής από τα Η/Μ κύματα. Πόλωση του φωτός

Π-4 Διάδοση των Η/Μ κυμάτων σε ανισότροπα υλικά:

Α) Η/Μ εξισώσεις του Maxwell παρουσία διηλεκτρικού ανισοτρόπου υλικού

Β) Το ελλειψοειδές των δεικτών διάθλασης

Γ) Επιφάνειες κυματοκαθέτου

Δ) Επιφάνειες ταχύτητας φάσης

Ε) Επιφάνειες κύματος ή επιφάνειες ταχύτητας ακτίνας

ΣΤ) Ιδιότητες ορθογωνιότητας μεταξύ των ιδιοκαταστάσεων

Ζ) Επαγομένη διπλή διάθλαση του φωτός στα ισότροπα και ανισότροπα υλικά

Η) Φυσική και επαγομένη στροφικότητα (Οπτική ενεργότητα)

Π-5) Περιγραφή των καταστάσεων πόλωσης και των πολωτικών στοιχείων,

με τη βοήθεια του λογισμού Jones

Π-6) Πίνακες συμμετρίας

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

ΟΔΗΓΙΕΣ ΓΙΑ ΤΗΝ ΕΚΤΕΛΕΣΗ ΤΩΝ ΠΕΙΡΑΜΑΤΩΝ

ΓΕΝΙΚΕΣ ΟΔΗΓΙΕΣ
(Για την εκτέλεση των πειραμάτων)

ΟΔΗΓΟΣ ΑΝΑΓΝΩΡΙΣΗΣ ΠΟΛΩΤΙΚΩΝ ΕΞΑΡΤΗΜΑΤΩΝ

1) *Πολωτές και πλακίδια καθυστέρησης* $\lambda/4$

Στην (Εικ. 1α,β) παρατηρούμε αντίστοιχα έναν πολωτή Polaroid και ένα πλακίδιο καθυστέρησης $\lambda/4$. Βρίσκονται τοποθετημένα πάνω σε περιστρεφόμενα

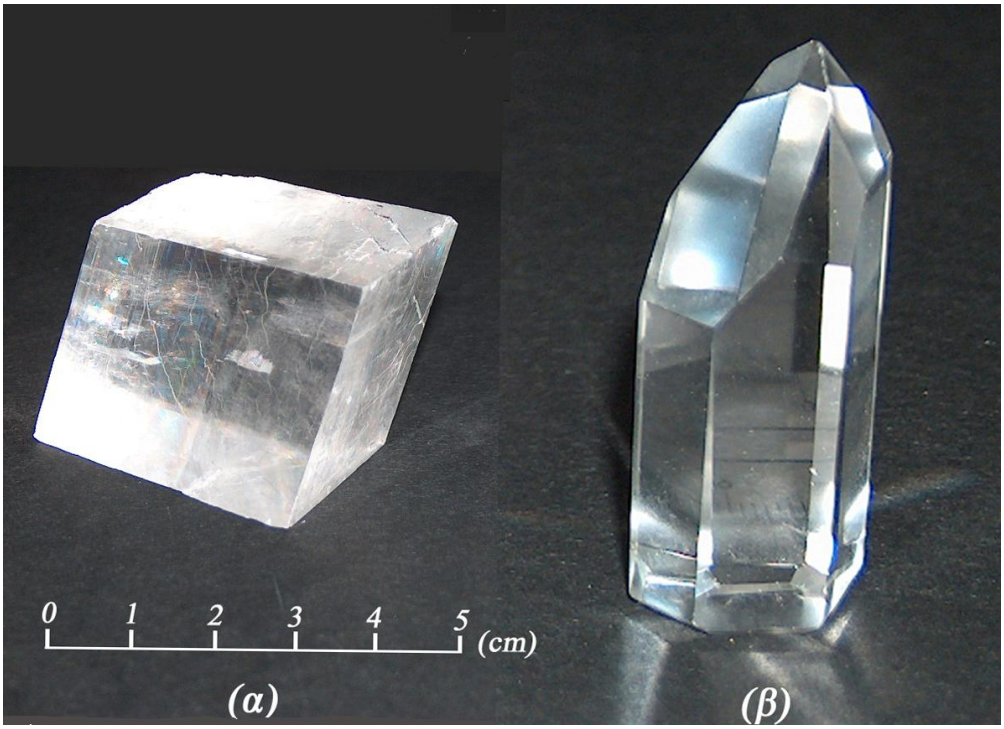
(Εικ. 1)

πλαίσια που διαθέτουν μια άντιγα για να υποδεικνύουν τις γωνίες περιστροφής (αζιμούθια) του ***άξονα διέλευσης*** του πολωτή και του ***ταχύ άξονα*** του πλακιδίου. Οι κυκλικές κλίμακες είναι διαιρεμένες σε μοίρες από $0^0 - 180^0$ δεξιόστροφα και αριστερόστροφα. Η άντιγα του πολωτή μας δείχνει την εκάστοτε θέση του άξονα διέλευσης. (Δηλ. το φυσικό φως που πέφτει από τη μια όψη του πολωτή, βγαίνει από την άλλη γραμμικά πολωμένο στο επίπεδο που ορίζουν η διεύθυνση διάδοσης του φωτός και η διεύθυνση της άντιγας.

Το πλακίδιο $\lambda/4$ (για το φως του $\mathrm{Na}: \lambda = 5892\,\text{Å}$) είναι κατασκευασμένο από Μίκα (βλ. § 5.6). Η άντιγα εδώ έχει τη διεύθυνση του ταχύ άξονα (σημειώνεται με το σύμβολο F). Ένα εξωτερικό χαρακτηριστικό που διακρίνει πολωτές και πλακίδια καθυστέρησης είναι ότι οι πρώτοι έχουν πιο σκούρο χρώμα.

2) *Κρύσταλλοι Ασβεστίτη και Χαλαζία*

Στην (Εικ. 2α) βλέπουμε ένα κρύσταλλο Ασβεστίτη στη σχισμογενή του μορφή. Συνήθως οι κρύσταλλοι αυτοί είναι ορυκτοί οπότε έχουν εμφανείς εξωτερικές ανωμαλίες. Το γεγονός θα έχει σαν συνέπεια οι δέσμες που διαδίδονται διά μέσου τους να παραμορφώνονται αισθητά. Αν το μήκος των ακμών τους είναι ίδιο,



(Εικ. 2)

μπορούμε εύκολα να προσδιορίσουμε τη διεύθυνση του οπτικού τους άξονα. Θα είναι η ευθεία που συνδέει τις δύο κορυφές των δύο απέναντι στερεών γωνιών, που η κάθε μια τους συντίθεται από τρεις ίσες αμβλείες γωνίες. Για τα πειράματά μας, οι κρύσταλλοι του Ασβεστίτη είναι προσαρμοσμένοι σε ειδικά περιστρεφόμενα πλαίσια (Εικ. 3) έτσι που δύο απέναντι παράλληλες έδρες του να είναι κάθετες στον νοητό άξονα της διάταξης (διεύθυνση προσπίπτοντος φωτός).

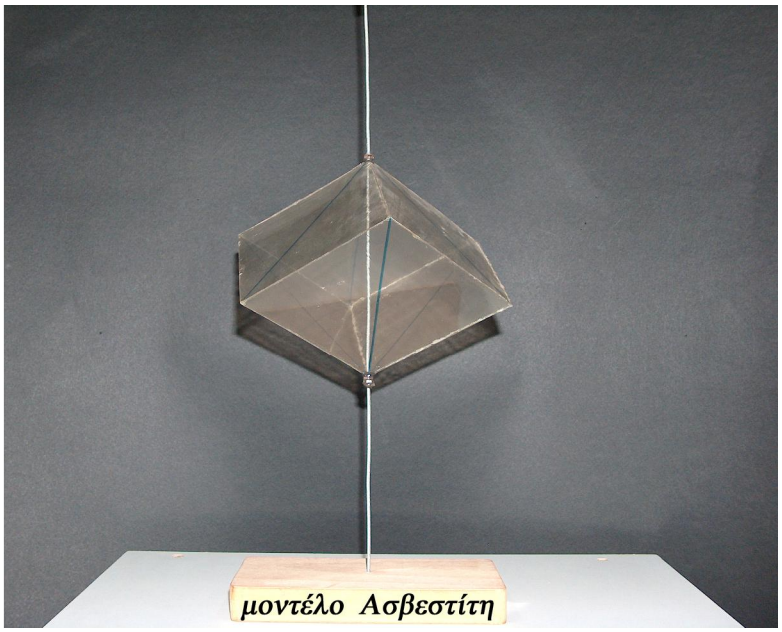
Στην (Εικ. 2β) βλέπουμε έναν κρύσταλλο Χαλαζία. Η μια του βάση είναι τεχνικά διαμορφωμένη σε επίπεδο, επειδή ο κρύσταλλος αποσπάστηκε από μια κοι-

λότητα – ανάμεσα σε άλλους – εκεί που είχε αναπτυχθεί με φυσικό τρόπο. Ο άξονας συμμετρίας τρίτης τάξης ορίζει και τη διεύθυνση του οπτικού του άξονα.

(Εικ. 3)

3) *Εποπτικό μοντέλο του Ασβεστίτη*

Στην (Εικ. 4) βλέπουμε ένα μοντέλο μεγάλων διαστάσεων της σχισμογενούς μορφής του κρυστάλλου του Ασβεστίτη του οποίου οι ακμές έχουν το ίδιο μήκος. Ο κατακόρυφος άξονας περιστροφής του ταυτίζεται με τον οπτικό άξονα του κρυστάλλου (άξονας συμμετρίας τρίτης τάξης). Σημειώνονται επίσης με μπλε διαγραμμίσεις στις αντίστοιχες απέναντι ρομβοειδείς του έδρες οι ***κύριες τομές*** (τρεις τον αριθμό). Κατά τα γνωστά οι κύριες τομές είναι αυτές που περιλαμβάνουν τον οπτικό άξονα και είναι κάθετες σε απέναντι έδρες του κρυστάλλου.



(Εικ. 4)

4) ***Εποπτικό μοντέλο του Χαλαζία***

Στην (Εικ.5) βλέπουμε ένα μοντέλο μεγάλων διαστάσεων του κρυστάλλου α-Χαλαζία (χαμηλής θερμοκρασιακής σύνθεσης) που κρυσταλλώνεται στο τριγω-

(Εικ. 5)

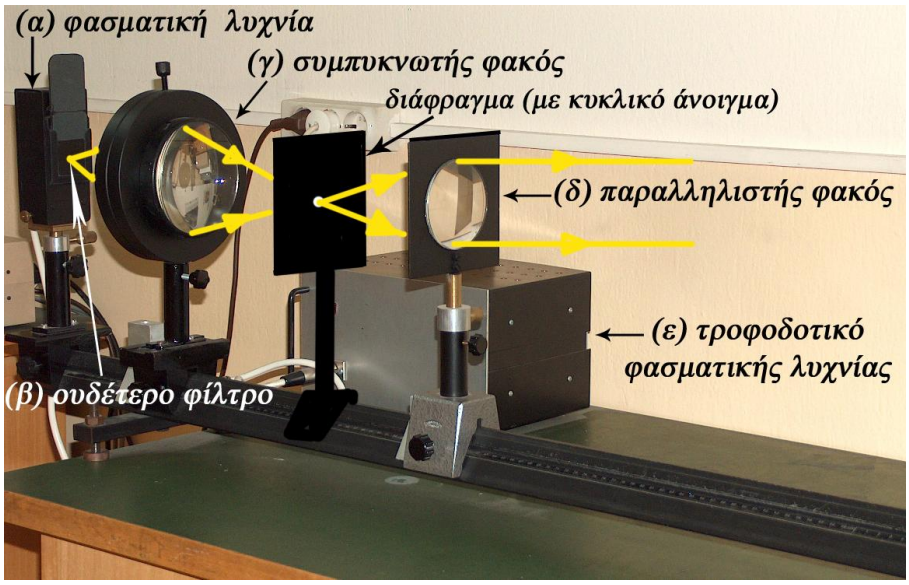
νικό σύστημα. Φαίνεται χαρακτηριστικά ο κατακόρυφος άξονας τρίτης τάξης που είναι ταυτόχρονα και ο οπτικός άξονας του κρυστάλλου.

Α΄ ΣΕΙΡΑ ΠΕΙΡΑΜΑΤΩΝ

ΠΑΡΑΓΩΓΗ ΚΑΙ ΑΝΙΧΝΕΥΣΗ ΤΩΝ ΔΙΑΦΟΡΩΝ ΚΑΤΑΣΤΑΣΕΩΝ ΠΟΛΩΣΗΣ ΤΟΥ ΦΩΤΟΣ

Περιγραφή της βασικής διάταξης

Η διάταξη αποτελείται από μια τριγωνική ράβδο πάνω στην οποία τοποθετούνται και σταθεροποιούνται τα διάφορα οπτικά εξαρτήματα. Τα τελευταία βρίσκονται σε ιππείς, για να έχουν τη δυνατότητα να ολισθαίνουν στην τριγωνική ράβδο αν αυτό απαιτηθεί (Εικ. Α1). Τα βασικά στοιχεία της διάταξης τα οποία και



(Εικ. Α1)

δεν μετακινούμε κατά τη διάρκεια της εκτέλεσης των πειραμάτων είναι:

***α) Φασματική λυχνία* Na**: Η πηγή αυτή εκπέμπει φυσικό ψευδομονοχρωματικό φως (κίτρινου χρώματος) μέσου μήκους κύματος (λ=5892 Å). Βρίσκεται στο εσωτερικό μεταλλικού περιβλήματος με κυκλικό άνοιγμα διαμέτρου 2.5cm.

β) Ουδέτερο φίλτρο: Μπορεί να τοποθετηθεί στην έξοδο της λυχνίας. Συνήθως το χρησιμοποιούμε όταν θέλουμε να ελαττώσουμε την ένταση του φωτός της πηγής.

γ) Συμπυκνωτής φακός: Λόγω του ότι η πηγή είναι εκτεταμένη και το χρησιμοποιούμενο φως διασπείρεται, γι' αυτό χρησιμοποιούμε ένα κατάλληλο φακό μεγάλης διαμέτρου έτσι ώστε σε μια ορισμένη απόσταση μετά από αυτόν να παίρνουμε ένα μικρότερο είδωλο της πηγής.

δ) Παραλληλιστής φακός: Το προαναφερόμενο μικρότερο είδωλο της πηγής, 'τοποθετείται' στο μπρος εστιακό επίπεδο ενός καταλλήλου θετικού φακού. Σαν αποτέλεσμα, από τον τελευταίο θα εξέρχεται ένα σχεδόν επίπεδο μέτωπο κύματος φυσικού φωτός. Η δέσμη αυτή χρησιμοποιείται για τα επόμενα πειράματα.

Η επιπεδότητα του μετώπου κύματος μετά το φακό βελτιώνεται τα μέγιστα, αν στη θέση που εστιάζει ο συμπυκνωτής τοποθετήσουμε διάφραγμα με ένα κυκλικό άνοιγμα διαμέτρου π.χ. 5mm. Τότε από κυκλικό άνοιγμα, διέρχεται τμήμα του ειδώλου της πηγής το οποίο προήλθε από την απεικόνισή της μέσω του συμπυκνωτή φακού.

ε) Τροφοδοτικό φασματικής λυχνίας: Διαθέτει μόνο ένα διακόπτη (ON-OFF) και ένα ενδεικτικό λαμπάκι. Εφόσον τροφοδοτικό και λυχνία είναι συνδεδεμένα και τοποθετήσουμε το διακόπτη στη θέση (ON) η λυχνία ανάβει. Για ν' αποκτήσει την κανονική της λαμπρότητα θα πρέπει να περιμένουμε για ένα διάστημα περίπου 10min. Λεπτομέρειες για τη λειτουργία των φασματικών λυχνιών (βλ. ΕΡΓΑΣ/ΚΗ ΟΠΤΙΚΗ [5]: Π.Α.Α.Φ. (§ 2.3.2)).

(ΠΡΟΣΟΧΗ !! ***Αν κατά κάποιο λόγω σβήσουμε τη λυχνία και την χρειαστούμε πάλι, θα πρέπει να την ανάψουμε μετά από ένα τέταρτο της ώρας τουλάχιστον. Διαφορετικά υπάρχει κίνδυνος να καταστραφεί).***

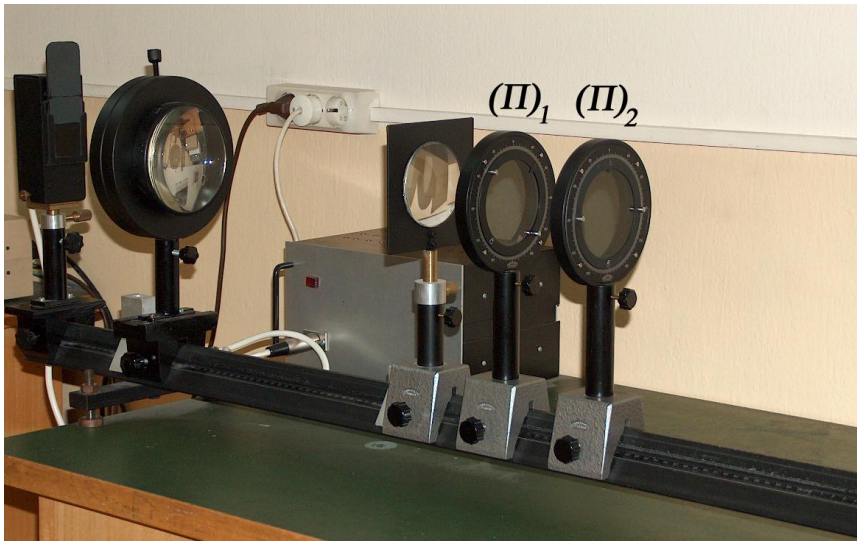
ΠΕΙΡΑΜΑ A_1 *Φυσικό φως*

Γνωρίζουμε ότι η φασματική λυχνία του Na από τον τρόπο λειτουργίας της παράγει φυσικό φως. (Φυσικό φως επίσης προκύπτει και από μια λυχνία αλογόνου όπως και από ένα κοινό Laser).

Μετά τον παραλληλιστή φακό (Εικ. Α1), τοποθετούμε έναν πολωτή και τον περιστρέφουμε παρατηρώντας δια μέσου του τις πιθανές μεταβολές της έντασης του φωτός. Να περιγράψετε τι βλέπετε και πως εξηγείται.

ΠΕΙΡΑΜΑ A_2 *Γραμμικά πολωμένο φως*

Στην (Εικ. Α2) τον πολωτή $(\Pi)_1$ τον τοποθετούμε σ' ένα τυχαίο αζιμούθιο θ. α) Ποια θα είναι η κατάσταση πόλωσης του φωτός που βγαίνει από αυτόν και ποιο θα είναι το επίπεδο ταλάντωσης του ηλεκτρικού πεδίου αυτού του φωτός; β) Με-

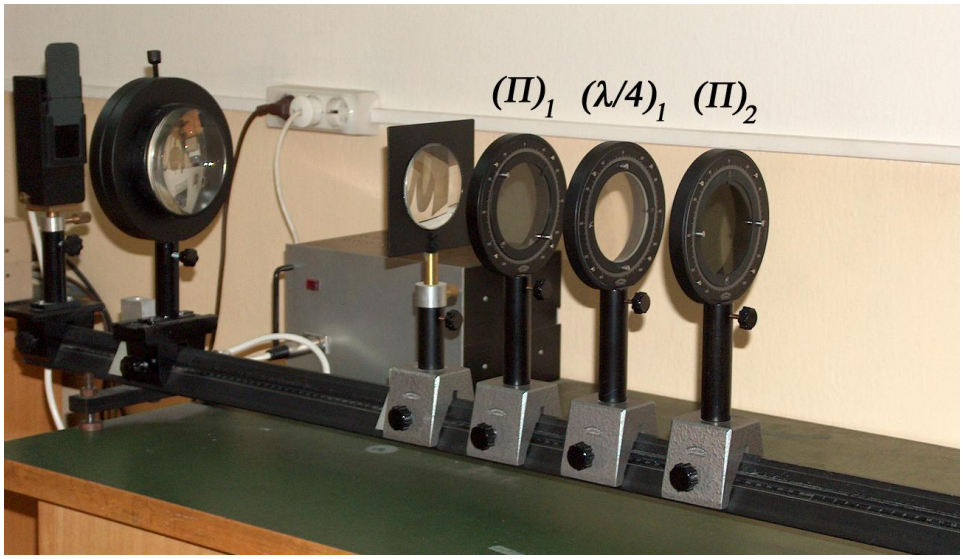


(Εικ. Α2)

τά τον πολωτή $(\Pi)_1$ τοποθετούμε έναν δεύτερο πολωτή $(\Pi)_2$ (***αναλυτής)*** και τον περιστρέφουμε μέχρις ότου πάρουμε ***κατάσβεση***. Ποιο θα είναι το αζιμούθιο του $(\Pi)_2$ και γιατί. Με τον όρο κατάσβεση εννοούμε ότι από τον πολωτή $(\Pi)_2$ δεν θα περνάει καθόλου φως. Λέμε επίσης για την περίπτωση αυτή ότι οι πολωτές $(\Pi)_1$ και $(\Pi)_2$ είναι ***διασταυρωμένοι*** δηλ. ότι οι άξονες διέλευσής τους είναι κάθετοι μεταξύ τους.

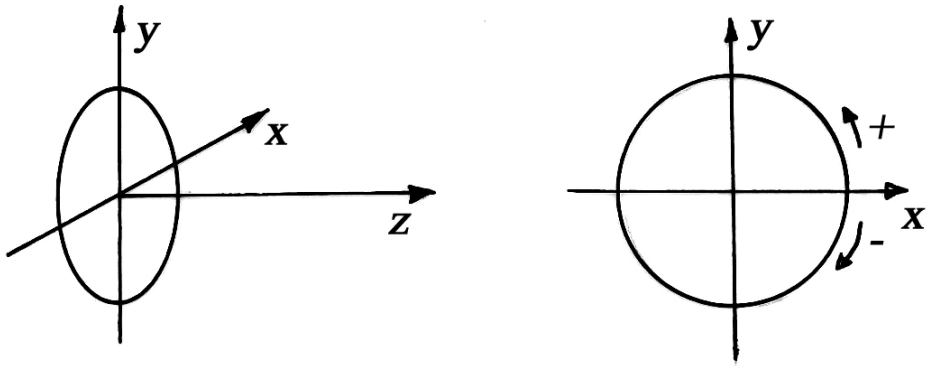
ΠΕΙΡΑΜΑ Α$_3$ ***Κυκλικά πολωμένο φως – Δεξιόστροφο (Δ.Κ.Π.) και Αριστερόστροφο (Α.Κ.Π.)***

Στην (Εικ. Α3) βλέπουμε την πειραματική διάταξη που θα χρησιμοποιή-



(Εικ. Α3)

σουμε για την παραγωγή κυκλικά και ελλειπτικά πολωμένου φωτός. Καθορίζουμε ένα δεξιόστροφο σύστημα συντεταγμένων (Σχ. Α4) όπου το επίπεδο x, y ταυτίζεται εκάστοτε με τους πολωτές ή τα πλακίδια καθυστέρησης και ο άξονας z καθορίζει τη διεύθυνση της διάδοσης του επιπέδου μετώπου κύματος μιας τυχαίας κατάστασης πόλωσης. Η αρχή της μέτρησης των αζιμουθιακών γωνιών γίνεται από τη θέση



(Σχ. Α4)

όπου οι άντιγες των πολωτών ή των ταχέων αξόνων των πλακιδίων καθυστέρησης δείχνουν τα θετικά του άξονα x (τότε το αζιμούθιο είναι 0^0). Από τη θέση αυτή για διαγραφή των αντιγών αντίθετη της φοράς των δεικτών του ωρολογίου, τα αζιμούθια είναι θετικά (από 0^0-360^0). Αρνητικά αζιμούθια έχουμε για διαγραφή των αντιγών κατά τη φορά των δεικτών του ωρολογίου.

α) Παραγωγή Δ.Κ.Π. φωτός

Τοποθετούμε τον πολωτή $(\Pi)_1$ σε αζιμούθιο $+45^0$ και το πλακίδιο $(\lambda/4)_1$ με τον ταχύ του άξονα παράλληλο με τον άξονα y. Τότε οι εξισώσεις για της δύο συνιστώσες E_x, E_y του ηλεκ. πεδίου που βγαίνει από τον πολωτή $(\Pi)_1$ θα είναι:

$$E_x = A_x \cos(\omega t - kz) = A_0 \cos(\omega t - kz)$$
$$E_y = A_y \cos(\omega t - kz) = A_0 \cos(\omega t - kz)$$
$$A_x = A_y = A_0$$

Οι συνιστώσες του πεδίου κατά την έξοδο του φωτός από το πλακίδιο $(\lambda/4)_1$ θα είναι:

$$E_{x'} = A_0 \cos(\omega t - kz)$$
$$E_{y'} = A_0 \cos(\omega t - kz + \pi/2)$$

Ν' αποδείξετε ότι το φως αυτό είναι Δ.Κ.Π. Μετά το πλακίδιο τοποθετούμε τον πολωτή $(\Pi)_2$ και τον περιστρέφουμε. Τι ακριβώς θα παρατηρήσουμε και γιατί.

β) Παραγωγή Α.Κ.Π. φωτός

Τοποθετούμε τον πολωτή $(\Pi)_1$ σε αζιμούθιο $+45^0$ και το πλακίδιο $(\lambda/4)_1$ με τον ταχύ του άξονα παράλληλο με τον άξονα x. Περιγράψτε με εξισώσεις τις δύο συνιστώσες του ηλεκ. πεδίου E_x, E_y για το φως που βγαίνει από το πλακίδιο $(\lambda/4)_1$ και αποδείξτε ότι το φως είναι Α.Κ.Π. Μετά το πλακίδιο τοποθετούμε τον πολωτή $(\Pi)_2$. Τι ακριβώς παρατηρούμε μέσα από αυτόν καθώς τον περιστρέφουμε και γιατί.

ΠΕΙΡΑΜΑ Α$_4$ ***Ελλειπτικά πολωμένο φως, δεξιόστροφο (Δ.Ε.Π.) και Αριστερόστροφο (Α.Ε.Π.)***

α) Παραγωγή Δ.Ε.Π. φωτός

Στη διάταξη της (Εικ. Α3) τοποθετούμε τον πολωτή $(\Pi)_1$ σε αζιμούθιο $+30^0$ και το πλακίδιο $(\lambda/4)_1$ με τον ταχύ του άξονα παράλληλο με τον άξονα y. α) Περιγράψτε με εξισώσεις τις δύο συνιστώσες E_x, E_y του ηλεκ. πεδίου για το φως που βγαίνει από το πλακίδιο $(\lambda/4)_1$ και αποδείξτε ότι αυτό είναι Δ.Ε.Π. φως. β) Μετά το πλακίδιο $(\lambda/4)_1$ τοποθετούμε τον πολωτή $(\Pi)_2$ και τον περιστρέφουμε. Τι ακριβώς παρατηρούμε και γιατί; γ) Είναι δυνατόν να βρεθούν πειραματικά οι διευθύνσεις του μεγάλου και του μικρού άξονα της έλλειψης; δ) Να υπολογιστεί η ελλειπτικότητα e της έλλειψης με τη βοήθεια ενός φωτοανιχνευτή. Στην πραγματικότητα θα πρέπει να μετρήσουμε τις εντάσεις $I_{\min}$ και $I_{\max}$. Τότε η e θα δίνεται από τη γνωστή σχέση:

$$e = \sqrt{I_{\min} / I_{\max}}$$

β) Παραγωγή Α.Ε.Π. φωτός

Ποια θα είναι ακριβώς η κατάσταση πόλωσης του φωτός όταν το αζιμούθιο του πολωτή $(\Pi)_1$ είναι $+20^0$ και ο ταχύς άξονας του πλακιδίου είναι παράλληλος με τον άξονα x.

ΠΕΙΡΑΜΑ A_5 ***Ανίχνευση τυχαίας κατάστασης πόλωσης***

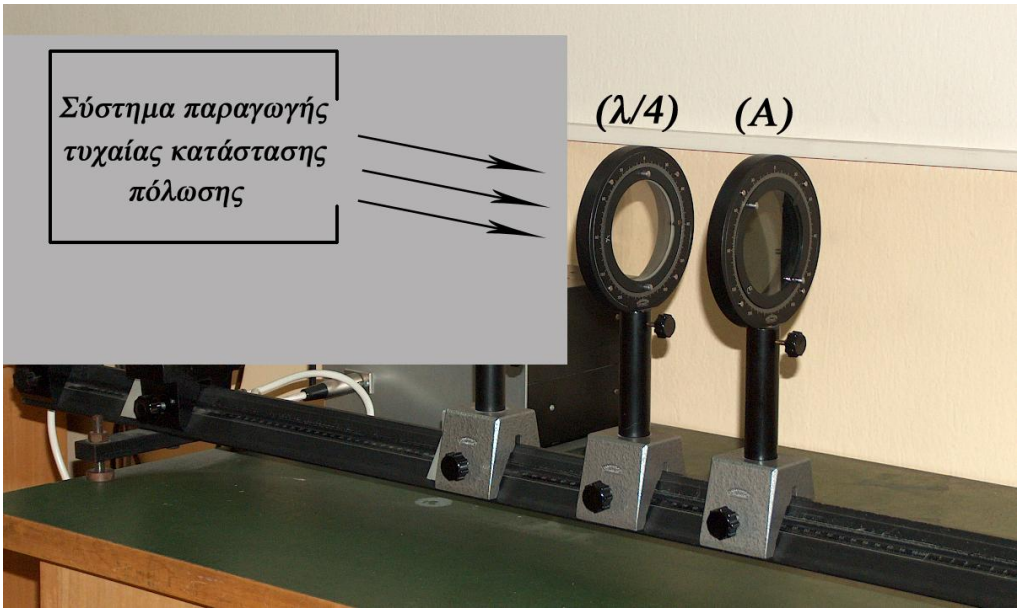
Οι καταστάσεις πόλωσης των δεσμών του φωτός τις οποίες θα κλιθούμε ν' ανιχνεύσουμε είναι οι εξής:

α) Φυσικό φως
β) Γραμμικά πολωμένο
γ) Κυκλικά πολωμένο (Α.Κ.Π. και Δ.Κ.Π.)
δ) Ελλειπτικά πολωμένο (Α.Ε.Π. και Δ.Ε.Π.)
ε) Μερικά πολωμένο φως

Για την τελευταία περίπτωση του μερικά πολωμένου φωτός διακρίνουμε για τις καταστάσεις που πρόκειται ν' ανιχνεύσουμε μίγματα:

α) Φυσικού φωτός και γραμμικά πολωμένου
β) Φυσικού φωτός και κυκλικά πολωμένου (Α.Κ.Π. και Δ.Κ.Π.)
γ) Φυσικού φωτός και ελλειπτικά πολωμένου (Α.Ε.Π. και Δ.Ε.Π.)

Για την ανίχνευση των παραπάνω φώτων χρειαζόμαστε ένα πολωτή (αναλυτής Α) και ένα πλακίδιο καθυστέρησης (λ/4). Στην (Εικ. Α5) βλέπουμε τη διάταξη. Αποτελείται από την πηγή που παράγει μια συγκεκριμένη κατάσταση πόλωσης και ακολουθούν τα δύο προαναφερόμενα στοιχεία. Η όλη διαδικασία χωρίζεται σε τρεις φάσεις (βλ. Διάγραμμα Α10).



(Εικ. Α5)

ΦΑΣΗ Α΄

Επιτρέπουμε την προς ανίχνευση δέσμη να περάσει μέσα από τον αναλυτή (Α) (χωρίς να παρεμβάλουμε το πλακίδιο (λ/4)) και παρατηρούμε τις μεταβολές της έντασης καθώς τον περιστρέφουμε.

Παρατήρηση Α΄ Δεν βλέπουμε μεταβολές στην ένταση του φωτός, οπότε αυτό θα μπορούσε να είναι: ***φυσικό φως*** ή ***κυκλικά πολωμένο*** ή ***μίγμα φυσικού φωτός και κυκλικά πολωμένου.***

Παρατήρηση Β΄ Κατά τη διάρκεια της περιστροφής του αναλυτή κατά 360^0 βλέπουμε δύο μέγιστα έντασης και δύο ελάχιστα (μη μηδενικά). Οπότε το φως αυτό θα μπορούσε να είναι: ***ελλειπτικά πολωμένο*** ή ***μίγμα ελλειπτικά πολωμένου φωτός*** και ***φυσικού*** ή ***μίγμα γραμμικά πολωμένου*** και ***φυσικού*** (***μερικά γραμμικά πολωμένο φως)***. Αν τώρα τοποθετήσουμε τον άξονα διέλευσης του αναλυτή στη θέση που λαμβάνουμε το μέγιστο της έντασης τότε η διεύθυνση αυτή θ'αντιστοιχεί: στη διεύθυνση του μέγιστου άξονα της έλλειψης για το ελλειπτικό φως ή το μερικά ελλειπτικό φως (μίγμα ελλειπτικού και φυσικού φωτός) ή στη διεύθυνση ταλάντωσης του ηλεκ. πεδίου της γραμμικής συνιστώσας του μερικά γραμμικά πολωμένου φωτός (μίγμα γραμμικού και φυσικού φωτός).

Παρατήρηση Γ΄ Κατά τη διάρκεια μιας πλήρους περιστροφής του αναλυτή βλέπουμε δύο μέγιστα έντασης και δύο μηδενικά ελάχιστα (κατασβέσεις). Στην περίπτωση αυτή το προς ανίχνευση φως θα είναι ***γραμμικά πολωμένο*** με διεύθυνση ταλάντωσης κάθετη προς τον άξονα διέλευσης του αναλυτή (Α) στη θέση κατάσβεσης.

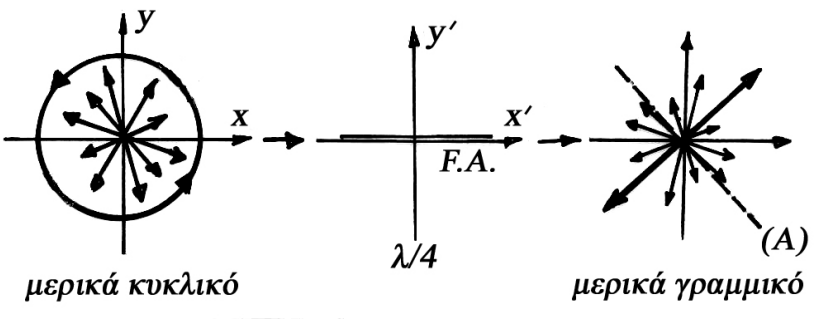
ΦΑΣΗ Β΄

Για να ξεχωρίσουμε τώρα τις καταστάσεις πόλωσης μεταξύ του φυσικού φωτός, του κυκλικά πολωμένου και του μερικά κυκλικά πολωμένου (μίγμα κυκλικού και φυσικού φωτός), θα χρησιμοποιήσουμε πριν τον αναλυτή (Α) ένα πλακίδιο καθυστέρησης (λ/4).

Κατά τα γνωστά το φυσικό φως αν περάσει από το (λ/4) δεν αλλάζει την κατάσταση πόλωσης του. Οπότε αν περιστρέψουμε τον αναλυτή μας κατά 360^0 δεν θα παρατηρήσουμε καμία μεταβολή στην ένταση. Αν συμβεί το τελευταίο, σημαίνει ότι το προς ανίχνευση φως είναι φυσικό.

Αν κατά την περιστροφή του αναλυτή παρατηρήσουμε μηδενικά ελάχιστα και η γωνία στη θέση κατάσβεσης μεταξύ του άξονα διέλευσης του αναλυτή και του ταχύ άξονα του πλακιδίου είναι 45^0 τότε το προς ανίχνευση φως θα είναι κυκλικά πολωμένο. Πράγματι το κυκλικό φως μπορούμε κατά τα γνωστά να το αναλύσουμε σε δύο συνιστώσες κάθετες και σύμφωνες μεταξύ τους με ίσα πλάτη και διαφορά φάσης π/2. Λόγω της πλήρους συμμετρίας του, οι άξονες των E_x, E_y (κάθετοι μεταξύ τους) μπορούν να πάρουν οποιοδήποτε προσανατολισμό άρα και να ταυτιστούν (ο καθένας ξεχωριστά) με τον ταχύ άξονα του (λ/4). Αυτό σημαίνει ότι η διαφορά φάσης μεταξύ των $E_{x'}, E_{y'}$ στην έξοδο του (λ/4) θα είναι 0 ή π. Άρα το φως θα είναι γραμμικά πολωμένο και θα μπορεί να κατασβεσθεί από τον αναλυτή. Το αν τώρα το κυκλικό φως είναι αριστερόστροφο ή δεξιόστροφο, εξαρτάται πρακτικά από τη φορά διάνυσης της γωνίας των 45^0 μεταξύ του ταχύ άξονα του (λ/4) και του άξονα διέλευσης του αναλυτή. Αν αυτή διαγράφεται δεξιόστροφα θα είναι Δ.Κ.Π. φως, αν διαγράφεται αριστερόστροφα θα είναι Α.Κ.Π. φως. Πάντα βέβαια βλέποντας το φως να έρχεται με κατεύθυνση από την πηγή προς εμάς και η διανυόμενη μεταξύ των αξόνων γωνία να είναι η μικρότερη.

Στην τρίτη περίπτωση όπου μετά την τοποθέτηση του πλακιδίου (λ/4) και του αναλυτή (σε 45^0 μεταξύ τους) παρατηρήσουμε μη μηδενικό ελάχιστο, τότε το



(Σχ. Α6)

φως που εξετάζουμε είναι μερικά κυκλικά πολωμένο (Σχ. Α6). Στην περίπτωση αυτή μπορούμε να μετρήσουμε μετά το (λ/4) μέσω του αναλυτή σε δύο κάθετες διευθύνσεις τις ποσότητες $I_{\min}$ και $I_{\max}$ (του εξερχόμενου από αυτόν φωτός), οπότε με βάση τη γνωστή σχέση:

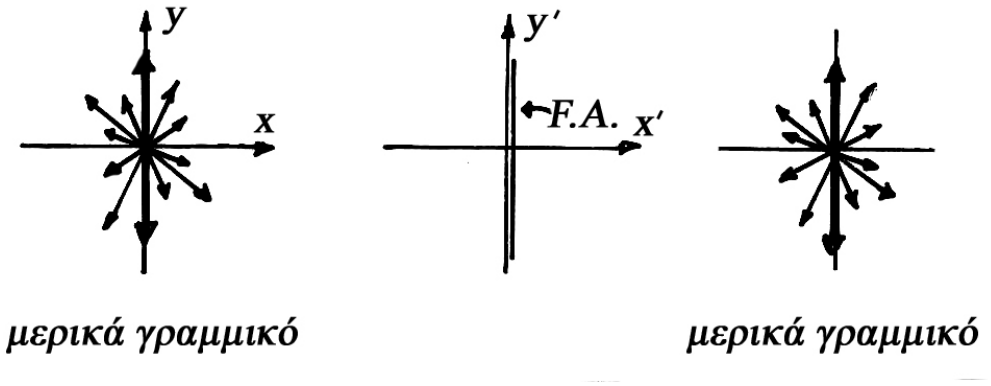
$$P = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}}$$

να υπολογίσουμε το ***βαθμό πόλωσης*** της δέσμης.

ΦΑΣΗ Γ΄

Προκειμένου σε τελική φάση να ξεχωρίσουμε τις καταστάσεις πόλωσης μεταξύ του μερικά γραμμικού, του ελλειπτικού και του μερικά ελλειπτικού φωτός, χρησιμοποιούμε πριν τον αναλυτή πάλι ένα πλακίδιο (λ/4). Όμως τώρα προσανατολίζουμε τον ταχύ άξονα του πλακιδίου παράλληλα με τη διεύθυνση όπου πριν τοποθετήσουμε το (λ/4) παρατηρούσαμε (με τον αναλυτή) μέγιστο έντασης (Σχ. Α7,Α8,Α9).

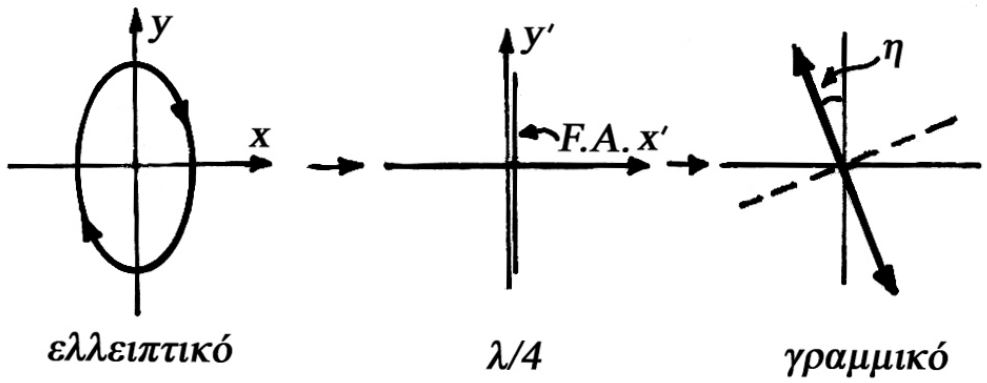
Αν η τοποθέτηση του (λ/4) δεν επηρεάζει την ένταση του φωτός, δηλ. περιστρέφοντας τον αναλυτή παρατηρούμε ακριβώς τα ίδια γεγονότα όπως και στην περίπτωση την χωρίς το (λ/4), τότε το φως θα είναι μερικά γραμμικά πολωμένο (Σχ. Α7). Η μέτρηση των $I_{\min}$ και $I_{\max}$ θα μας δώσει με τη βοήθεια της γνωστής σχέ-



(Σχ. Α7)

σης το βαθμό πόλωσης αυτού του φωτός.

Αν μετά την τοποθέτηση του (λ/4) με τον προσανατολισμό που προαναφέραμε, κατά την περιστροφή του αναλυτή πάρουμε μηδενικά ελάχιστα, τότε το προς



(Σχ. Α8)

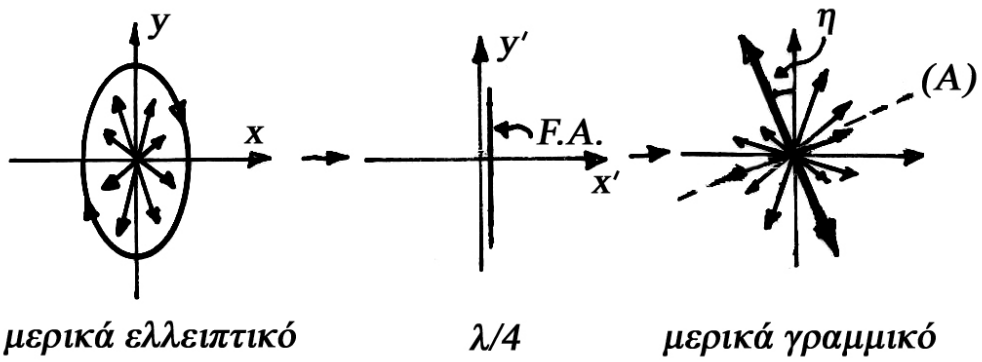
ανίχνευση φως θα είναι ελλειπτικά πολωμένο (Σχ.Α8). Πράγματι η τοποθέτηση του ταχύ άξονα του (λ/4) στη διεύθυνση του μεγάλου άξονα της έλλειψης (Σχ. Α8) μετατρέπει το Ε.Π.Φ. σε γραμμικά πολωμένο κατά γωνία $\pm\eta = \arctan\sqrt{I_{\min}/I_{\max}}$ (+ ή - : Δ.Ε.Π. ή Α.Ε.Π. αντίστοιχα). Το φως αυτό τελικά μπορεί να κατασβησθεί από τον αναλυτή.

Αν τέλος μετά την τοποθέτηση του (λ/4) με το γνωστό προσανατολισμό του ταχύ άξονα στη θέση του μεγίστου, παίρνουμε με τη βοήθεια αναλυτή μέγιστα έντασης στη διεύθυνση κατά γωνία η σε σχέση με τον ταχύ άξονα του πλακιδίου και ελάχιστα κάθετα προς αυτήν, τότε το φως θα είναι μερικά ελλειπτικά πολωμένο (Σχ. Α9). Κατά τα γνωστά:

$$I_{\max} = I_{pol} + \frac{1}{2} I_{unpol}$$

όπου I_{pol} : η πολωμένη συνιστώσα της έντασης και $I_{unpol}/2$ η συνιστώσα του φυσικού φωτός στη διεύθυνση που παίρνουμε μέγιστη ένταση. Επίσης:

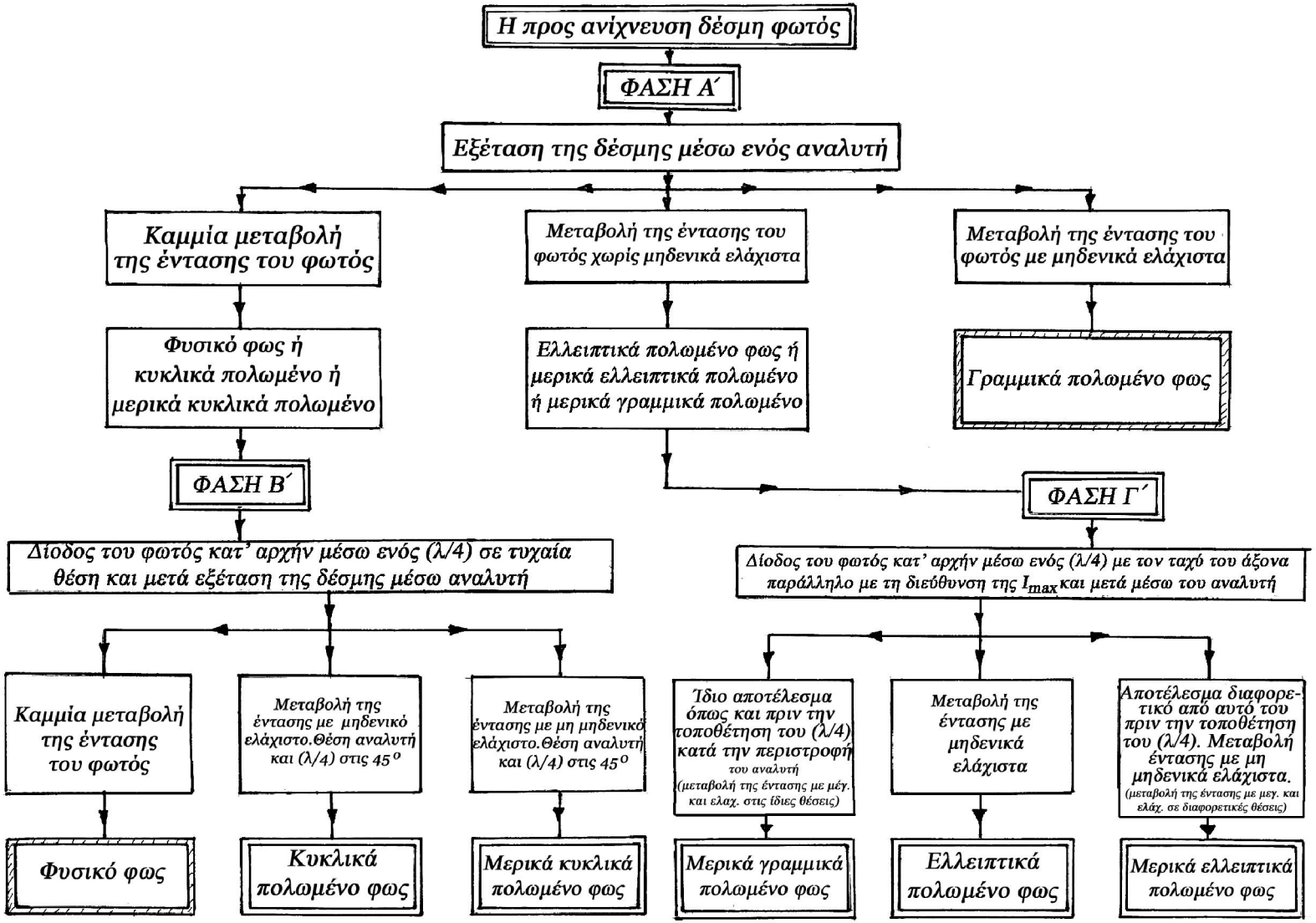
$$I_{\min} = \frac{1}{2} I_{unpol}$$



(Σχ. Α9)

είναι η συνιστώσα της έντασης σε διεύθυνση κάθετη προς την προηγούμενη. Οπότε ο βαθμός πόλωσης θα είναι:

$$P = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}} = \frac{I_{pol}}{I_{pol} + I_{unpol}} = \frac{I_{pol}}{I_{tot}}$$

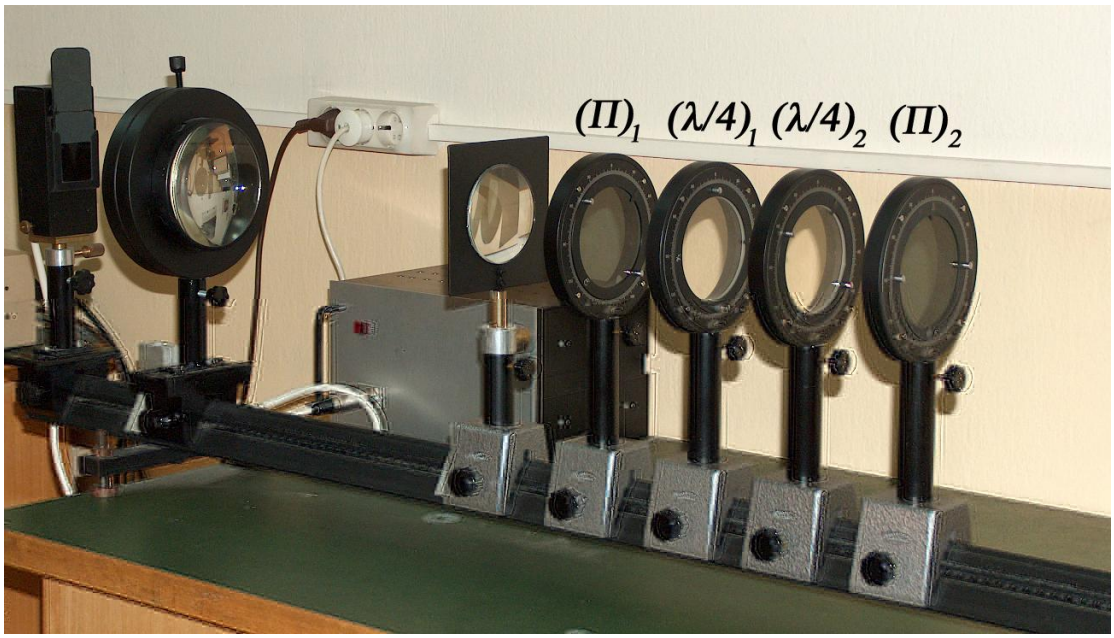

Η προς ανίχνευση δέσμη φωτός
ΦΑΣΗ Α΄
Εξέταση της δέσμης μέσω ενός αναλυτή
Καμμία μεταβολή της έντασης του φωτός
Μεταβολή της έντασης του φωτός χωρίς μηδενικά ελάχιστα
Μεταβολή της έντασης του φωτός με μηδενικά ελάχιστα
Φυσικό φως ή κυκλικά πολωμένο ή μερικά κυκλικά πολωμένο
Ελλειπτικά πολωμένο φως ή μερικά ελλειπτικά πολωμένο ή μερικά γραμμικά πολωμένο
Γραμμικά πολωμένο φως
ΦΑΣΗ Β΄
ΦΑΣΗ Γ΄
Δίοδος του φωτός κατ' αρχήν μέσω ενός (λ/4) σε τυχαία θέση και μετά εξέταση της δέσμης μέσω αναλυτή
Δίοδος του φωτός κατ' αρχήν μέσω ενός (λ/4) με τον ταχύ του άξονα παράλληλο με τη διεύθυνση της I_{max} και μετά μέσω του αναλυτή
Καμμία μεταβολή της έντασης του φωτός
Μεταβολή της έντασης με μηδενικό ελάχιστο. Θέση αναλυτή και (λ/4) στις 45°
Μεταβολή της έντασης με μη μηδενικό ελάχιστο. Θέση αναλυτή και (λ/4) στις 45°
Ίδιο αποτέλεσμα όπως και πριν την τοποθέτηση του (λ/4) κατά την περιστροφή του αναλυτή (μεταβολή της έντασης με μέγ. και ελαχ. στις ίδιες θέσεις)
Μεταβολή της έντασης με μηδενικά ελάχιστα
Αποτέλεσμα διαφορετικό από αυτό του πριν την τοποθέτηση του (λ/4). Μεταβολή έντασης με μη μηδενικά ελάχιστα. (μεταβολή της έντασης με μεγ. και ελάχ. σε διαφορετικές θέσεις)
Φυσικό φως
Κυκλικά πολωμένο φως
Μερικά κυκλικά πολωμένο φως
Μερικά γραμμικά πολωμένο φως
Ελλειπτικά πολωμένο φως
Μερικά ελλειπτικά πολωμένο φως

(Διάγ. Α10)

ΠΕΙΡΑΜΑ A_6 *Επίδραση του πλακιδίου (λ/2) στις διάφορες καταστάσεις πόλωσης*

α) Επίδραση του (λ/2) στο γραμμικά πολωμένο φως

Στην (Εικ. Α11) τοποθετούμε τον πολωτή $(\Pi)_1$ σε αζιμούθιο θ (π.χ. $+30^0$). Κατόπιν τοποθετούμε τα πλακίδια $(\lambda/4)_1$ και $(\lambda/4)_2$ (είναι ακριβώς τα ίδια) έτσι ώστε οι ταχείς τους άξονες να είναι παράλληλοι. Με αυτόν τον τρόπο δημιουργούμε ένα πλακίδιο (λ/2) ο ταχύς άξονας του οποίου θα ταυτίζεται με αυτούς των δύο (λ/4). Τοποθετούμε κατόπιν τον ταχύ άξονα του (λ/2) παράλληλο με τον άξονα των y. 1) Περιγράψτε με εξισώσεις τις δύο συνιστώσες E_x, E_y του ηλεκτρικού πεδίου για το φως που βγαίνει από το πλακίδιο (λ/2). Ποια θα είναι η κατάσταση πόλωσης αυτού του φωτός ; 2) Μετά το πλακίδιο (λ/2) τοποθετούμε τον πολωτή $(\Pi)_2$ και τον περιστρέφουμε. Επιβεβαιώστε τους υπολογισμούς που κάνατε προηγουμένως για την κατάσταση πόλωσης αυτού του φωτός.



(Εικ. Α11)

β) Επίδραση του (λ/2) στο ελλειπτικά πολωμένο φως

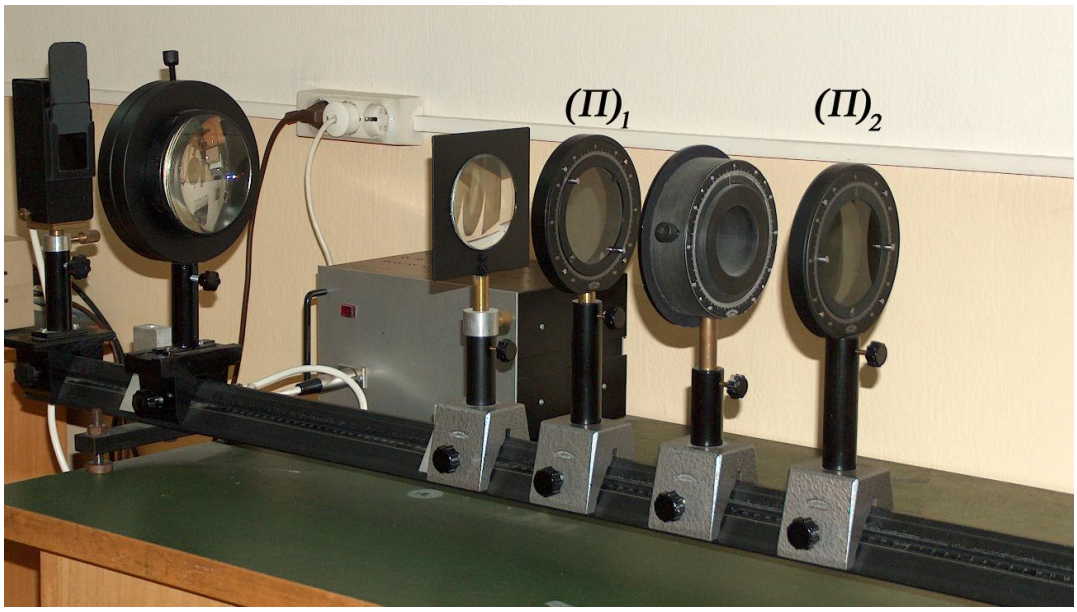
Αντί τώρα του γραμμικά πολωμένου φωτός, στο (λ/2) προσπίπτει ένα δεξιόστροφα ελλειπτικά πολωμένο φως με τον μέγιστο άξονα της έλλειψης σε αζιμούθιο $+30^0$. Ποια θα είναι η κατάσταση πόλωσης του φωτός που βγαίνει από το πλακίδιο;

γ) Επίδραση του (λ/2) στο κυκλικά πολωμένο φως

Στο πλακίδιο (λ/2) προσπίπτει Δ.Κ.Π. φως. Ποια θα είναι η κατάσταση πόλωσης του φωτός που βγαίνει από το πλακίδιο;

ΠΕΙΡΑΜΑ A_7 *Συμπεριφορά του Σελοτέιπ σαν ανισότροπο υλικό*

Στη διάταξη της (Εικ. Α12), ανάμεσα σε δυο διασταυρωμένους πολωτές $(Π)_1$ και $(Π)_2$ τοποθετούμε ένα περιστρεφόμενο πλαίσιο στο οποίο μπορούμε να στηρίξουμε ένα πλακίδιο από γυαλί. Γνωρίζουμε ότι το γυαλί σαν ομογενές και ισότροπο διηλεκτρικό δεν αλλάζει την κατάσταση πόλωσης του φωτός που περνάει δια μέσου του, εφόσον προσπέσει κάθετα σ' αυτό. Τη μια του επιφάνεια την έχουμε καλύψει με κατακόρυφες λουρίδες σελοτέιπ χωρίς η μια να υπερκαλύπτει την άλλη. Βλέπουμε μέσω του πολωτή $(Π)_2$ τη γυάλινη πλάκα στην αρχική της θέση (λουρίδες κατακόρυφες) και κατόπιν αφού την στρέψουμε κατά 45^0 και 90^0 . Τι ακριβώς παρατηρούμε και τι ακριβώς μπορούμε να συμπεράνουμε όσον αφορά για το αν το υλικό από το οποίο είναι κατασκευασμένο το σελοτέιπ είναι ισότροπο ή ανισότροπο;



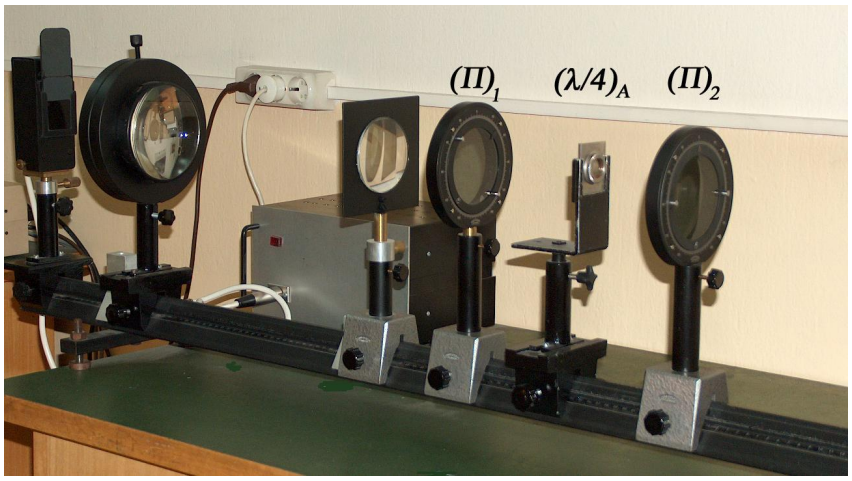
(Εικ. Α12)

Επαναλαμβάνουμε το ίδιο πείραμα, όπου τώρα όμως τη γυάλινη πλάκα την έχουμε καλύψει με επάλληλα στρώματα σελοτέιπ διαφορετικού προσανατολισμού. Την τοποθετούμε κατόπιν ανάμεσα στους διασταυρωμένους πολωτές. Τι θα παρα-

τηρήσουμε και γιατί. Τι θα δούμε όταν περιστρέψουμε τη γυάλινη πλάκα; Τι βλέπουμε όταν φωτίσουμε τη διάταξη με μια πηγή λευκού φωτός;

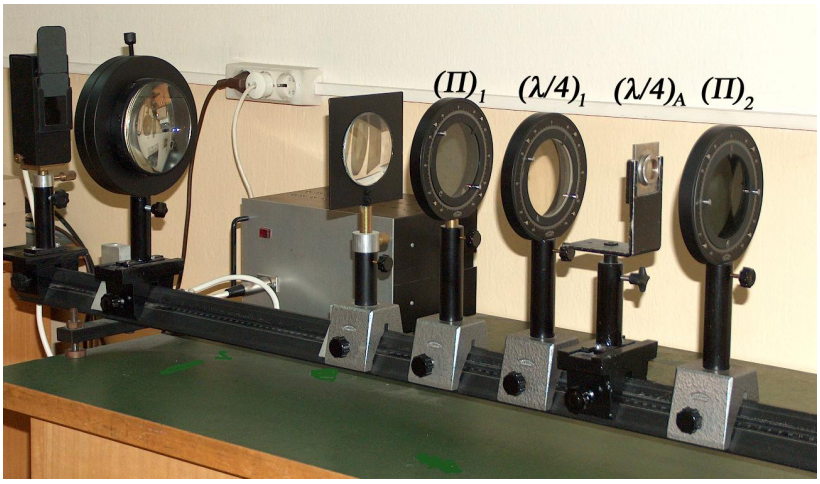
ΠΕΙΡΑΜΑ A_8 ***Προσδιορισμός του προσανατολισμού και του είδους των αξόνων αγνώστου πλακιδίου καθυστέρησης (λ/4)***

Ο προσδιορισμός αυτός γίνεται σε δύο φάσεις: α) όπως φαίνεται στην (Εικ. Α13), τοποθετούμε κατ' αρχήν το άγνωστο πλακίδιο (λ/4) μεταξύ δύο διασταυρωμένων πολωτών. Κατόπιν περιστρέφουμε το πλακίδιο αυτό μέχρις ότου παρα-



(Εικ. Α13)

τηρήσουμε ξανά κατάσβεση. Τι συμπέρασμα βγάζετε όσον αφορά τον προσανατολισμό των αξόνων του αγνώστου πλακιδίου; Αν τελικά τους καθορίσετε, σημειώστε τους στο μεταλλικό πλαίσιο που συγκρατεί το πλακίδιο.



(Εικ. Α14)

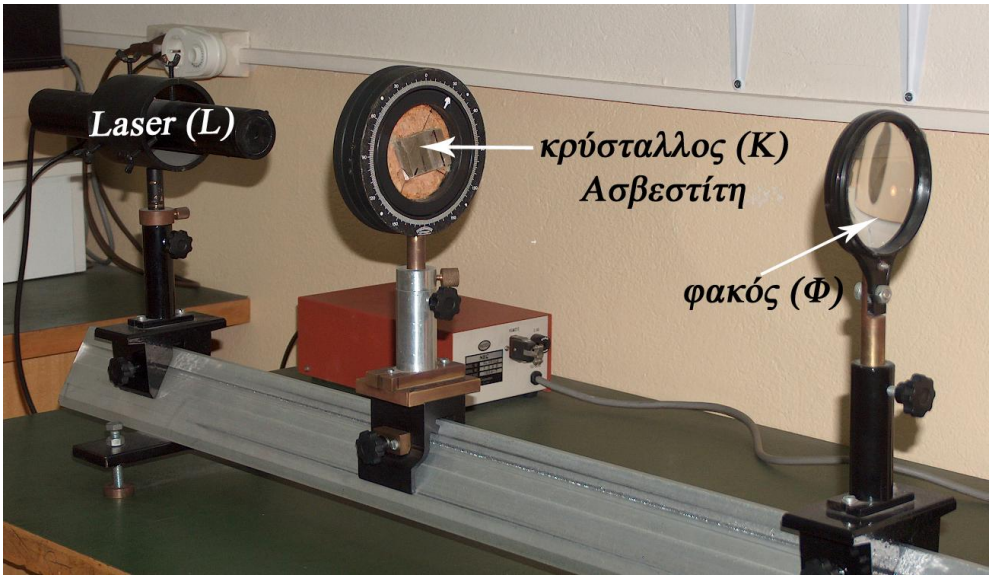
β) Τοποθετούμε πάλι τους δύο πολωτές σε θέση κατάσβεσης (Εικ. Α14). Τώρα μετά τον πολωτή $(\Pi)_1$ τοποθετούμε ένα γνωστό πλακίδιο $(\lambda/4)_1$ από το ίδιο υλικό με αζιμούθιο 45^0 σε σχέση με τον κατακόρυφο άξονα διέλευσης του $(\Pi)_1$. Κατόπιν περιστρέφουμε το άγνωστο πλακίδιο (του οποίου όμως προηγουμένως έχουμε προσδιορίσει τις διευθύνσεις των αξόνων του) μέχρις ότου πάρουμε πάλι κατάσβεση. Μετά τη διαδικασία αυτή ποιος συλλογισμός μας οδηγεί στο να καθορίσουμε το είδος των αξόνων (ταχύς και βραδύς) του αγνώστου πλακιδίου (λ/4);

Β΄ ΣΕΙΡΑ ΠΕΙΡΑΜΑΤΩΝ

ΠΕΙΡΑΜΑΤΑ ΔΙΠΛΗΣ ΔΙΑΘΛΑΣΗΣ ΤΟΥΦΩΤΟΣ ΜΕ ΤΟΝ ΚΡΥΣΤΑΛΛΟ ΤΟΥ ΑΣΒΕΣΤΙΤΗ

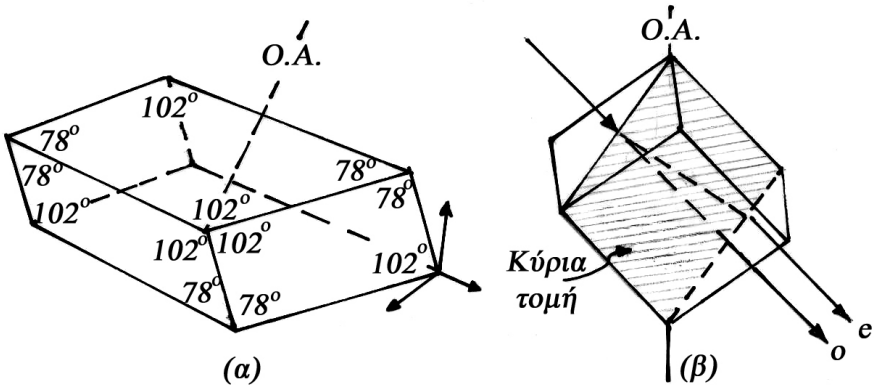
ΠΕΙΡΑΜΑ B_1 ***Ανάδειξη της τακτικής και της έκτακτης ακτίνας κατόπιν διπλής διάθλασης του φωτός και η κατάσταση πόλωσης τους***

Η πειραματική διάταξη μέσω της οποίας εκτελείται αυτό το πείραμα φαίνεται στην (Εικ. Β1). Διακρίνουμε: α) Έναν Laser He-Ne ο οποίος εκπέμπει μια λε-



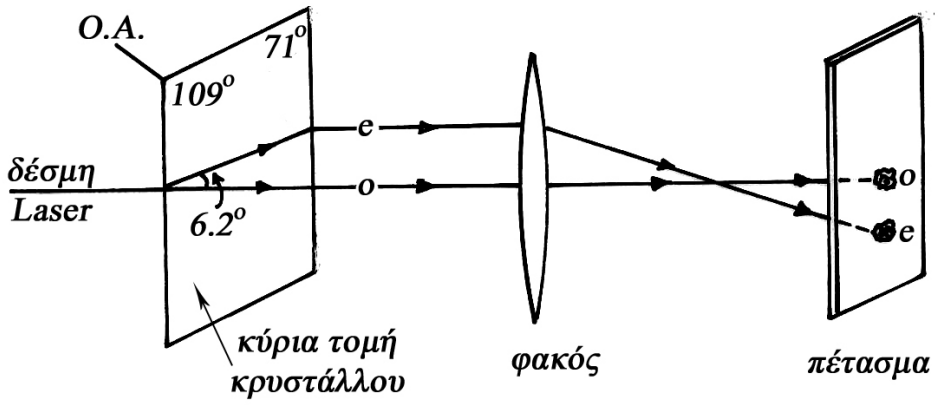
(Εικ. Β1)

πτής διατομής δέσμη φυσικού φωτός (μ.κ. $\lambda = 6328$ Å). β) Ένα κρύσταλλο Ασβεστίτη, στη φυσική σχισμογενή μορφή του όπως φαίνεται στα (Σχ. Β2α,β). Ο κρύσταλλος είναι τοποθετημένος μέσα σε περιστρεφόμενο (βαθμολογημένο σε μοίρες) πλαίσιο, έτσι που να υπάρχει δυνατότητα η δέσμη του Laser να πέφτει κάθετα σε μια από τις έδρες του και συγχρόνως να είναι παράλληλη με μια από τις κύριες τομές του (Σχ. Β2β και Β3). Τα επίπεδα των κυρίων τομών είναι σημειωμένα περιμετρικά γύρω από τον κρύσταλλο και για μια πιο εποπτική ματιά μπορούμε να περιεργαστούμε το μοντέλο του της (Εικ. 4). Με τα δεδομένα αυτά, έχουμε τη δυνατότητα περιστρέφοντας τον κρύσταλλο να φέρουμε τον οπτικό του άξονα έτσι ώστε να είναι παράλληλος με την τράπεζα εργασίας. Τότε η ένδειξη της άντιγας στην κλίμακα του πλαισίου θα είναι στις 90^0.



(Σχ. Β2)

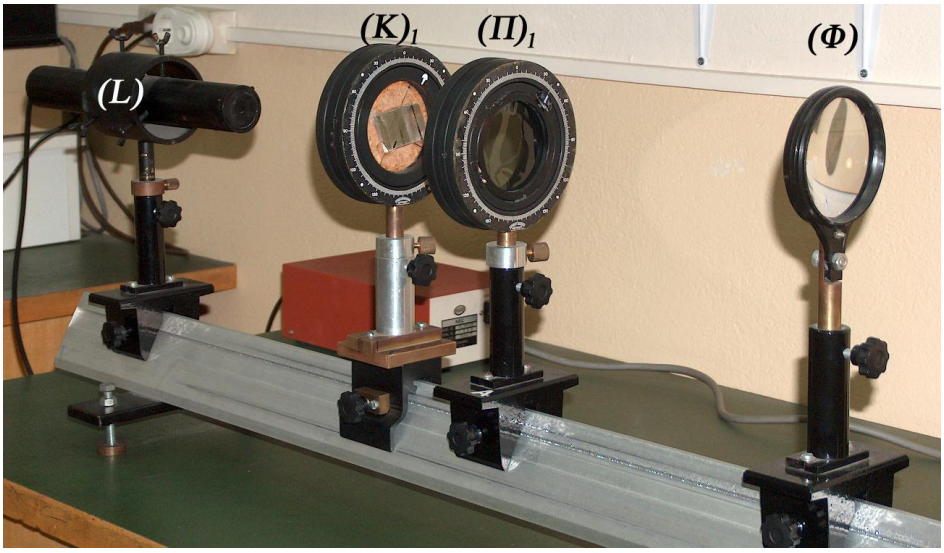
Αμέσως μετά τον κρύσταλλο τοποθετούμε ένα πέτασμα πάνω στο οποίο διακρίνουμε δύο φωτεινές κηλίδες οι οποίες αντιστοιχούν στα ίχνη τις τακτικής και της έκτακτης ακτίνας. Οι κηλίδες απέχουν πολύ λίγο μεταξύ τους. Και προκειμένου να κάνουμε το φαινόμενο πιο διακριτό, μετά τον κρύσταλλο τοποθετούμε ένα θετικό συγκλίνοντα φακό. Ο φακός θα προβάλλει τις δύο κηλίδες με μεγέθυνση, σε ένα πέτασμα που απέχει περίπου 1m από τον τελευταίο.



(Σχ. Β3)

α) Περιστρέφοντας τον κρύσταλλο βλέπουμε τη μία κηλίδα (που αντιστοιχεί στην τακτική ακτίνα) να μένει ακίνητη ενώ η άλλη (της έκτακτης) περιστρέφεται σε μια απόσταση γύρω από την πρώτη. Γιατί συμβαίνει αυτό;

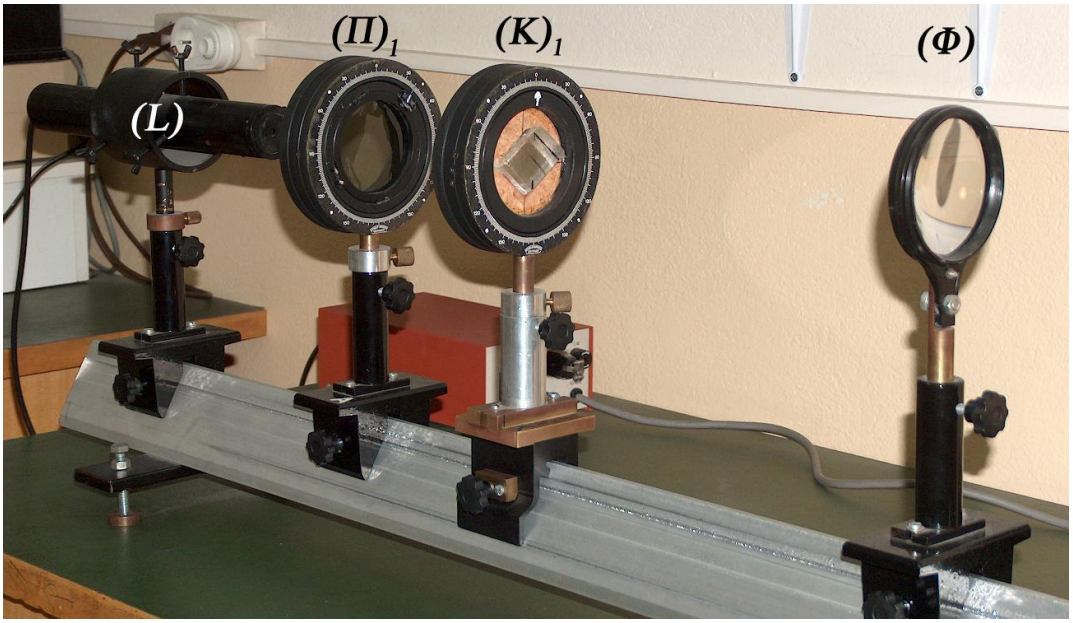
β) Τοποθετούμε μεταξύ κρυστάλλου και του φακού έναν περιστρεφόμενο γραμμικό πολωτή (Polaroid) (Εικ. Β4). Είναι βαθμολογημένος σε μοίρες και η άντιγά του μας δίνει τη διεύθυνση του άξονα διέλευσης του. Με τη διάταξη αυτή



(Εικ. Β4)

είναι δυνατόν ν' ανιχνεύσουμε τις καταστάσεις πόλωσης της τακτικής και της έκτακτης ακτίνας. Περιστρέφοντας τον πολωτή μεταξύ των αζιμουθίων $0^0 \rightarrow 90^0$ και βλέποντας στο πέτασμα ποια από τις δύο κηλίδες κατασβήνεται, μπορούμε να συμπεράνουμε για την κατάσταση πόλωσής τους σε σχέση με τον οπτικό άξονα του κρυστάλλου.

γ) Επανατοποθετούμε τα στοιχεία της διάταξης έτσι που ο πολωτής να βρεθεί μεταξύ του Laser και του κρυστάλλου. Ο κρύσταλλος να βρίσκεται με τον οπτικό του άξονα παράλληλο με την τράπεζα εργασίας (άντιγα στις 90^0) (Εικ. Β5).



(Εικ. Β5)

Περιστρέφοντας τον πολωτή βλέπουμε στο πέτασμα – για την κάθε μια από τις δύο κηλίδες – (όχι ταυτόχρονα) ν' αυξομειώνουν τις εντάσεις τους από το μηδέν μέχρις μια μέγιστη τιμή. Οι κηλίδες αποκτούν την ίδια ένταση όταν ο πολωτής βρίσκεται σε αζιμούθιο 45^0 σε σχέση με το επίπεδο που βρίσκεται ο οπτικός του άξονας. Πώς εξηγείται το γεγονός αυτό; Ποιες είναι οι καταστάσεις πόλωσης των δύο δεσμών για κάθε θέση του πολωτή; Το τελευταίο θα απαντηθεί αν μετά τον κρύσταλλο τοποθετηθεί δεύτερος πολωτής (αναλυτής) και περιστραφεί, για να ιδωθεί σε ποιες θέσεις υφίστανται κατασβέσεις των κηλίδων πάνω στο πέτασμα.

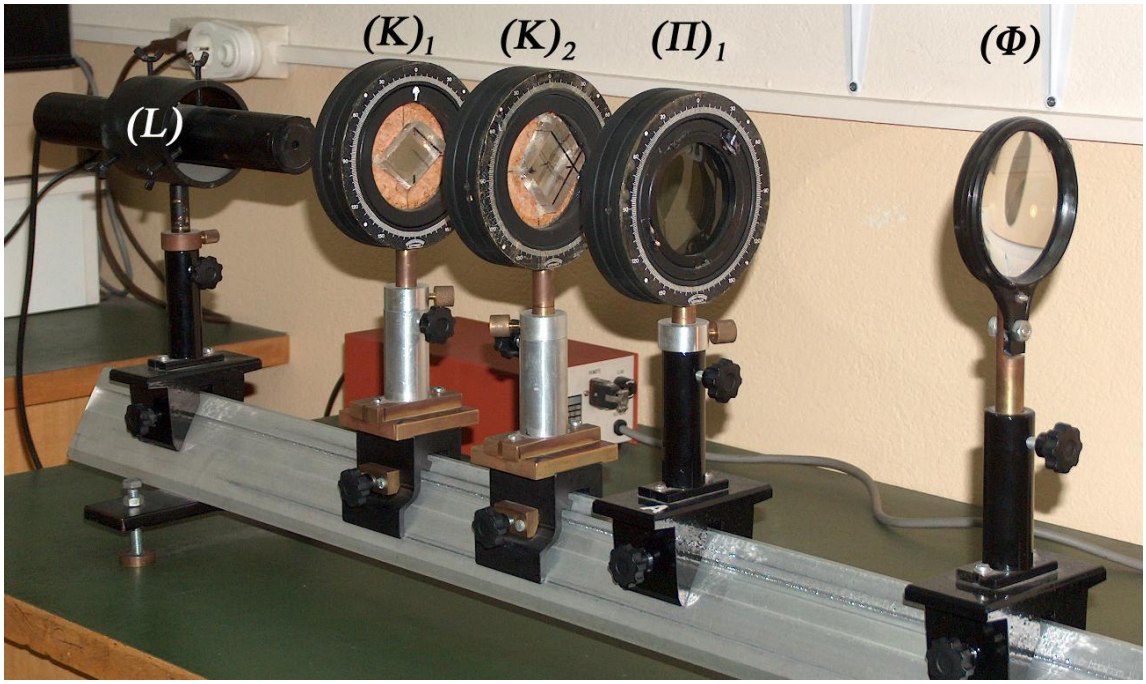
ΠΕΙΡΑΜΑ B_2 ***Διπλή διάθλαση από το συνδυασμό δύο ομοίων κρυστάλλων***

Στη διάταξη που φαίνεται στην (Εικ. Β6) μετά τον Laser τοποθετούμε δύο κρυστάλλους ίδιους με αυτόν που περιγράψαμε προηγουμένως. Το πάχος τους είναι σχεδόν το ίδιο. Τους προσανατολίζουμε με τέτοιο τρόπο έτσι ώστε:

α) Οι οπτικοί τους άξονες να είναι παράλληλοι (Σχ. Β7α). Γεγονός το οποίο μπορεί να συμβεί όταν π.χ. οι άντιγές τους δείχνουν το 90^0 της κλίμακάς τους (οπτικοί άξονες παράλληλοι με την τράπεζα εργασίας).

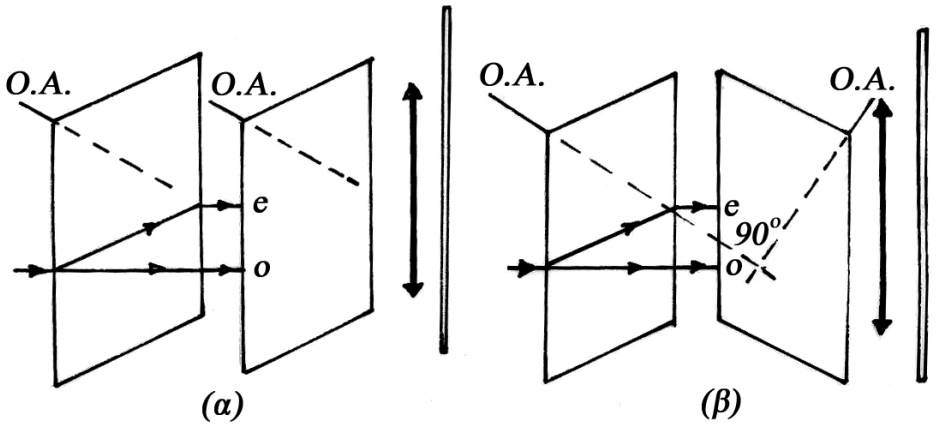
β) Οι οπτικοί τους άξονες να είναι κάθετοι μεταξύ τους (Σχ. Β7β) (π.χ. άντιγα του πρώτου στη θέση $+90^0$ και του δεύτερου στη θέση -90^0).

Τι ακριβώς θα παρατηρήσουμε όσον αφορά τις θέσεις των κηλίδων στο πέρασμα για τις δύο περιπτώσεις; Σε τι κατάσταση πόλωσης βρίσκονται; Τι ακρι-



(Εικ. Β6)

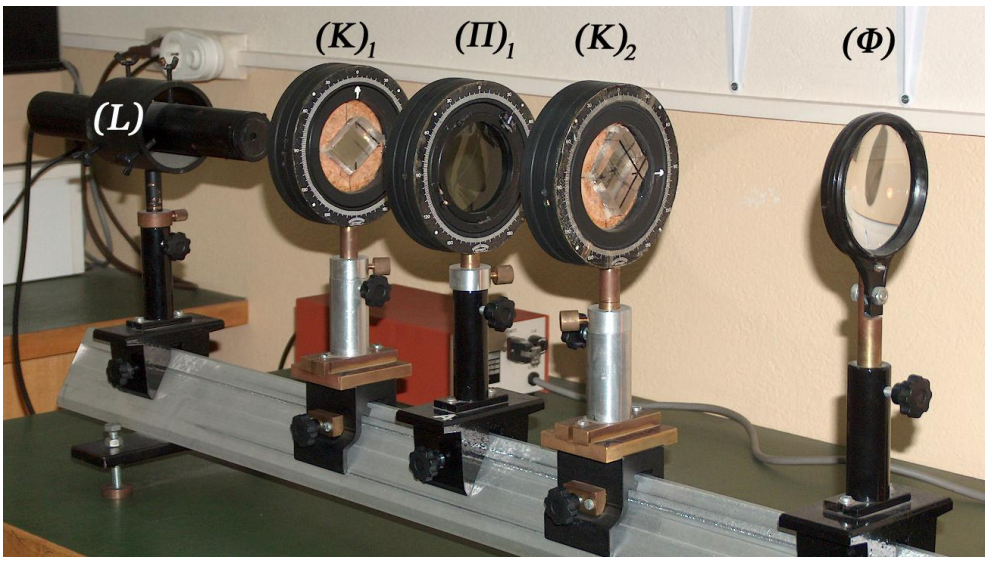
βώς θα συμβεί αν π.χ. μεταβάλουμε την καθετότητα (ή την παραλληλότητα) των οπτικών αξόνων στιχειωδώς; (δηλ. οι οπτικοί άξονες να είναι δύο ευθείες ασύμβατες στο χώρο).



(Σχ. Β7)

ΠΕΙΡΑΜΑ B_3

Στη διάταξη της (Εικ. Β8), μετά το Laser τοποθετούμε δύο κρυστάλλους τη μια φορά με τους οπτικούς άξονες παραλλήλους (όπως στο Σχ. Β7α) και την άλλη κάθετους (όπως στο Σχ. Β7β). Μεταξύ των δύο κρυστάλλων παρεμβάλλουμε πολωτή με αζιμούθιο 45^0 σε σχέση με την κατακόρυφη στην τράπεζα εργασίας. Κατόπιν φωτίζουμε τη διάταξη με τη δέσμη του Laser (φυσικό φως). Μετά τη διέλευση του φωτός από τα υπόλοιπα στοιχεία, στο πέτασμα μετά το φακό, παρατη-

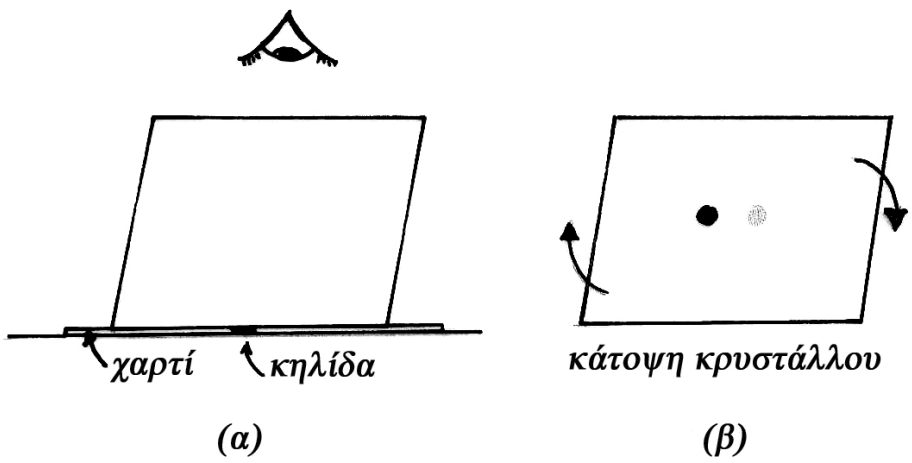


(Σχ. Β8)

ρούνται τρεις συνολικά ισαπέχουσες κηλίδες (και στις δύο περιπτώσεις προσανατολισμού των κρυστάλλων). Να ερμηνευθεί το φαινόμενο όπως και οι κατάσταση πόλωσης των τριών δεσμών.

ΠΕΙΡΑΜΑ B_4

Διαθέτουμε ένα κομμάτι Ισλανδικής κρυστάλλου στη σχισμογενή της μορφή. Την τοποθετούμε με τη μια της πλευρά στην τράπεζα εργασίας πάνω σ' ένα φύλλο χαρτιού στο οποίο έχουμε σημειώσει μια μαύρη κουκίδα διαμέτρου π.χ.



(Σχ. Β9)

2mm (Σχ. Β9α). Κοιτάζοντας από την πάνω επιφάνεια, παρατηρούμε κατ' ευθείαν το φαινόμενο της διπλής διάθλασης (Σχ. Β9β). Δηλ. εμφανίζονται δύο κηλίδες που θα αντιστοιχούν στην τακτική και την έκτακτη ακτίνα. Η μία από αυτές φαίνεται να βρίσκεται πιο ψηλά από την άλλη (δηλ. παρουσιάζει φαινόμενη ανύψωση). Επίσης αν περιστρέψουμε τον κρύσταλλο με άξονα περιστροφής κάθετο στην τράπεζα εργασίας, η μια από τις κηλίδες μένει ακίνητη ενώ η άλλη περιστρέφεται.

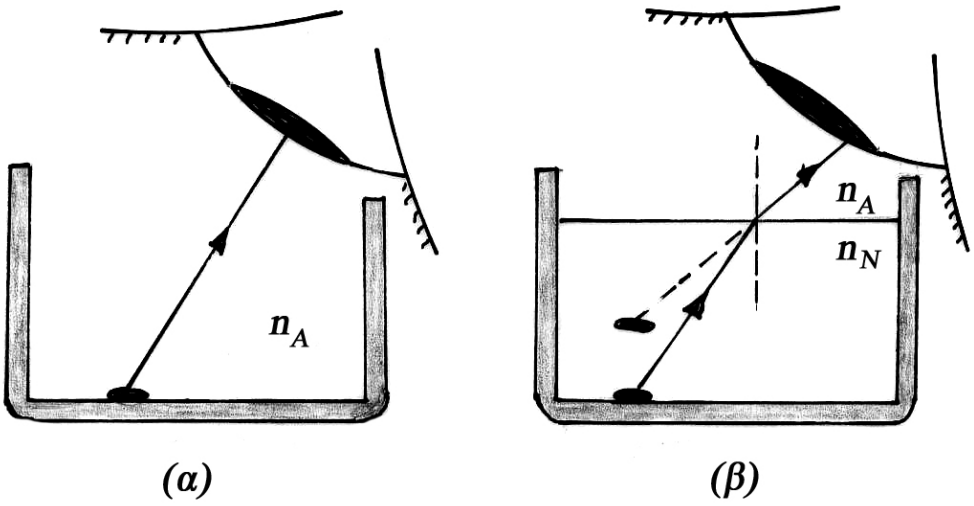
α) Με βάση τα φαινόμενα (διαδικασία περιστροφής), να συμπεράνετε για το ποια από τις δύο κηλίδες αντιστοιχεί στην τακτική και ποια στην έκτακτη.

β) Με τη βοήθεια του ***φαινομένου της φαινόμενης*** ανύψωσης ν' αποφανθείτε για το αν ο κρύσταλλος είναι θετικός ή αρνητικός.

Υπόδειξη

Όπως γνωρίζουμε από τη θεωρία, τα δύο μέτωπα κύματος (που σχετίζονται με την τακτική και την έκτακτη ακτίνα) διαδίδονται με διαφορετικές ταχύτητες φάσης. Τα γεγονός αυτό αντιστοιχεί – θα μπορούσαμε να πούμε – στη διάδοσή τους

σε υλικά μέσα με διαφορετικό δείκτη διάθλασης. Επακόλουθο αυτής της κατάστασης είναι η ανάδειξη του φαινομένου της ***φαινόμενης ανύψωσης*** της μιας κηλίδας σε σχέση με την άλλη, όταν παρατηρούμε τη διπλή διάθλαση μέσω του κρυστάλλου. Την κατάσταση αυτή θα μπορούσαμε να την εξομοιώσουμε με την περίπτωση, του πού ακριβώς βλέπουμε με το μάτι μας ένα νόμισμα που βρίσκεται στη βάση ενός δοχείου όταν το τελευταίο: α) είναι άδειο (δ.δ. αέρα n_A) και β) όταν το δοχείο γεμίζεται με νερό δ.δ. n_N $(n_N > n_A)$ (Σχ. Β10).



(Σχ. Β10)

Στην πρώτη περίπτωση (Σχ. Β10α) μια ακτίνα φωτός φεύγει από ένα σημείο του νομίσματος και κατευθυνόμενη ευθύγραμμα μπαίνει στο μάτι μας. Στη δεύτερη όμως περίπτωση (Σχ. Β10β), επειδή $n_N > n_A$ η ίδια ακτίνα φεύγοντας από το νόμισμα καθώς φθάνει στην επιφάνεια του νερού, αλλάζει κατεύθυνση (διαθλάται) προκειμένου να φθάσει πάλι σ' εμάς. Επειδή όμως το μάτι μας ***βλέπει προς την προέκταση αυτής της ακτίνας*** (Σχ. Β10β), το γεγονός θα έχει σαν αποτέλεσμα, να βλέπουμε το νόμισμα φαινομενικά πιο ψηλά από την θέση την οποία κατέχει στη βάση του δοχείου.

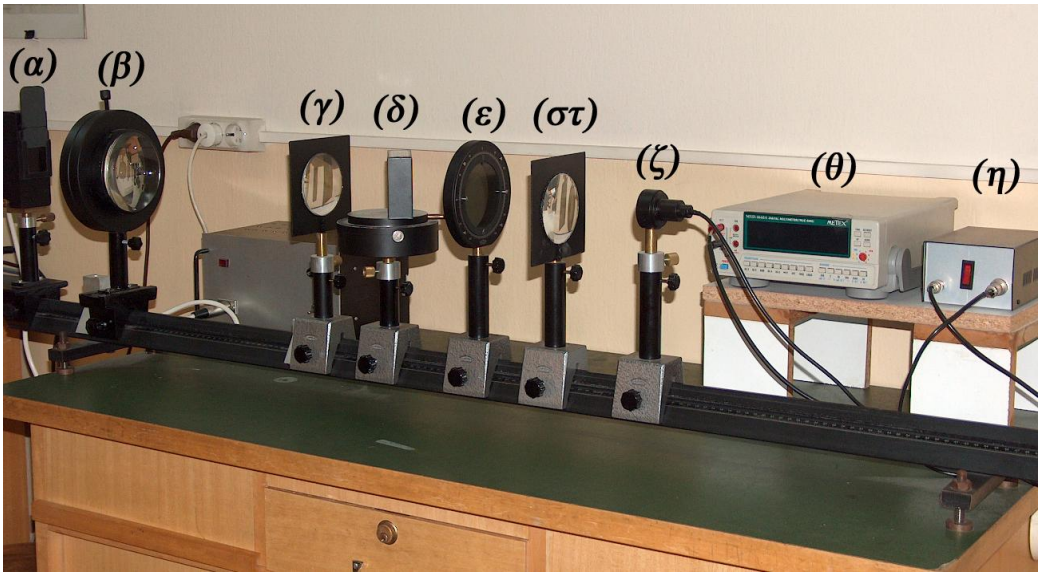
γ) Είναι δυνατόν με ένα κομμάτι πολωτή (Polaroid) να βρούμε (κοιτάζοντας τον κρύσταλλο από πάνω) την κατάσταση πόλωσης των δύο αναδυομένων διαταραχών;

Γ΄ ΣΕΙΡΑ ΠΕΙΡΑΜΑΤΩΝ

ΠΟΛΩΣΗ ΤΟΥ ΦΩΤΟΣ
ΑΠΟ ΑΝΑΚΛΑΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑΘΛΑΣΗ
ΝΟΜΟΣ ΤΟΥ MALUS

ΠΕΙΡΑΜΑ $Γ_1$ *Πόλωση από διάθλαση μέσω συστήματος παραλλήλων πλακών*

Στο πείραμα αυτό καλούμαστε να μετρήσουμε το ***βαθμό πόλωσης*** του μερικά γραμμικά πολωμένου φωτός. Το τελευταίο προκύπτει από τη διάθλαση μέσω μιας δεσμίδας παραλλήλων πλακών από γυαλί (διηλεκτρικό) του ίδιου ή διαφορετικού πάχους αλλά του ίδιου δ.δ. Οι μετρήσεις γίνονται με τη βοήθεια της διάταξης



(Εικ. Γ1)

της (Εικ. Γ1). Αποτελείται από: (α) Μια φασματική λυχνία Na, σαν πηγή μονοχρωματικού φυσικού φωτός ($\lambda_{Na} \simeq 5892$ Å). (β) Έναν συμπυκνωτή φακό, για την όσο το δυνατόν μεγαλύτερη συγκέντρωση φωτός από την έξοδο της λυχνίας. (γ) Έναν θετικό φακό, με τη βοήθεια του οποίου (σε συνδυασμό με τον προηγούμενο), μπορούμε τελικά να πάρουμε ένα (σχεδόν) επίπεδο μέτωπο κύματος φυσικού φωτός. Το σύστημα αυτό των τριών στοιχείων μένει αμετάθετο σ' όλη τη διάρκεια του πειράματος. (δ) Τη γωνιομετρική τράπεζα που χρησιμοποιείται για την τοποθέτηση της εκάστοτε δεσμίδας παραλλήλων πλακών. Με ορισμένη περιστροφή, μπορούμε να δώσουμε την κατάλληλη κλίση στις πλάκες. Δηλ. το φως να πέφτει πάνω τους

με μια συγκεκριμένη γωνία πρόσπτωσης. (ε) Έναν πολωτή (Polaroid), ο οποίος θα αναλύει το φως το διαθλώμενο από τη δεσμίδα των παραλλήλων πλακών. (στ) Τον συγκλίνοντα φακό, ο οποίος θα εστιάζει την παράλληλη δέσμη από την έξοδο του πολωτή στην ενεργό περιοχή μιας φωτοδιόδου. (ζ) Τη φωτοδίδο, μέσω της οποίας γίνονται οι μετρήσεις της έντασης του φωτός. (η) Το τροφοδοτικό, για την ηλεκτρική πόλωση της φωτοδιόδου. (θ) Το πολύμετρο.

Σημείωση

Το φως που δέχεται η φωτοδίοδος, μετατρέπεται σε φωτόρευμα. Εμείς θα μετράμε με τη βοήθεια του πολυμέτρου την πτώση τάσης (σε Volt) στα άκρα μιας αντίστασης, που διαρρέεται από το προαναφερόμενο ρεύμα.

Για να μετρήσουμε τώρα το βαθμό πόλωσης του φωτός που προκύπτει, όταν φυσικό φως διαθλασθεί μέσα από μια δεσμίδα ορισμένου αριθμού παραλλήλων πλακών, ακολουθούμε την εξής διαδικασία:

α) Τοποθετούμε πάνω στη γωνιομετρική τράπεζα (δ) το σύστημα των παραλλήλων πλακών, κάθετα στη διεύθυνση διάδοσης της παράλληλης δέσμης φωτός. Γνωστού όντως του δ.δ. των πλακών και κατά προέκταση της γωνίας Brewster, στέφουμε την τράπεζα κατά τη γωνία αυτή. Η συγκεκριμένη γωνία, θα είναι η ίδια για όλες τις δεσμίδες των πλακών που θα χρησιμοποιήσουμε.

β) Εφόσον η δίοδος είναι πολωμένη και το πολύμετρο σε θέση λειτουργίας, εκτελούμε δύο μετρήσεις με τη βοήθεια του περιστρεφόμενου αναλυτή. Η πρώτη γίνεται για τη θέση που παίρνουμε ελάχιστο έντασης ($I_{\min}$) (δηλ. όταν ο άξονας διέλευσης του αναλυτή είναι κατακόρυφος σε σχέση με την τράπεζα εργασίας). Η δεύτερη γίνεται για τη θέση που παίρνουμε μέγιστο έντασης ($I_{\max}$) (δηλ. όταν ο άξονας διέλευσης του αναλυτή είναι οριζόντιος σε σχέση με την τράπεζα εργασίας).

γ) Με τη βοήθεια της γνωστής σχέσης:

$$P = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}}$$

υπολογίζουμε το βαθμό πόλωσης του μερικά γραμμικά πολωμένου φωτός, που διαθλάται μέσω της συγκεκριμένης δεσμίδας παραλλήλων πλακών.

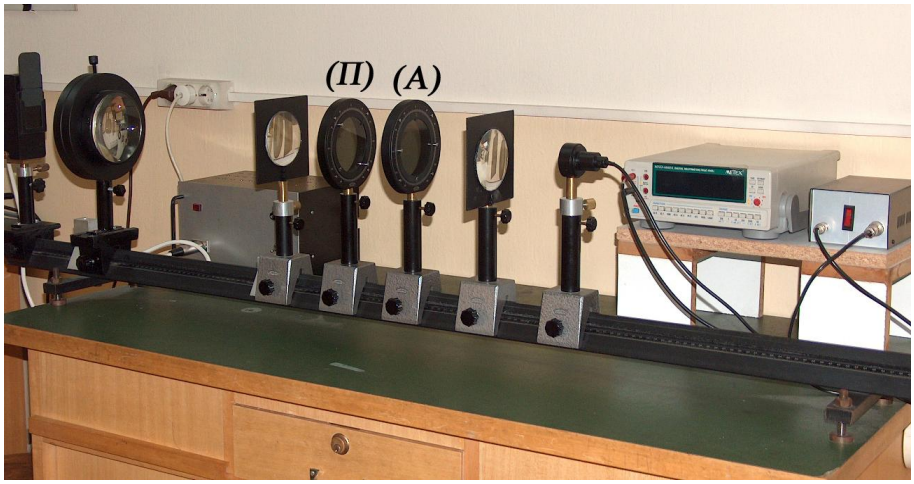
Να γίνουν συνολικά πέντε (5) μετρήσεις για δεσμίδες με αριθμό πλακών αντίστοιχα: $m = 1, 2, 4, 8, 16$ και $n = 1.515$. Να γίνει γραφική παράσταση του $P = P(m)$ και να συγκριθεί με την καμπύλη:

$$P = \frac{m}{m + \left(\frac{2n}{n^2 - 1} \right)^2}$$

όπως αυτή προκύπτει από τους υπολογισμούς των Provostaye-Desains. Που κατά τη γνώμη σας οφείλονται οι αποκλίσεις μεταξύ των θεωρητικών και των πειραματικών τιμών;

ΠΕΙΡΑΜΑ Γ$_2$ ***Επιβεβαίωση του νόμου του Malus***

Για ν' αναδείξουμε το νόμο του Malus, θα χρησιμοποιήσουμε τη διάταξη του προηγουμένου πειράματος τροποποιημένη στα εξής στοιχεία (Εικ. Γ2): Αφαιρούμε το γωνιομετρικό δίσκο (δ) και στη θέση του προσθέτουμε έναν επιπλέον πο-



(Εικ. Γ2)

λωτή (Π). Προσανατολίζουμε τους άξονες διέλευσης πολωτή (Π) και αναλυτή (Α) έτσι ώστε να είναι κατακόρυφοι. Μετρούμε με τη βοήθεια της φωτοδιόδου και του πολυμέτρου την τιμή I_0 της έντασης της δέσμης του φωτός, κατά την έξοδό της από τον αναλυτή. Κατόπιν μετρούμε τις τιμές $I(\theta)$ για διαφορετικές γωνίες θ μεταξύ αξόνων διέλευσης του (Π) και του (Α) καθώς περιστρέφουμε τον αναλυτή. Θα πρέπει ουσιαστικά να επιβεβαιώνεται ο νόμος του Malus:

$$I(\theta) = I_0 \cos^2 \theta$$

Να εκτελεστεί μια σειρά μετρήσεων ανά 10^0 για μια πλήρη περιστροφή $\left(360^0\right)$ του αναλυτή (Α) και να γίνει η γραφική παράσταση της $I(\theta)$.